Некоторые приложения флюксионного исчисления

С наибольшей полнотой Ньютон рассмотрел задачи дифференциального исчисления и дифференциальной геометрии в «Методе флюксий и бесконечных рядов». Многочисленные приемы отыскания экстремумов, касательных и нормалей, вычисления радиусов и центров кривизны в декартовых и полярных координатах, отыскания точки прямизны, т. е. точек, в которых радиус кривизны бесконечен [1], и т. д. иллюстрируются здесь большим числом примеров. В этом же сочинении произведены квадратуры и спрямления разнообразных кривых и найдены значения интегралов некоторых иррациональных функций — проблема, которая более подробно рассмотрена в «Рассуждении о квадратуре кривых». В частности, Ньютон свел интегрирование некоторых видов функций, рациональных относительно $\sqrt{ax^{2n}+bx^n+c}$, к квадратуре конических сечений. Наиболее известен его результат, относящийся к интегрированию дифференциального бинома. В письме от 24 октября 1676 г. (стр. 219) он указал, что $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ выражается алгебраически в том и, насколько ему известно, только в том случае, когда $(m+1)/n$, или $(m+1)/n+p$, или p суть целые положительные числа. Дальнейшее исследование интегрируемости дифференциального бинома в элементарных функциях произвели Х. Гольдбах и Л. Эйлер. Заметим, что в «Рассуждении о квадратуре кривых» Ньютон предложил знак интеграла величины z в форме $'z$, интеграла последней величины — в форме $''z$ и т. п. Эта символика распространения не получила из-за очевидного неудобства.

В «Методе флюксий и бесконечных рядов» Ньютон привел также некоторые приемы решения дифференциальных уравнений первого порядка. Он начинает исследование этой II проблемы метода с частного примера уравнения в полных дифференциалах

$$M(x, y)\dot{x}+N(x, y)\dot{y}=0,$$

где M и N — целые многочлены, именно с уравнения

$$3x^2\dot{x}-2a\dot{x}x+ay\dot{x}-3y^2\dot{y}+ax\dot{y}=0,$$

и показывает, как найти (фактически зная, что $(xy)'=xy'+yx'$) его решение с помощью квадратуры, но предупреждает, что указанный прием ведет к цели не всегда. Признаком полного дифференциала Ньютон еще не располагал.

Поиски приемов решения отдельных видов дифференциальных уравнений в квадратурах Ньютона, видимо, не интересовали, и он не дал какой-либо классификации уравнений первого порядка. Общей формой решения служил у него бесконечный степенной ряд, иногда ряд по каким-либо рациональным степеням аргумента; кроме того, как упоминалось, в «Математических началах натуральной философии» некоторые уравнения решены были геометрически. При этом Ньютон, как правило, ищет частное решение, в котором постоянный член степенного ряда равен нулю (т. е. $y=0$ при $x=0$). Но он хорошо знал, что каждое

[1] Ньютон специально указывает, что точки прямизны необязательно определяют «противоположные изгибы» кривой, т. е. суть точки перегиба, правило нахождения которых (по экстремуму подкасательной) он дал ранее.

дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений[1]. Это поясняется на примерах, а затем мотивируется тем соображением, что при произвольном изменении начала отсчета путей скорости и их взаимоотношения остаются прежними.

Разложения решений в бесконечные ряды для уравнений вида $\dot{y}/\dot{x} = f(x, y)$ получаются с помощью своеобразного метода последовательных приближений или метода неопределенных коэффициентов. Изложение выкладок заняло бы много времени, и мы приведем лишь один любопытный пример. Для уравнения

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \ldots$$

(в форме $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a-x}$ оно не приведено) решение по первому способу получаются в виде

$$y = x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{2a^2} + \ldots$$

Этот ряд почти очевидным образом имеет сумму $\frac{a^2}{2}\frac{1}{a-x} + \frac{x-a}{2}$. Трудно думать, что Ньютон этого не заметил; конечное выражение, видимо, просто его не интересовало или же он не привел его, так как не располагал общим приемом интегрирования линейного уравнения в квадратурах.

Ньютон сделал также несколько замечаний об уравнениях с тремя и большим числом переменных. Условие интегрируемости одним соотношением ему не было известно, но он понимал, что в общем случае, когда такое интегрирование невозможно, для решения достаточно принять какие-либо дополнительные уравнения между переменными; в частности, когда их три, то одно такое уравнение. Это позволяет исключить одну из переменных и ее флюксию. Так, для уравнения

$$2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0, \text{ или } 2dx + xdy - dz = 0$$

он вводит дополнительно уравнение $x = y^2$, после чего получает

$$x = y^2, \qquad z = 2y^2 + \frac{y^3}{3}.$$

Геометрическое истолкование такого рода дифференциальных уравнений дал сто лет спустя Г. Монж.

Г. В. Лейбниц

Примерно десятью годами позднее, чем Ньютон, но независимо и другими путями пришел к созданию исчисления бесконечных малых Лейбниц. Этот десятилетний разрыв не сыграл, однако, заметной роли в судьбах обоих открытий. К тому времени, когда появилась в печати первая работа Лейбница по дифференциальному исчислению, т. е. к 1684 г., метод флюксий Ньютона оставался еще в рукописях, известных небольшому кругу преимущественно английских ученых. А к 1704 г., когда было

[1] Хотя и не ввел понятия об общем решении дифференциального уравнения.

издано «Рассуждение о квадратуре кривых» Ньютона (другие его сочинения по анализу вышли еще позднее), уже были опубликованы не только почти все основные мемуары Лейбница, но и многие важные статьи его учеников Я. и И. Бернулли, а также превосходный учебник дифференциального исчисления Г. Ф. Лопиталя. Ничего подобного для развития и распространения метода флюксий в Англии сделано не было.

В истории человечества было немного людей, столь активных в самых различных областях духовной и практической жизни, как Лейбниц. Он занимался горным делом и юриспруденцией, техникой и философией, политикой и организацией научных академий и внес большой личный вклад чуть ли не во все естественные и общественные науки, не говоря уже о математике. В истории механики имя Лейбница навсегда останется связанным с понятием живой силы, т. е. кинетической энергии, и с новой формой закона сохранения сил, в биологии и геологии — с разработкой эволюционных идей, в психологии — с одной из первых попыток проникнуть в сферу подсознания; ко всему этому он успешно занимался также лингвистикой и, по долгу службы, много времени отдал истории.

Как политический деятель, прежде всего дипломат, Лейбниц выразил устремления передовых кругов тогдашней немецкой буржуазии, еще слишком слабой, чтобы претендовать на власть, и искавшей решения насущных задач путем компромисса с господствовавшей аристократией. Так, Лейбниц не без успеха трудился над примирением разногласий между соперничавшими немецкими государствами. И он добивался, хотя совершенно тщетно, объединения католической церкви с протестантской или по крайней мере лютеранской с реформатской. Печать компромисса лежит и на мировоззрении Лейбница, искавшего примирения веры и разума, религии и науки, принципов идеализма и материализма. Философская система Лейбница, к которой он пришел после долгих размышлений, была в главном идеалистической. Он представлял себе мир, как совокупность монад — неделимых и нематериальных субстанций, обладающих той или иной степенью чувствительности и сознания и имманентной активностью, но не взаимодействующих друг с другом. Параллелизм и согласованность в развитии монад достигаются только благодаря предустановленной богом гармонии: в этой последней находили примирение детерминизм и телеология. Что касается материи, то это, по Лейбницу, есть низшая ступень монад или, лучше сказать, своего рода их инобытие. С непрерывной материей неотделимо связаны, как порядки ее существования, пространство и время, без материи немыслимые. Но в учении о материи, в физике Лейбниц твердо занимает позиции механизма: все материальные явления надлежит объяснять с помощью движения в пространстве.

В теории познания Лейбница преобладала рационалистическая струя. Он отличал всеобщие и необходимые «истины разума», например, арифметические, выводимые априори и чисто логически, от «истин факта», которые устанавливаются эмпирически и для нас лишены внутренней необходимости. Для познания первых требуется прежде всего логический закон противоречия. При изучении вторых основным является принцип достаточного основания, т. е. выяснение оснований или причин, почему данное явление происходит именно так, а не каким-либо иным образом. Но для божественного разума истины факта столь же необходимы, как истины разума, и различие между ними стирается. В философии религии Лейбниц надеялся достичь примирения несовершенства мира с идеей

Готфрид Вильгельм Лейбниц

(с гравюры М. Бернигерота, 1703 г.). Латинское двустишие гласит: если (высшая) мудрость скрыла что-либо от разума, дошедшего до сути всего, то потому, что сама этого не знала (Лейбниц, впрочем, был недоволен этой подписью, находя ее богохульной.— *Прим. ред.*)

всеблагости его творца, отстаивая положение, что если наш мир и не во всем хорош, то он наилучший из возможных, мир наименьшего зла. Вольтер в своем «Кандиде» зло высмеял этот квазиоптимизм Лейбница.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) родился в семье профессора морали Лейпцигского университета. Далекие предки этого рода были, видимо, славянского происхождения, а сама фамилия Лейбниц этимологически восходит к славянскому названию одной луговой травы «липпице», от которого пошли названия многих поселений и рек Польши, Чехословакии и некоторых районов Баварии и Саксонии. В 1661—1666 гг. Лейбниц изучал в университетах Лейпцига и Иены философию и юриспруденцию, а в Альтдорфе в 1666 г. защитил диссертацию на степень доктора юридических наук. В том же году вышло его сочинение по комбинаторике, о котором говорилось ранее (стр. 85). В студенческие годы сильное впечатление произвело на Лейбница изучение натурфилософии Декарта; он заинтересовался и математикой. Но ни в Лейпциге, ни в Иене не было ученых, которые могли бы направить занятия молодого человека в этой области по правильному пути.

Отказавшись от академической карьеры, предложенной ему университетом Нюренберга, Лейбниц вскоре поступил на службу майнцского курфюрста. С дипломатическим поручением курфюрста он прибыл в 1672 г. в Париж, где провел, с небольшими перерывами, несколько лет. Здесь он сблизился с учеными, группировавшимися вокруг Академии наук. и здесь же смог обсудить с тогдашним президентом Академии — Гюйгенсом свои первые самостоятельные поиски в теории бесконечных рядов. Во время кратковременной поездки в Лондон в начале 1673 г. Лейбниц установил контакты и с английскими учеными и продемонстрировал им еще не вполне завершенную модель счетной машины, которую построил, ознакомившись с арифмометром Паскаля. По предложению Ольденбурга Королевское общество избрало Лейбница своим членом, хотя многие англичане нашли его знания поверхностными, а самого его только дилетантом. К этому имелись в то время все основания. Только по возвращении в Париж Лейбниц всерьез приступил к изучению новой математики. И здесь большую роль сыграли беседы с Гюйгенсом. В поразительно короткий срок Лейбниц изучает труды Декарта и его последователей, Кавальери, Григория Сен-Венсана, Фабри, Паскаля, Гюйгенса, Валлиса, Дж. Грегори и несколько позднее Барроу. Правда, некоторые сочинения он лишь просматривал, но для такого читателя, как Лейбниц, и беглого ознакомления с книгой бывало достаточно, чтобы возбудить творческую работу его собственной мысли. Вскоре Лейбниц далеко углубился в самостоятельные изыскания и к осени 1675 г. выработал принципы и символику дифференциального и интегрального исчисления. Мы несколько раз упоминали об обмене в следующем году письмами между ним и Ньютоном через посредство Ольденбурга. Из этих писем Лейбниц узнал много интересных подробностей об открытиях Ньютона, но основными идеями и методами исчисления бесконечно малых он к этому времени уже владел сам. Отметим, что открытие исчисления бесконечно малых Лейбницем — редкий пример сравнительно позднего раскрытия математического гения. Лейбницу было тогда уже 29 лет, а инфинитезимальными проблемами он всерьез занялся всего тремя годами ранее.

В 1676 г. Лейбниц поступил на службу к герцогу ганноверскому. Официальными обязанностями его были заведование герцогской библиотекой в Вольфенбюттеле и составление истории дома Гвельфов, но помимо того он был герцогским советником по вопросам экономики, финансов, внешних сношений, народного просвещения и т. д. Вместе с тем Лейбниц продолжал научные и философские занятия, а кроме того, вел колоссальную переписку с Чирнгаузом, Гюйгенсом, братьями Бернулли, Лопиталем и многими другими учеными. В 1700 г. при содействии своей ученицы, дочери ганноверского герцога Софии-Шарлотты, вышедшей замуж за прусского государя, он организовал Академию наук в Берлине и стал ее первым президентом; в том же году он был избран иностранным членом Парижской академии наук. Имя его пользовалось известностью во всем ученом мире. С 1697 г. Лейбниц поддерживал письменные отношения с русским правительством, которому представил ряд проектов о распространении образования и наук в России. Царь Петр несколько раз беседовал с ним по этим вопросам и специально об основании Академии наук в Петербурге при свиданиях в Торгау, Карлсбаде, Дрездене и Пирмонте в 1711—1716 гг.

Старость Лейбница была омрачена спором о приоритете в открытии исчисления бесконечно малых, все обострявшимся и получившим широкую общественную известность. С третьим из ганноверских герцогов, при которых ему довелось служить, отношения создались холодные, а это отражалось и на отношении к Лейбницу придворных кругов. Наконец, одинокого Лейбница — он не был женат — стали одолевать различные недуги. Когда этот великий человек умер на семьдесят первом году жизни, смерть его прошла почти незамеченной в стране, которую он прославил своими открытиями и для которой многое сделал на служебном посту. На могильной плите в полу ганноверской церкви, где он похоронен, высечены два простых слова: ossa Leibnitii — мы бы сказали: «прах Лейбница».

Учение о всеобщей характеристике

Кажется, не было области математики, которая ни интересовала бы Лейбница. Теория чисел и алгебра, комбинаторика и теория вероятностей, математическая логика и машинная математика, геометрия и анализ бесконечно малых — в каждую из этих дисциплин он внес оригинальный вклад. Но при всей широте диапазона в математических исследованиях Лейбница обнаруживается глубокое единство, определявшееся тем, что он десятилетиями стремился к одной цели — созданию универсального математического или, если угодно, метаматематического метода познания.

Мысль о «всеобщей науке», которую он называл также «комбинаторной характеристикой» или «всеобщей характеристикой», возникла у Лейбница еще в молодые годы. Мы знаем, что в этом он имел предшественников. Рамон Люлль в Средние века проектировал машину, автоматически производящую открытия посредством комбинирования элементарных понятий. Декарт создавал свою всеобщую математику как алгебраический метод познания всего, что относится к порядку и мере. Некоторые ученые XVII в., как профессор математики Иоахим Юнг (1587—1657), желали построить логику наподобие математического исчисления и указывали на недостаточность аристотелевой силлогистики. Всеобщая характеристика, согласно замыслу Лейбница, должна была стать единым алгоритмом всех формализованных наук, опирающимся на разветвленный аппарат символической логики.

Все понятия надлежит свести к немногим простым понятиям, образующим как бы алфавит мышления, а каждому простому следует поставить во взаимно однозначное соответствие его знак, «характер». Греческое слово Χαραχτήρ означает форму и существо вещи, ее признак, характер и т. п. «Характеры,— писал Лейбниц,— суть какие-либо вещи, с помощью которых выражаются взаимоотношения других вещей и употребление которых легче, чем последних» [1]. Сложные идеи и предложения выражаются по определенным правилам комбинациями начальных простых понятий, т. е. формулами и уравнениями, образованными из характеров; рассуждения заменяются преобразованиями формул и уравнений. Так в принципе, по мнению Лейбница, может быть осуществлена полная формализация мышления, преобразование его в регулярное исчисление, для которого нет неразрешимых задач. Если, мечтал Лейбниц, между учеными возникнут разногласия, то им достаточно будет взять в руки перья, сесть за расчеты и сказать друг другу: начнем вычислять (calculemus)!

Теперь мы знаем, что мечта об универсальном логическом алгоритме, позволяющем доказать или опровергнуть всякое предложение любой формализованной науки, неосуществима; алгоритмы — могучее, но все же не всемогущее средство исследования. Это не умаляет исторической роли идеи Лейбница, которая направляла его (да и не только его) конкретные исследования во многих областях математических наук. С этой идеей, в частности, было связано огромное значение, придаваемое Лейбницем символике, которая кладется в основание каждого оперативного исчисления. «Следует заботиться,— писал он Чиригаузу в 1678 г.,— о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления» [2].

Примерами конкретной реализации идей всеобщей характеристики в творчестве самого Лейбница явились его работы по математической логике, введение индексов и определителей при решении систем линейных алгебраических уравнений и набросок геометрии положения (стр. 126). Во всех трех случаях мы имеем дело с зернами будущих больших теорий, которые были развиты в XVIII—XX вв.

Напомним, что, разрабатывая различные виды оперативных исчислений, Лейбниц интересовался и вопросами механизации этих исчислений. Здесь источник его внимания к счетным машинам, полностью автоматизирующим простые арифметические алгоритмы. В этом Лейбниц, вслед за Паскалем, был провозвестником блестящих достижений вычислительной техники наших дней. Его интересовали и чисто технические вопросы. Один из изобретателей паровой машины Дени Папен (1647—1712) сообщает, что основную идею этого изобретения — применение цилиндра и поршня — подсказал ему Лейбниц.

Самыми важными из созданных Лейбницем оперативных исчислений были дифференциальное и интегральное исчисления.

---

[1] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften, herausg. von C. I. Gerhardt, Bd. I—VII. Halle, 1849—1863, Bd. V, S. 141. Мы видели, что термином «характер», как синонимом знака, символа, пользовались и другие ученые того времени, например Валлис (ср. стр. 41).

[2] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften, Bd. IV, S. 455.

Первые инфинитезимальные исследования Лейбница

В только что цитированной переписке с Чирнгаузом 1678—1679 гг. Лейбниц довольно подробно и, так сказать, по свежим следам рассказал, как он пришел к дифференциальному и интегральному исчислению. Он указывает три главных источника своего открытия: 1) взятый у Паскаля и существенно обобщенный метод характеристического треугольника; 2) введенное Декартом и его последователями алгебраическое представление геометрических кривых и 3) открытия Валлиса и Меркатора в области бесконечных рядов вместе с собственными исследованиями о суммировании рядов при помощи порождающих их разностей. Синтез этих идей позволил ему открыть, что все инфинитезимальные задачи можно свести к аналитическим вычислениям двух типов. Задача о касательной и связанные с нею всегда приводят к вычислению разностей бесконечно близких членов рядов; задача о квадратуре и ей подобные, включая знаменитую обратную задачу о касательных, всегда ведут к вычислению сумм бесконечных рядов с бесконечно малыми соседними членами. В этих замечаниях отчетливо выражено, между прочим, отличие в подходе к анализу Лейбница и Ньютона. Творец флюксионного исчисления мыслил его основные задачи и понятия как бы геометрико-физически и выражал в терминах механики; создатель дифференциального и интегрального исчисления мыслил их геометрико-аналитически и выражал в терминах арифметики или алгебры.

Для иллюстрации более ранних исследований Лейбница, относящихся еще к 1673 г., мы рассмотрим один замечательный пример, в котором проблемы квадратур и разложения в ряды сплетены в единое целое, а применение характеристического треугольника играет ведущую роль. Речь идет о преобразовании, позволившем Лейбницу единообразно вывести большинство известных тогда квадратур и найти, как он выражался, арифметическую квадратуру круга. Если на данной кривой $y=f(x)$ взять две бесконечно близкие точки M, N (рис. 42, стр. 254) и в M провести касательную MT, пересекающую ось OY в точке T, причем

$$OT = y - x\frac{dy}{dx},$$

то бесконечно малый треугольник OMN равен половине бесконечно малого прямоугольника $LM'N'P$ с основанием $M'N' = MR = dx$ и высотой $LM' = OT$. Представим себе вспомогательную кривую с уравнением

$$z = f(x) - xf'(x) = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Тогда площадь сектора OAB, ограниченного дугой данной кривой и радиус-векторами, проведенными из O в концы этой дуги $A\ (a, c)$, $B\ (b, d)$, равна половине площади криволинейной трапеции для вспомогательной кривой между соответствующими ординатами, т. е. $\frac{1}{2}\int\limits_a^b (y - xy')\,dx$.

Все сказанное легко выводится из подобия характеристического треугольника MNR треугольнику $TM'M$ и треугольнику TOS, где OS перпендикулярна касательной MT. Это преобразование Лейбница, которое соот-

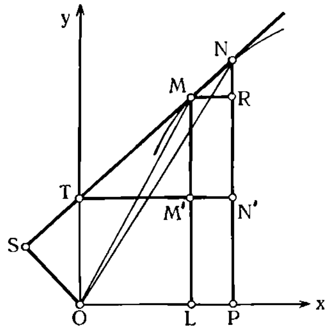


Рис. 42

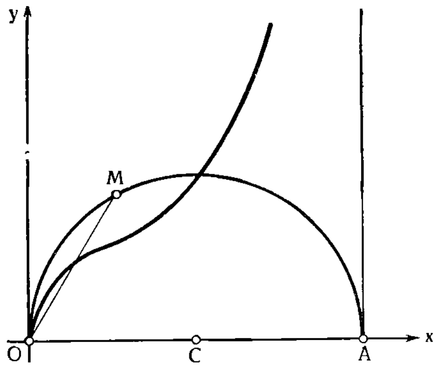


Рис. 43

ветствует нашему выражению дифференциала площади в полярных координатах

$$\frac{1}{2}\rho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}(y\,dx - x\,dy),$$

было известно ранее Дж. Грегори (1668) и Барроу (1670), но Лейбниц вывел его самостоятельно и применил весьма оригинально [1].

Допустим, что данная кривая есть полуокружность $y^2 = 2x - x^2$ радиуса 1 (рис. 43), так что

$$z = \frac{y}{2-x} = \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

и вспомогательная кривая есть $x = 2z^2/(1+z^2)$, т. е. локон Аньези с осью симметрии на оси абсцисс и асимптотой $x = 2$ (квадратурой этой кривой занимался еще Ферма, ср. стр. 186). В таком случае площадь сегмента круга с основанием, соединяющим точки O и M (x, y), равна $\frac{1}{2}\int\limits_0^x z\,dx$, а площадь соответствующего кругового сектора $\frac{1}{2}\left(y + \int\limits_0^x z\,dx\right)$, т. е.

$$\frac{1}{2}\left[z(2-x) + xz - \int\limits_0^z x\,dz\right] = z - \int\limits_0^z \frac{z^2\,dz}{1+z^2}.$$

Разлагая дробь $z^2/(1+z^2)$ в ряд с помощью деления, по Меркатору, и интегрируя почленно, Лейбниц получил выражение для площади сектора в виде ряда

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$$

Если обозначить соответствующий сектору центральный угол 2φ, то площадь последнего будет φ, а так как $\operatorname{tg}\varphi = x/y = z$, то найденный ряд давал разложение арктангенса. Этот результат был найден ранее Ньюто-

[1] У Лейбница система декартовых координат была косоугольной. У Грегори и Барроу — только прямоугольной.

ном и Грегори (чего Лейбниц не знал), но Лейбниц первым в Европе (см. т. I, стр. 202) получил при $z=1$ выражение $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$, которое и назвал «арифметической квадратурой круга»[1]. О своих результатах он вскоре сообщил Гюйгенсу и упомянул в письме к Ольденбургу от 15 июля 1674 г.; затем он подробно описал свой метод в письме от 27 августа 1676 г. для Ньютона, отправленном через посредство Ольденбурга. Тот же прием Лейбниц применил к квадратуре эллипса, гиперболы и циклоиды.

О ряде арктангенса Лейбниц специально заметил, что значение z в нем не должно превосходить 1. Вместе с тем он уже тогда располагал теоремой о сходимости знакочередующегося ряда с монотонно убывающими и стремящимися к нулю членами, а также оценкой приближений, доставляемых частными суммами с четным и нечетным числом членов. Он только говорил не о сходимости ряда, а о том, что ряд имеет конечное значение. В письме к И. Бернулли от 10 января 1714 г. Лейбниц привел доказательство своего признака, по идее сходное с современным.

Все эти результаты Лейбница распространялись не только путем переписки. В «Journal des Sçavans» за 1678 г. он опубликовал заметку, в которой сообщил квадратуру сегмента циклоиды, а в статье «Об истинном отношении круга к описанному квадрату, выраженном в рациональных числах» (De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus. Acta Eruditorum. 1682) опубликовал носящий его имя ряд для $\pi/4$. В этой же статье он упомянул о произведенных им в 1672 г. суммированиях рядов обратных фигурных чисел с помощью разностных схем, которые, как мы видели, он сам называл в числе источников своих главных открытий. Мы не останавливаемся на них, так как они представляют лишь третьестепенный интерес; упомяним лишь простейший случай обратных треугольных чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1\,^{2}.$$

Переход к исчислению бесконечно малых

Осенью 1675 г. Лейбниц вступил впервые в область исчисления бесконечно малых в собственном смысле слова, введя его основные понятия, операции и символы. Сохранившиеся рукописные заметки позволяют точно датировать некоторые этапы его работы. 26 октября он еще выражает квадратуру по методу неделимых в духе Паскаля словами «все w» (omnia w), где w — ординаты, лишь подразумевая, как и Паскаль, что каждая линия умножается на бесконечно малое приращение абсциссы. Такой записью пользовался перед тем Валлис (1670). Через три дня, 29 октября, Лейбниц замечает, что вместо omn. l полезно писать $\int l$, т. е. сумма линий l; знак $\int$ был взят как первая буква слова summa. Здесь, добавлял Лейбниц, возникает новый ряд исчисления. Если же дано $\int l = ya$ (множитель a

---

[1] В том смысле, что квадратура производится с помощью последовательности рациональных чисел (хотя и взятых в бесконечном числе).

[2] Этот результат получил ранее Броункер, сложив почленно ряды, выражающие площади $EDCE$ и $ABCEA$ (стр. 160).

добавлялся, чтобы получилась размерность площади), то возникает другой род исчисления, в котором $l = ya/d$. При этом Лейбниц писал, что тогда как $\int$ увеличивает число измерений, d его уменьшает, $\int$ обозначает сумму, d — разность. Первой буквой слова «разность» — differentia и явился знак d. Быть может, потому, что вторая операция понижает размерность, знак d был поставлен первоначально в знаменателе [1]. Но вскоре обнаружилось неудобство такой записи, так как разность абсциссы нередко приходилось писать в знаменателе. В рукописи «Примеры обратного метода касательных» (Methodi tangentium inversae exempla), датированной 11 ноября, менее чем две недели спустя, символы x/d, y/d заменяются на dx, dy, и записи принимают знакомый нам вид [2]. Одновременно со всем этим формулировались на языке и в обозначениях нового алгоритма важнейшие правила операций, например: дифференцирования и интегрирования степенной функции, дифференцирования произведения, вынесения постоянного множителя за знак интеграла, интегрирования суммы. К этому времени Лейбниц оперировал и дифференциалами высших порядков, хотя еще не ввел для них специального обозначения.

Интеграл, который в то время и еще долго спустя Лейбниц называл суммой, выступал в новом исчислении как сумма бесконечного числа слагаемых, т. е. как определенный интеграл, но прежде всего как интеграл с переменным верхним пределом (и нижним пределом, равным нулю), что сразу выявляло взаимно обратный характер обеих фундаментальных операций. В одной из недатированных, но, очевидно, относящихся к тому же времени записей мы встречаем и такую

$$d\int x = x.$$

Впрочем, то обстоятельство, что, скажем,

$$\int_0^y y\,dy = \frac{y^2}{2},$$

как в том случае, когда y есть независимая переменная, так и в том, когда y есть какая-либо функция, Лейбниц специально обосновывал, ясно понимая различие между обоими случаями.

Заметим, чтобы к этому более не возвращаться, что Лейбниц долгое время употреблял термин «сумма». Слово «интеграл» ввел, по его собственным словам, И. Бернулли; в печати оно появилось в статье Я. Бернулли 1690 г., о которой будет сказано далее, а через несколько лет его одобрил в ходе переписки с И. Бернулли и Лейбниц.

Эти новые открытия Лейбниц частично изложил в письме к Ньютону через Ольденбурга от 21 июня 1677 г. Он начинает со своего обобщенного им метода касательных, основанного на применении «разностей ординат», именно бесконечно малых разностей «соседних» (proximarum) координат. Приведя выражение разности степенной функции с натуральным показателем, Лейбниц для образца выводит разность $dy^2 = 2ydy$, опуская в выражении $y^2 + 2ydy + dy^2 - y^2 = 2ydy$ квадрат бесконечно малой величины «в силу оснований, известных из метода максимумов и мини-

[1] См. *C. I. Gerhardt.* Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle, 1855, S. 125—126.
[2] Там же, стр. 134—135.

мумов»[1]. Он сообщает также формулы дифференциала произведения, вычисляет отношение $\frac{dy}{dx}$ из уравнения $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ — целый многочлен, и еще указывает, что его правило вычисления разностей не требует предварительного избавления от иррациональностей, как это нужно было в прежних методах[2]. Далее говорится, что всегда можно квадрировать фигуру, представленную дифференциальным уравнением (aequatio differentialis), выражающим dx и произведенным (derivata) из другого уравнения, выражающего саму величину x[3]. Иными словами, кривая $x = f(y)$ квадрируема, если известна функция $x = F(y)$, для которой $dx = dF(y) = f(y)\,dy$. Слова «дифференциальное уравнение» и «произведенное уравнение» — мы теперь говорим «производное» — появляются здесь впервые. Правда, в примере Лейбница имеется досадная описка, плод небрежности или спешки.

Мемуар Лейбница о «Новом методе»

Ньютон на это письмо Лейбница не ответил, не найдя в нем чего-либо для себя нового. Стремясь к распространению своих идей, Лейбниц, как мы упоминаем, делился ими в переписке с Чирнгаузом 1678—1679 гг. Именно к обозначениям дифференциалов и интегралов относились цитированные на стр. 252 слова Лейбница о значении в математике подходящей символики.

Чирнгауз не сумел правильно оценить алгоритм Лейбница; более того, он полагал, что введение новых понятий и символов только затрудняет дело и что прежние методы дают более простое решение проблем. Это не помешало, впрочем, Чирнгаузу понять важность отдельных результатов Лейбница и некоторые из них он включил без указания источника и в неточной передаче в свои статьи, помещенные в 1682—1683 г. в Acta Eruditorum. Это заставило Лейбница поторопиться с дальнейшей публикацией его открытий, которую он уже начал статьей «Об истинном отношении круга к описанному квадрату». В мае 1684 г. он в том же журнале выступил с некоторыми осторожно сформулированными критическими замечаниями по адресу Чирнгауза, назвав только первую букву его фамилии, а в октябрьском выпуске поместил «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» (Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus).

На помещенных далее фотографиях воспроизведена первая страница черновика этого мемуара и первая страница его печатного текста.

В этом составившем эпоху сочинении, насчитывавшем всего семь страниц, лишенном доказательств и к тому же искаженном опечатками и даже несколькими допущенными по небрежности ошибками, Лейбниц изложил основные начала дифференциального исчисления. Прежде всего дает-

---

[1] The correspondence of Isaac Newton, v. II. Cambridge, 1960, p. 213.
[2] В приводимых примерах Лейбниц фактически пользуется свойством инвариантности первого дифференциала (ср. стр. 259).
[3] The correspondence of Isaac Newton, v. II, p. 215.

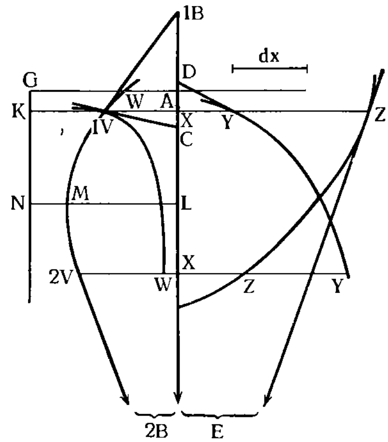


Рис. 44

ся определение дифференциала функции [1], изображенной на рис. 44 кривой YY (или VV, или WW), имеющей ординаты $y=XY$ (или v, или w) и абсциссы $x=AX$. За дифференциал абсциссы, т. е. независимого переменного x, принимается произвольный отрезок dx, а дифференциал функции y вводится как отрезок, относящийся к dx, как ордината к соответствующей подкасательной, например y к DX; иными словами,

$$dy = \frac{y\,dx}{t}.$$

Затем приводятся правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного [2] и любой постоянной степени. Проблема дифференцирования иррациональных функций решается с предельной простотой в силу замечания, сделанного сразу после правила дифференцирования произведения: «Заметим, что в этом исчислении обращаются с x и dx так же, как с y и dy или с какой-нибудь другой неопределенной буквой и ее дифференциалом (cum sua differentiali)» [3]. В таких выражениях было сформулировано свойство инвариантности первого дифференциала или правило дифференцирования функции от функции.

Лейбниц подчеркивает алгоритмичность созданного им метода и вместе с тем широту его применения: «Если знать, так сказать, *Алгоритм* этого исчисления, которое я называю *дифференциальным*, то все прочие дифференциальные уравнения смогут быть получены при помощи общего вычислительного приема, и можно будет находить максимумы и минимумы, а также касательные, не испытывая притом необходимости в устранении дробей или иррациональностей или других сложных выражений,

---

[1] Слово «функция» Лейбниц здесь не употребляет, а дифференциалы называет обычно разностями, хотя здесь же появляется и термин «дифференциал».

[2] Двойственность знаков в выражении дифференциала частного (см. фото, стр. 261) вызвана тем, что Лейбниц не различает знака подкасательных, расположенных в сторону возрастающих или убывающих абсцисс. Далее он указывает, что знак следует выбирать так, чтобы дифференциал возрастающей (убывающей) величины был положительным (отрицательным).

[3] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 167.

как это приходилось, однако, делать, пользуясь доныне обнародованными методами» [1]. Слово «алгоритм» здесь было употреблено, как говорилось (т. I, стр. 212), в новом, более общем смысле.

Исключая из определения дифференциала какое-либо указание на его инфинитезимальные свойства, Лейбниц, по-видимому, хотел оградить себя от критики, которую могло вызвать употребление бесконечно малых в исходном пункте его исчисления. В некотором смысле его дифференциал совпадал с флюксией Ньютона, поскольку dx можно взять равным единице. Математики ближайших поколений иногда смешивали эти понятия. Однако Лейбниц так же мало мог избежать бесконечно малых, как и Ньютон, а в отличие от Ньютона, и не стремился к этому. Непосредственно за приведенной цитатой следует указание, что доказательство всего сказанного будет легким для знакомых с этими вещами людей, если принять во внимание, что дифференциалы величин можно считать пропорциональными их мгновенным (momentaneis) приращениям или уменьшениям,— это и позволяет для каждого данного уравнения написать его дифференциальное уравнение. Лейбниц особо подчеркивает то преимущество нового метода, что в нем основным объектом служит дифференциал, между тем как другие методы, обнародованные ранее, «по большей части употребляют отрезок вроде DX или какой-нибудь иной того же рода, а не отрезок dy, являющийся четвертым пропорциональным к DX. XY, dx, а благодаря этому все приходит в беспорядок» [2]. Далее он заявляет, что его метод самым общим образом распространяется и на трансцендентные линии. «Для этого нужно только всегда держаться того, что найти *касательную* — значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало (infinite parva), или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен кривой. А такое бесконечно малое расстояние можно всегда выразить с помощью какого-либо известного дифференциала... или же с помощью отношения к нему, т. е. с помощью некоторой известной касательной» [3].

Наряду с правилами алгоритма дифференцирования, Лейбниц формулирует в его терминах основные приемы исследования функций и кривых. Используя геометрическое значение отношения $dy : dx$, он кратко разъясняет признаки возрастания и убывания, максимума и минимума, выпуклости и вогнутости (следовательно, и достаточные условия экстремума для простейшего случая), а также точки перегиба. Попутно без каких-либо пояснений вводятся «разности разностей», обозначаемые ddv. Здесь все, замечает Лейбниц, зависит от правильного употребления знаков (и в этой связи он останавливается на вопросе о выборе знаков в формуле дифференциала частного). Упоминается случай, когда dy бесконечен относительно dx, причем касательная перпендикулярна к оси абсцисс.

В качестве примера даны решения задачи Ферма на определение пути, по которому в кратчайшее время распространяется свет из данной точки одной среды в данную точку другой среды, отделенной от первой прямой линией (еще в июньском выпуске «Acta Eruditorum» за 1682 г. Лейбниц

---

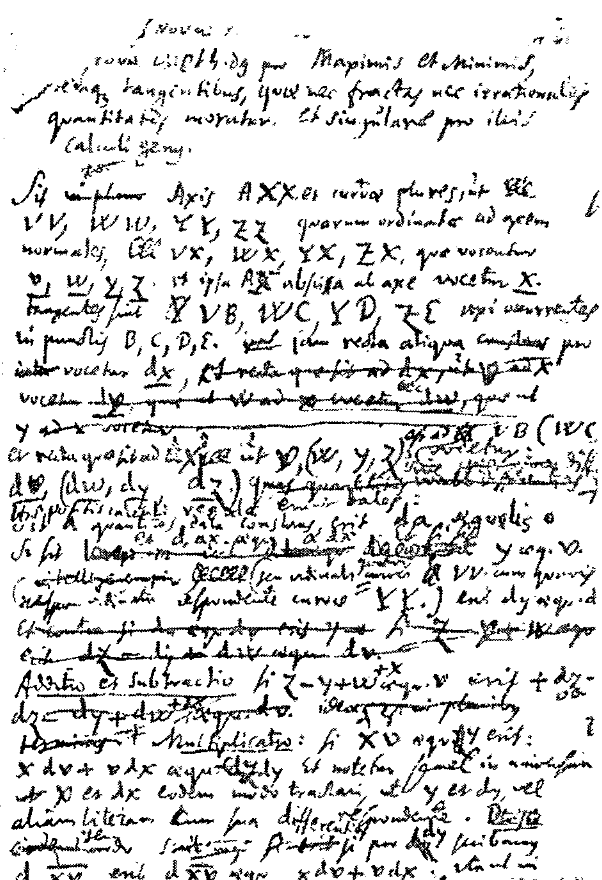
[1] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 169.
[2] Там же, стр. 169.
[3] Там же, стр. 170.

свел эту задачу к отысканию минимума $m\sqrt{c^2+y^2}+n\sqrt{g^2+(h-y)^2}$ и в этой связи впервые упомянул в печати о своем методе максимумов и минимумов), и на проведение касательной к кривой, сумма расстояний точек которой от шести данных точек, расположенных на одной прямой, постоянна. Изложив в «Новом методе» решение первой задачи, Лейбниц писал: «То, что человек, сведущий в этом исчислении, может получить прямо в трех строках, другие ученейшие мужи принуждены были искать, следуя сложными обходными путями».

В этих задачах, да и в большинстве правил, изложенных в рассматриваемом мемуаре, еще не было существенно новых частных результатов (упомянем, что в ходе вычислений здесь впервые появляется знак деления в виде двоеточия).

Принципиально новым было само исчисление, метод с его понятиями и символами, употребление которых демонстрировалось на сравнительно простых примерах. Лейбниц как-то заметил, что не обращает особого вни-

Начало рукописи «Нового метода» Лейбница (хранится в Архиве Лейбница в Ганновере)



мания на частные открытия и более всего желает усовершенствовать искусство открытий, что он стремится скорее давать методы, чем решения проблем, ибо один-единственный метод содержит в себе бесчисленное множество решений. Этого не понял должным образом Чирнгауз, но это вскоре стало ясным не только Лейбницу, но и ряду читателей его мемуара. Впрочем уже в ближайшие годы сам Лейбниц показал силу нового метода и на многочисленных «частных» открытиях, жизненно важных для прогресса исчисления бесконечно малых и его приложений.

Исчисление бесконечно малых, как алгоритм

В статье о «Новом методе» Лейбниц ограничился принципами дифференциального исчисления. Только в самом конце он, имея в виду интегральное исчисление, упомянул, что дал «лишь начала некоей много более высокой геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекрас-

Первая страница печатного текста «Нового метода» Лейбница (Acta Eruditorum, 1684)

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, z, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z — y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z - y + w + x}$ seu dv aequ. dz — dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro — z scribi — dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

нейшие задачи прикладной Математики»[1], и еще указал, что кривая WW с постоянной подкасательной XC, которая ищется в одной из задач Дебона, логарифмическая.

Два года спустя, в статье «О глубокой геометрии и анализе неделимых и бесконечных» (De geometria recondita et analysi indivisibilium, atque infinitorum. Acta Eruditorum, 1686) Лейбниц впервые ввел в печати знак интеграла и указал на взаимно обратный характер операторов $\int$ и d. Придя в одной задаче к $\int xdx$, он получает равенство

$$\int xdx = \frac{x^2}{2}$$

непосредственно из $dx^2/2 = xdx$, добавляя: «...у нас суммы и разности или $\int$ и d также взаимно обратны, как степени и корни в обыкновенном исчислении»[2]. Для примера записывается еще в интегральной форме уравнение циклоиды

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

и объявляется, что из него можно вывести все ее свойства. В заключение подчеркивается, что при записи интегралов «не следует опрометчиво пренебрегать» знаком дифференциала аргумента, что допустимо лишь, когда аргумент есть независимая переменная, дифференциал которой можно считать постоянным на всем участке интеграции; если же сохранить за dx «надлежащую универсальность», то «из одного этого вытекают бесчисленные равносильные преобразования фигур»[3].

Содержание статьи далеко не исчерпывается сказанным. Красной нитью в ней проходит мысль, что новые методы распространяются на бесчисленные трансцендентные величины, источником которых служат интегрирование и обратный метод касательных. В этом же мемуаре появился в печати термин «характеристический треугольник» применительно к треугольнику со сторонами dx, dy, ds, а также выражения «анализ бесконечных» (по образцу ньютонова «Анализа с помощью уравнений с бесконечным числом членов») и «исчисление бесконечно малых».

Как говорилось, интеграл был для Лейбница прежде всего суммой, соответствующей нашему определенному интегралу с переменным верхним пределом, т. е. суммой, представляющей собой и одну из первообразных функций. Нижний предел во многих случаях соответствовал началу координат, и при этом первообразная оказывалась равной нулю. Однако четкого различения между определенным и неопределенным интегралом, как общим выражением всех первообразных, еще не было, как не было самих этих терминов и названий для пределов интегрирования.

Еще несколько лет спустя, в работе «Дополнение измерительной геометрии или наиболее общее осуществление всех квадратур при помощи движения, а также многообразное построение линии по данному свойству касательных» (Supplementum geometriae dimensoriae, seugeneralissima omnium Tetragonismorum effectio per motum, similiterque multiplex

[1] *Г. В. Лейбниц*. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 173.
[2] Там же, стр. 176.
[3] Там же, стр. 177.

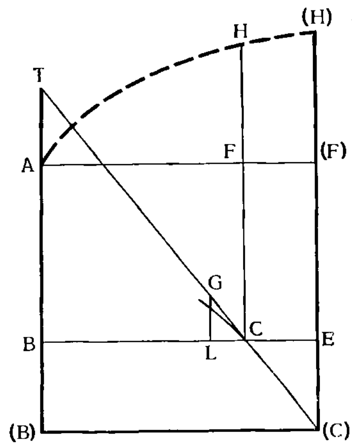


Рис. 45

constructio lineae ex data tangentium conditione, Acta Eruditorum, 1693) Лейбниц геометрически показал, что «общая задача квадратуры сводится к отысканию линии, обладающей определенным законом наклона» [1], т. е.

$$\int_0^x f(x)\,dx = F(x),$$

если

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

при этом неявно предполагается, что $F(0) = 0$ или же, что квадрируемая и квадрирующая кривые обе проходят через начало координат. Мы упоминаем об этой теореме, представляющей собой выраженную в терминах анализа теорему Барроу (см. стр. 212), с двоякой целью. Во-первых, в ней явно устанавливалась взаимозависимость не только между интегралом и дифференциалом, но и между интегралом и производной, как наклоном касательной, т. е. тангенсом угла, образуемого ею с осью абсцисс. Во-вторых, в ней впервые появляется в печати правило, выражающее нашу формулу вычисления определенного интеграла через разность значений первообразной функции (ср. сказанное ранее о Ньютоне, стр. 235).

Интерес данной работы заключается, впрочем, не только в этих теоремах интегрального исчисления, но и в описании механизма, вычерчивающего для данной кривой квадрирующую ее кривую. Мы коротко рассмотрим собственно математическую сторону дела. Пусть на рис. 45, как и у Лейбница, A есть начало координат, $AB = x$, $BC = y$, $FH = z$. Требуется квадрировать кривую $H\,(H)$, уравнение которой мы запишем $z = f(y)$. Вторая изображенная на рисунке кривая $C\,(C)$ с уравнением $x = F(y)$ такова, что отрезок $BT = t$, удовлетворяющий пропорции $t : y = z : a$ [2], есть ее подкасательная для точки $C\,(x, y)$; для простоты

[1] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 176.
[2] Постоянный отрезок a введен Лейбницем для однородности.

мы положим $a = 1$. Лейбниц утверждает, что кривая $C(C)$ есть квадрирующая для данной кривой $H\ (H)$ и что площадь $FH(H)(F)$ равна разности координат $(F)(C)$ и FC. В самом деле, поскольку $t : y = z$ и вместе с тем $t : y = dx : dy$ (характеристический треугольник изображен на рисунке!),

$$dx = zdy$$

и значит

$$x = \int zdy = \text{пл. } AFHA.$$

В наших обозначениях

$$dF(y) = f(y)\,dy \text{ и } F(y) = \int_0^b f(t)\,dt.$$

Если положить еще $AF = c$ и $A\ (F) = d$, то данное Лейбницем выражение квадрируемой площади $FH(H)F$ запишется формулой

$$\int_c^d f(y)\,dy = F(d) - F(c),$$

где

$$dF(y) = f(y)\,dy.$$

Не входя в технические детали прибора, описывающего кривую $C\ (C)$ по данному закону наклона касательной, заметим, что к изобретению этого первого в истории математики интегрирующего механизма, пригодного для любой графически заданной функции, Лейбниц пришел, отправляясь от задачи, поставленной около 1675 г. парижским врачом и архитектором Клодом Перро (1613—1688) [1]: определить кривую, описываемую на горизонтальной плоскости грузом, прикрепленным в конце нити, другой конец которой движется по данной прямой линии, т. е. кривую с постоянным отрезком касательной между точкой касания и данной прямой. Эту трансцендентную кривую исследовали также Гюйгенс (1693), называвший ее тракторией (лат. tractoria значит влекущая; теперь ее называют трактрисой) и еще ранее Ньютон.

В интегральном исчислении Лейбница, как и Ньютона, нашло место и общее понятие неопределенного интеграла. О нем Лейбниц говорит, хотя и мимоходом, но с полной ясностью, в статье «Подходящее построение задачи о парацентрической изохронной кривой» (Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica, Acta Eruditorum, 1694). Эта кривая обладает тем свойством, что разности высот падающего по ней тяжелого тела изменяются пропорционально времени. Здесь при переходе от дифференциального уравнения кривой к интегральному Лейбниц прибавляет на одной из сторон «произвольную постоянную величину» и замечает, что так надлежит поступать при интегрировании для общности решений, если это не исключается какими-либо условиями задачи. Тут же он добавляет, что при изменении постоянной интегрирования получается бесчисленное множество кривых, причем среди них,

---

[1] Братом автора знаменитых сказок — Шарля Перро.

насколько можно судить, всегда можно выбрать такую кривую, которая проходит через заданную точку, т. е. найти, как сказали бы мы, частное решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $x = x_0$, $y = y_0$. В это время Лейбницу приходилось и в других задачах — на огибающие — рассматривать семейства кривых, зависящие от параметра (ср. стр. 275).

Интегральное исчисление является источником бесконечного множества трансцендентных функций. Всеобщее средство их представления и исследования Лейбниц, подобно Ньютону, видел в бесконечных степенных рядах. Что интегрирование функций и дифференциальных уравнений не подчинено единому алгоритму, было доказано в XIX в. Основатели исчисления бесконечно малых и их последователи надеялись обеспечить его алгоритмичность с помощью бесконечных рядов, которые тем самым по своему значению становились на один уровень с понятиями дифференциала и интеграла. Наилучшим в практическом отношении Лейбниц считал при этом метод неопределенных коэффициентов. В статье «Дополнение практической Геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего Метода бесконечных рядов» (Supplementum Geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope novae Methodi generalissimae per series infinitas, Acta Eruditorum, 1693) он писал: «...бесконечные ряды можно получать удобнее и более общим образом (чем с помощью делений и извлечения корней.— *Ред.*), если принимать искомый ряд за уже найденный с тем, чтобы коэффициенты членов определять в дальнейшем. Таким образом, всегда можно прийти к ряду, когда свойство линии дано не только с помощью обыкновенного исчисления, но и в случае, когда оно дано сколь угодно сложным суммарным или дифференциальным или дифференцио-дифференциальным и т. д. уравнением. Искомое при этом в точности выражается рядом, если брать его целиком, и с любым приближением, если применять часть ряда»[1].

Для примера Лейбниц представил в форме рядов логарифмическую и показательную функции, отправляясь от дифференциального уравнения $dy = \frac{adx}{(a+x)}$ (и выражая в первом случае y рядом по x, а во втором x рядом по y), а также $x = a \sin \frac{y}{a}$, исходя из уравнения $a^2dy^2 = a^2dx^2 + x^2dy^2$, полученного с помощью характеристического треугольника.

В последнем случае он сразу берет x в форме ряда с одними нечетными степенями $x = by + cy^3 + ey^5 + \ldots$ и, чтобы избежать возведения в квадрат, дифференцирует уравнение $a^2dy^2 = a^2dx^2 + x^2dy^2$ при постоянном dy, что дает $a^2d^2x + xdy^2 = 0$. Тем самым Лейбниц впервые аналитически вывел частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, столь важного в теории колебаний (ср. стр. 226)[2].

В результате дифференциальное и интегральное исчисление представлялось своему творцу поистине универсальным аппаратом исследования функций.

О развитии понятия функции подробно говорилось ранее (стр. 144).

---

[1] *Г. В. Лейбниц*. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 177—178.

[2] Найдя рекуррентные формулы, выражающие коэффициенты, $c, e, \ldots$ через a и b, Лейбниц полагает $b = 1$ с тем, чтобы синус прямого угла был равен радиусу.

Влияние первых же статей Лейбница на современников оказалось бо́льшим, чем работ Ньютона по методу флюксий. На стороне Лейбница было уже то преимущество, что свое исчисление бесконечно малых он предал широкой гласности через печать. Но здесь имели значение и другие обстоятельства. Ньютон не оценил в полной мере той роли, которую предстояло сыграть в развитии математического анализа символике. Его знаки флюксий и флюент, предложенные к тому же с большим опозданием, в 90-е годы, оказались малоудачными, хотя в механике до сих пор иногда обозначают производные двух первых порядков с помощью точек. Тщательно продуманная символика Лейбница не только отображала, как он желал, сущность выраженных в ней понятий и операций, но и была гораздо более простой и удобной; позднее оказалось, что она великолепно подходит для многократного дифференцирования и интегрирования функций любого числа переменных. Указывая, что Ньютон применяет другие знаки, Лейбниц в 1694 г. с полным правом писал, что его собственные «символы открывают большую перспективу» [1]. Кроме того, Лейбниц более детально обработал всю оперативную сторону анализа как исчисления бесконечно малых различных порядков. То обстоятельство, что в изложении основ метода первых и последних отношений (в «Математических началах натуральной философии») применение бесконечно малых отступало на задний план, сыграло в ту эпоху на руку исчислению Лейбница. Еще в начале XIX в., когда Коши приступил к перестройке математического анализа на фундаменте новой теории пределов, он соединил ее с теорией бесконечно малых, подчеркивая, что имеет своей главной целью примирить научную строгость с «простотой, вытекающей из непосредственного рассмотрения бесконечно малых величин» [2]. Наконец, не следует забывать о персональном факторе: постоянной заботе Лейбница о пропаганде его идей и его столь же постоянной готовности к духовному общению со всеми желающими.

Впрочем, дифференциальное и интегральное исчисление было встречено с энтузиазмом не везде, не всеми и не сразу. Мы упоминали о сдержанной позиции, занятой в конце 70-х годов Чирнгаузом. Гюйгенс, весьма расположенный к Лейбницу, более внимательно познакомился с его статьями в «Acta Eruditorum» лишь в 1690 г. по настоятельной просьбе автора, после чего пришел к выводу, что в новой символике нет необходимости, как свидетельствует его, Гюйгенса, собственный опыт. Разъяснения Лейбница, которые теперь кажутся убедительными, не произвели впечатления на стареющего ученого, привыкшего к собственным методам; Гюйгенс признавал, что особенно его затрудняет идея дифференциалов высших порядков. В Англии некоторые приемы и символика Лейбница нашли было применение у одного из учеников Ньютона — Джона Крега (1660—1731) в малозначительных работах 1685—1708 гг., но вообще, вскоре после начала в 1699 г. спора о приоритете дифференциальному и интегральному исчислению дорога в Англию была закрыта надолго [3].

---

[1] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften, Bd. V, S. 306.

[2] *A. Cauchy.* Oeuvres complètes, Sér. 2, v. 4, Paris, 1899, p. 9.

[3] Что не мешало целому ряду английских математиков начала XVIII в. называть флюксиями бесконечно малые разности переменных величин, употреблять как синонимы флюксии и моменты и рассматривать кривые линии, как составленные из бесконечно большого числа бесконечно малых отрезков прямых.

Сам Крег впоследствии полностью отказался даже от упоминания о Лейбнице и его трудах [1]. В Парижской Академии наук господствовали картезианцы, раздраженные критической позицией Лейбница по отношению к всеобщей математике Декарта, и здесь идеи исчисления бесконечно малых хотя и укреплялись, но лишь в упорной борьбе. В Германии, если не считать Чирнгауза, вовсе не было крупных математиков, способных творчески усвоить идеи анализа бесконечно малых, и лишь в 10-х годах XVIII в. их начал излагать в своих руководствах X. Вольф.

Вначале Лейбниц нашел только единичных последователей, зато первыми из них оказались такие энергичные и высоко одаренные ученые, как швейцарцы Яков и Иоганн Бернулли. Познакомившись со статьями Лейбница и найдя в них трудные места, Я. Бернулли, тогда уже профессор в Базеле, письменно обратился в конце 1687 г. к Лейбницу за консультацией. Лейбниц, который находился вне Ганновера в длительной служебной поездке, получил письмо и ответил только через три года. Тем временем Я. Бернулли сам овладел дифференциальным и интегральным исчислением и приобщил к нему также Иоганна. Вскоре оба они вместе с Лейбницем образовали триумвират, который менее чем за два десятилетия чрезвычайно обогатил и распространил новый анализ.

И. Бернулли и его первые ученики

О жизненном пути Я. Бернулли уже говорилось. Его брата Иоганна (1667—1748), младшего на двенадцать лет, в семье сначала прочили по коммерческой части. Но юношу неодолимо тянуло к науке. После трех лет занятий в Базельском университете в 1682—1685 гг., завершившихся приобретением степени магистра искусств, он принялся по совету родных за изучение медицины, которая могла дать средства к существованию, а по личной склонности еще и за математику,—в этом им руководил брат Яков.

С осени 1691 г. И. Бернулли провел около года во Франции, где сблизился с парижским кругом ученых, который группировался около философа и физика Николая Мальбранша (1638—1715) [2] и наиболее видными членами которого были П. Вариньон и Г. Ф. Лопиталь. Картезианство в его философском и особенно физико-математическом аспектах было во Франции, как сказано, очень влиятельно. И. Бернулли сыграл решающую роль в приобщении названных ученых к анализу бесконечно малых и созданию французской ветви школы Лейбница. Лопиталь стал прямым учеником молодого швейцарца, который перед отъездом оставил ему рукопись целого курса дифференциального и интегрального исчисления, а затем с ноября 1692 г. вел с ним в течение десяти лет научную переписку. Этот курс И. Бернулли, бывший доступным и некоторым другим французским математикам, увидел свет не скоро,— почему, об этом будет сказано далее (стр. 284). Первыми были напечатаны в третьем томе сочине-

---

[1] Все же за Крегом остается та заслуга, что он первый обратил внимание на только что вышедший мемуар Лейбница.

[2] В философии Мальбранш пытался соединить идеалистические стороны учения Декарта с религиозными воззрениями Августина. Он отвергал возможность взаимодействия телесной и духовной субстанций и наблюдаемую связь телесных и духовных явлений объяснял постоянным посредничеством божественной силы. Идеалистическим было и учение Мальбранша о познании.

ний И. Бернулли (Opera omnia, Lausannae — Genevae, 1742) «Математические лекции о методе интегралов и других вопросах, написанные для маркиза Лопиталя» (Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque conscriptae in usum Marchionis Hospitalii); замечательные для конца XVII в., в середине XVIII в. эти лекции имели уже скорее исторический интерес. Что касается «Лекций по исчислению дифференциалов» (Lectiones de calculo differentialium), то они были обнаружены среди рукописей Базельской университетской библиотеки уже в нашем столетии и изданы в 1922 г. Несмотря на такую судьбу, этот первый учебный курс дифференциального и интегрального исчисления, прочитанный одному-единственному слушателю, имел большое значение в дальнейшем прогрессе анализа.

С 1691 г. начали появляться в печати математические работы И. Бернулли частью в «Acta Eruditorum», частью в «Journal des Sçavans», к сотрудничеству в котором его привлек Вариньон и в котором участвовали Лопиталь, иногда Лейбниц и Я. Бернулли. Добавим, что оба брата Бернулли были выбраны в 1699 г. иностранными членами Парижской академии.

В 1692 г. И. Бернулли вернулся в Базель. Участие в решении нескольких важных задач и постановка новых делает его имя известным математикам; в 1693 г. начинается его интенсивная переписка с Лейбницем, сыгравшая большую роль в творчестве обоих корреспондентов. Все же, не имея возможности жить и содержать семью с помощью математики (он женился в 1694 г.), И. Бернулли продолжал занятия медицинскими науками и в том же 1694 г. защитил докторскую диссертацию на тему о движении мускулов (Dissertatio de motu musculorum, Basileae) [1]. К счастью, благодаря содействию Гюйгенса, ему удалось в 1695 г. получить профессуру по физике в университете в Гронингене (Голландия). В 1705 г. он окончательно возвратился в Базель, где первоначально занял в университете место профессора греческого языка (!), но вскоре, после смерти брата, перешел на кафедру математики, которую и занимал до кончины.

Яков и Иоганн Бернулли внесли в анализ бесконечно малых вклад непреходящего значения. Быть может, старший брат, несколько более медлительный, отличался большей оригинальностью и глубиной идей, между тем как младший, все схватывавший на лету, был исключительно силен в разработке алгоритмических, оперативных приемов. В течение десяти лет, до смерти Якова, братья успешно соревновались между собой и с другими учеными в постановке и решении новых и новых задач дифференциального и интегрального исчисления, в его приложениях к геометрии и механике, а также в методах решения дифференциальных уравнений и вариационных проблем. К сожалению, это соревнование быстро перешло в резкие конфликты и публичные ссоры, отравлявшие обоим существование и по существу столь же неосновательные, как и более громкий спор о приоритете между Ньютоном и Лейбницем.

Помимо выдающихся научных достижений, обоим братьям, особенно младшему, который и дольше прожил и обладал большим педагогическим даром, принадлежит заслуга подготовки новых поколений ученых, про-

---

[1] Биомеханике, примыкавшей к декартовой трактовке телесной деятельности организмов как машин, положил начало труд о движении животных (1680—1681) Дж.-А. Борелли (ср. стр. 15). Бернулли впервые применил в этой области методы нового анализа.

Иоганн Бернулли

должививших начатое Лейбницем дело. Воспитанниками Я. Бернулли были, не считая Иоганна, их племянник Николай I Бернулли и Я. Герман, учениками И. Бернулли — Лопиталь, отчасти Вариньон, собственные сыновья Николай II и Даниил Бернулли, Г. Крамер и величайший математик XVIII в. Л. Эйлер.

Скажем несколько слов о Лопитале и Вариньоне.

Маркиз Гильом Франсуа Антуан де Лопиталь (1661—1704), начавший по желанию отца, генерал-лейтенанта французских войск, с военной карьеры, отказался от нее из-за близорукости, да и по призванию к математике, которое проявилось с детства. Знакомство с Мальбраншем, завязанное по инициативе Лопиталя, позволило ему установить широкие научные связи. Его первая проба сил — новое доказательство одного результата Гюйгенса в теории колебаний маятника — обратила на себя внимание Гюйгенса и Лейбница. С помощью И. Бернулли, как говорилось, Лопиталь в 1691—1692 гг. овладел исчислением бесконечно малых, и овладел мастерски. Он продемонстрировал свое дарование в решении, наряду с другими учеными, целого ряда частных задач математики и механики,— таких, например, как спрямление логарифмической кривой, задан-

Гильом Франсуа Лопиталь
(с гравюры Г. Эделинка, выполненной около 1695 г. по портрету Фуше. Хранится в Национальной библиотеке в Париже)

ной условием $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{x}$ (1692)[1], или гораздо более трудная проблема о брахистохроне, т. е. кривой, по которой тяжелая точка спускается из одной точки в другую, не лежащую на той же вертикали, в кратчайшее время (1697). Нам еще придется говорить о некоторых открытиях Лопиталя в дифференциальной геометрии. Но главной заслугой его было создание — при участии И. Бернулли — первого печатного курса дифференциального исчисления — «Анализа бесконечно малых для исследования кривых линий» (Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, Paris, 1696), быстро получившего международное распространение. И к этой книге нам придется вернуться.

В 1693 г. Лопиталь был избран членом Парижской академии наук и дважды состоял ее вице-президентом. Уже после его смерти был издан другой его труд — по аналитической геометрии: «Аналитический трактат

[1] Лопиталь не знал, что вопрос этот решил еще Дж. Грегори в письмах к Коллинсу 1670—1671 гг.

о конических сечениях» (Traité analytique des sections coniques, Paris, 1707).

Друг Лопиталя Пьер Вариньон (1654—1722), с 1688 г. бывший членом Парижской академии и профессором математики в Коллеже четырех наций, а с 1704 г. в Коллеж де Франс, в большей мере был механиком, чем математиком, и в исчислении бесконечно малых видел прежде всего аппарат механики. Но и ему принадлежат большие заслуги в распространении анализа, особенно в успешной борьбе как внутри Парижской академии наук, так и вне нее с картезианцами, в частности с М. Роллем (см. стр. 282). В 1715 г. он поместил в «Acta Eruditorum» интересную статью по теории рядов, в которой выступил решительным сторонником применения только сходящихся рядов. К курсу дифференциального исчисления Лопиталя Вариньон написал обширный комментарий, опубликованный посмертно, «Пояснения к анализу бесконечно малых» (Eclaircissements sur l'analyse des infiniment petits, Paris, 1725).

Дальнейшая разработка анализа

В мае 1690 г. Я. Бернулли выступил в «Acta Eruditorum» со своей первой работой по исчислению бесконечно малых. В ней содержалось решение поставленной в 1687 г. Лейбницем задачи о форме кривой, по которой тяжелая точка опускается за равные промежутки времени на равные вертикальные отрезки. Что эта линия (парацентрическая изохрона; стр. 264) есть полукубическая парабола, тотчас установили сам Лейбниц и Гюйгенс, но лишь Я. Бернулли опубликовал доказательство средствами нового анализа, выведя и проинтегрировав дифференциальное уравнение искомой кривой $\sqrt{b^2y-a^3}\,dy=\sqrt[3]{a^3}\,dx$. При этом и появился в печати термин «интеграл». Из приведенного уравнения, писал Бернулли, следует, что равны и интегралы (integralia) этих выражений

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y-a^3}=\sqrt[3]{a^3}x.$$

В конце статьи Я. Бернулли поставил вопрос о кривой, по которой располагается под действием тяжести однородная гибкая нить, подвешенная за два неподвижных конца. Вопрос ожидал решения более пятидесяти лет. Еще А. Жирар в своем издании сочинений Стевина (1634) заявил, что такая нить принимает форму параболы. Галилей дважды упомянул задачу в «Беседах и математических доказательствах» (1638), причем во втором случае отметил, что кривая не является параболой, хотя и близка к ней. Отличие цепной линии от параболы еще ранее установил И. Юнг (1627) и затем обосновал юный Гюйгенс, одновременно (1646) доказавший, что форму параболы имеет подвешенная за два конца нить, на которую действует нагрузка, равномерно распределенная вдоль горизонтали,— это утверждение высказал ранее И. Бекман. В ответ на статью Я. Бернулли в июньском выпуске «Acta Eruditorum» за 1691 г. появились решения задачи, найденные Лейбницем, Гюйгенсом и И. Бернулли. Лейбниц привел заодно построение касательной, спрямление, определение центра тяжести кривой, а также нашел объем и поверхность ее тела вращения. Статья И. Бернулли явилась его первым печатным трудом по математике; впрочем, подробное изложение своего решения он дал только в лекциях по интегральному исчислению 1691—1692 гг., изданных в 1742 г. (см. стр. 267). Заметим, что ни один из названных авторов не написал привычное нам уравнение цепной линии, так как еще не имели обозначения для показательной функции. Но геометрическое построение ординат цепной линии по ординатам двух «логарифмических» кривых, симметричных относительно оси ординат, которое приводит, например, Лейбниц, в точности соответствует уравнению

$$y = a\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

С этого времени начинается регулярное сотрудничество Лейбница с братьями Бернулли, особенно с младшим из них, и многие открытия совершаются теперь ими в ходе интенсивного обмена мнений и почти в одно время.

Существенным обогащением нового исчисления явилось вычисление дифференциала общей показательной функции. На этот пробел в системе приемов дифференцирования указал в 1694 г. один из первых критиков исчисления бесконечно малых голландский врач Бернгард Ниaентейт (1654—1718). В своем «Ответе на некоторые затруднения, выдвинутые г. Бернгардом Ниaентейтом против дифференциального или инфинитезимального метода» (Responsio ad nonnulas difficultates a dn. Bernardo Nieuwentijt circa Methodum differentialem seu infinitesimalem motas, Acta Eruditorum, 1695) Лейбниц восполнил этот пробел с помощью логарифмического дифференцирования величины u^v, которую назвал показательной. К тому же результату независимо пришел И. Бернулли (Acta Eruditorum, март 1697). Попутно И. Бернулли вывел изящное разложение в ряд, весьма заинтересовавшее Лейбница,

$$\int_0^1 x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots.$$

В то же время Лейбниц пришел к замечательной мысли — формально объединить операторы интегрирования и дифференцирования, рассматривая $\int$ как d^{-1} и вообще повторные интегралы, как дифференциалы с отрицательными индексами; следуя этому пути, он тут же сделал еще один смелый шаг вперед — ввел дифференциалы дробных порядков. Эти идеи были непосредственно связаны с открытием формулы многократного дифференцирования произведения двух или более функций, в которой Лейбниц усмотрел аналогию с формулой степени двучлена. Эта аналогия очевидна, если записать формулу бинома при натуральном n с помощью оператора $p^n u \equiv u^n$:

$$p^n(x+y) = p^n x p^0 y + \frac{n}{1!}p^{n-1}xp^1y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^{n-2}x\cdot p^2y + \ldots =$$
$$= x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \ldots,$$

а соответствующий ему дифференциал в виде

$$d^n(xy) = d^n x\,d^0 y + \frac{n}{1}d^{n-1}x\,d^1 y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^{n-2}x\,d^2 y + \ldots,$$

где $d^0 y = y$. Используя бесконечный биномиальный ряд, Лейбниц распространил замеченную аналогию на отрицательные n, понимая под d^{-n} повторный интеграл, обозначенный им $\int^n$, а также на дробные значения n. Для вычисления дифференциалов дробного порядка он в сущности применил формулу дифференцирования показательной функции, приняв, что $d^n e^{mx} = m^n e^{mx} (dx)^n$ для всех n. Эти открытия и их приложения Лейбниц изложил прежде всего в письмах к И. Бернулли 1695 г. Знакомя с ними в письме от 30 сентября 1695 г. Лопиталя, Лейбниц в заключение писал: «Из этих парадоксов, по-видимому, когда-либо извлекут весьма полезные следствия, ибо бесполезных парадоксов не существует» [1].

Впрочем, сам Лейбниц опубликовал только формулу дифференциала n-го порядка для произведения функций при натуральном n, и то через пятнадцать лет, в статье «Замечательный символизм алгебраического исчисления и исчисления бесконечно малых при сравнении степеней и разностей и о трансцендентном законе однородности» (Symbolismus memorabilis Calculi Algebraici et Infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum... Miscellanea Berolinensia, 1710). Соответствующие его письма к И. Бернулли были напечатаны в 1745 г. Впоследствии теорией дифференцирования с произвольным индексом занимались многие ученые, в том числе Л. Эйлер, Ж. Лиувилль, Б. Риман, А. В. Летников, Г. Вейль и другие; при этом были предложены обобщения, отличные от первоначального. Парадоксальная мысль Лейбница оказалась весьма плодотворной, и к ней, в частности, восходит символическое или операционное исчисление, получившее столь широкие применения в решении дифференциальных уравнений.

Трансцендентным законом однородности, фигурирующим в заглавии только что упомянутой статьи, Лейбниц называл то свойство дифференциальных многочленов, что их члены оказываются в конце концов однородными по отношению к порядкам входящих в них дифференциалов, т.е. в каждом члене сумма индексов этих порядков одна и та же. Название закона напоминало об алгебраическом принципе однородности, о котором мы говорили ранее, например, в связи с алгеброй Виета и Декарта.

Продолжая исследования Лейбница о применении бесконечных рядов к интегрированию (1693), И. Бернулли открыл новую, весьма общую форму разложения в ряд интеграла функции $n(z)$ по степеням аргумента, в которой коэффициенты выражены непосредственно через производные этой функции:

$$\int n\,dz = nz - \frac{z^2}{1\cdot 2}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2n}{dz^2} - \ldots$$

(Acta Eruditorum, ноябрь 1694). Он вывел этот ряд, попарно группируя и затем почленно интегрируя очевидное в его глазах тождество

$$n\,dz = n\,dz + z\,dn - zdn - \frac{z^2 d^2n}{1\cdot 2\,dz} + \frac{z^2 d^2n}{1\cdot 2\cdot dz} + \ldots$$

Свой ряд Бернулли сам характеризовал как наиболее универсальный. Еще ранее пришел к тому же результату Лейбниц, не опубликовавший, однако, своего открытия. Ряд Бернулли тесно связан с рядом Тейлора

---

[1] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 182.

и может быть получен из разложения

$$f(z+h)=f(z)+\frac{hf'(z)}{1}+\frac{h^2f''(z)}{1\cdot 2}+\frac{h^3f'''(z)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

если в нем заменить h на $-z$ и затем обозначить $f'_1(z)=n(z)$. При этом

$$f(z)-f(0)=\int_0^z n\,dz=zn(z)-\frac{z^2}{1\cdot 2}n'(z)+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}n''(z)-\ldots$$

Все же ни И. Бернулли, ни Лейбниц не записали ряд Тейлора в его обычной форме [1].

Многочисленны были приложения дифференциального исчисления к геометрии. В статье о «Новом методе» (1684) содержались только самые первые начала дифференциально-геометрического исследования кривых (касательные, экстремумы, выпуклость и вогнутость, точки перегиба). Два года спустя Лейбниц, исходя из рассмотрения роговидных углов между данной кривой и соприкасающимися с ней линиями, заложил основы учения о соприкосновениях высших порядков. Этому вопросу он посвятил статью «Новое размышление о природе угла касания и соприкосновения и об их применении в математической практике для замены более сложных фигур более простыми» (Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas, Acta Eruditorum, 1686). Угол касания — это «наименьший» роговидный угол между данной кривой и касательной, угол соприкосновения — «наименьший» роговидный угол данной кривой с другой кривой, и прежде всего с окружностью. Лейбниц определил соприкасающийся круг (наш круг кривизны) как тот из кругов, касающихся линии со стороны ее вогнутости в данной точке, между которым и кривой в этой точке нельзя провести никакой иной дуги окружности. Практическую пользу новой теории Лейбниц видел в том, что она дает средство с высокой степенью точности заменять дугами более простых линий не слишком большие дуги более сложных кривых, действительное проведение которых затруднительно. Роговидные углы Лейбниц разделял на порядки в соответствии с порядком соприкосновения и рассматривал их как актуально бесконечно малые величины. При подходящем определении меры роговидного угла можно образовать систему актуально бесконечно малых углов различных порядков, не сравнимых в смысле Архимеда и Евклида (см. т. I, стр. 96). Но введенные Лейбницем понятия можно сформулировать и на языке современной теории соприкосновения в рамках классического архимедова анализа. Мы говорили ранее о дискуссиях ученых Средних веков и начала Нового времени относительно природы угла касания; Лейбниц писал, что теперь этот спор, казавшийся большинству пустым, приводит к прочным и многообещающим истинам.

Однако Лейбниц не дал аналитической теории соприкосновения кривых и ошибочно полагал, что соприкасающийся круг проходит через четыре бесконечно близкие точки кривой [2]. Эту неточность — таких точек, вообще говоря, три — исправил Я. Бернулли (Acta Eruditorum, март 1692),

---

[1] В сочинении Б. Тейлора, в котором приведено разложение, носящее его имя (1715), ряд Бернулли — Лейбница имеется (см. т. III, гл. 7).

[2] Ньютон в «Методе флюксий» этой ошибки не допустил. Аналогичный промах Лейбниц сделал при определении касаний высших порядков.

выразивший затем радиус кривизны в виде ds^3/dyd^2x, где y — абсцисса и x — ордината (Acta Eruditorum, июнь 1694). Обычное теперь выражение радиуса кривизны в декартовых координатах вывел двумя годами ранее И. Бернулли в своих лекциях по интегральному исчислению, но они, как было сказано, увидели свет полвека спустя. Одновременно братья Бернулли и Лопиталь изучали различные свойства эволют и эвольвент. В частности, в переписке между И. Бернулли и Лопиталем был подвергнут разбору вопрос о значениях, принимаемых радиусом кривизны в точках перегиба, причем Лопиталь обнаружил, что точке перегиба эволюты соответствует на эвольвенте точка возврата второго рода, т. е. острие, в котором обе ветви кривой обращены вогнутостью в одну сторону (письмо от мая 1694 г.). Упомянем, что в письме от 22 июля 1694 г. И. Бернулли в ответ на вопрос Лопиталя привел известное правило раскрытия значения неопределенностей вида 0/0 (мы говорим теперь о предельном значении дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к 0) посредством дифференцирования по отдельности числителя и знаменателя. Своему правилу Бернулли сообщил очень простое геометрическое доказательство. Оба только что названных результата были включены в учебник дифференциального исчисления Лопиталя (1696)[1].

В статье «О линии, образованной бесконечным числом проведенных по порядку и встречающихся между собою линий, и всех их касающейся» (De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, Acta Eruditorum, 1692) Лейбниц ввел общее понятие огибающей однопараметрического семейства кривых и сообщил, как находить уравнение огибающей с помощью дифференцирования уравнения семейства по параметру.

Наряду со всем этим изучались многочисленные более частные задачи геометрии и механики, некоторые из них уже упоминались. Несмотря на преимущественный интерес, который представляли для Лейбница общие методы, он постоянно имел в виду их конкретные приложения в естествознании и практической деятельности. В одной статье о цепной линии, помещенной в «Journal des Sçavans» за 1692 г., он писал, что применил свое исчисление «к ряду геометрически-физических задач; например к изохронной линии, опускаясь по которой тяжелое тело равномерно приближается к горизонту; к локсодроме или линии румбов ветра, для решения полезнейших геометрических задач мореплавания, которые до сих пор удавалось решать лишь несовершенным образом с помощью некоторых вспомогательных таблиц; к сопротивлению твердых или жидких тел для прогресса механики и, в частности, баллистики; к гармоническим законам планетных движений для усовершенствования астрономии; и к другим важным вопросам»[2]. Решение таких частных задач имело, однако, отнюдь не только частный интерес; нередко с ним было связано создание больших разделов анализа, например, как мы сейчас увидим, теории эллиптических интегралов.

Среди работ братьев Бернулли упомянем прежде всего изящное исследование Я. Бернулли различных свойств логарифмической спирали[3], эволюта и каустика которой, как он обнаружил, также являются логариф-

---

[1] Причем авторское право И. Бернулли на только что указанное правило указано не было, так что оно до сих пор нередко называется по имени Лопиталя (ср. стр. 284).
[2] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 166.
[3] Я. Бернулли заинтересовался этой кривой, познакомившись с письмом Декарта Мерсенну от 12 сентября 1638 г., опубликованным в 1657 г. (ср. стр. 163).

мической спиралью (Acta Eruditorum, июнь 1691 и май 1692). Это свойство столь поразило Я. Бернулли, что он завещал изобразить на своем надгробии такую спираль с подписью: eadem mutata resurgo, т. е. «измененная, я возрождаюсь прежней» [1]. Большое значение имело произведенное им спрямление параболической спирали $(a - \rho)^2 = b\varphi$, приведшее к эллиптическому интегралу. При этом Я. Бернулли установил равенство некоторых определенных дуг спирали, длину которой не мог выразить в известных ему функциях (Acta Eruditorum, январь 1691). Отправляясь от этого наблюдения, И. Бернулли пришел к постановке важного в теории эллиптических интегралов вопроса о разыскании кривых со спрямляемой суммой или разностью дуг (Acta Eruditorum, октябрь 1698). К эллиптическим интегралам Я. Бернулли вновь пришел при изучении упругой кривой, форму которой получает заделанная одним концом в стене упругая пластинка под действием силы, приложенной к другому концу; здесь и понадобилось ему выражение для радиуса кривизны, через который выражается изгибающий момент (Acta Eruditorum, июнь 1694). Возникающие в ходе исследования интегралы с постоянными пределами Я. Бернулли выразил с помощью числовых рядов:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13} + \ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15} + \ldots.$$

Впоследствии упругие кривые явились специальным предметом изысканий Д. Бернулли и Л. Эйлера. К тому же кругу проблем относится и исследование введенной Я. Бернулли кривой четвертого порядка — лемнискаты (Acta Eruditorum, сентябрь 1694).

Значительные успехи были достигнуты в технике интегрирования. Главный результат был получен Лейбницем и И. Бернулли, открывшими прием интегрирования рациональных дробей посредством их представления (после выделения целой части), как сумм простейших дробей. В своих двух статьях «Новый пример анализа для науки о бесконечном, относящийся к суммам и квадратурам» и «Продолжение анализа рациональных квадратур» (Specimen novum analyseos pro Scientia infiniti circa summas et quadraturas; Continuatio analyseos quadraturarum rationalium, Acta Eruditorum, 1702—1703) Лейбниц показал, как поступить в случае различных и кратных действительных кратных корней, но допустил ошибку в случае комплексных корней. Мы уже отмечали, что он по недосмотру упустил возможность разложения двучлена $x^4 + a^4$ на действительные квадратичные множители и далее на линейные множители вида $x \pm (a + bi)$ (стр. 38). Это в свою очередь привело его к ошибочному заключению, будто алгебраический многочлен с действительными коэффициентами неразложим, вообще говоря, в произведение линейных и квадратичных действительных множителей. Отсюда следовало, что интеграл рациональной дроби не выражается, помимо его рациональной части, в од-

[1] Однако мастер вытесал фактически, как видно на фотографии, линию, похожую на спираль Архимеда.

них только логарифмах и круговых функциях или, как выражался еще Лейбниц, не сводится к квадратуре гиперболы и круга.

И. Бернулли в работе «Решение одной задачи интегрального исчисления» (Solution d'un problème concernant le calcul intégral), напечатанной в «Mémoires» Парижской академии наук за 1702 г. (1704) и в извлечении в «Acta Eruditorum» за 1703 г., ограничился еще случаем действительных различных корней. В отличие от Лейбница, приведшего готовые формулы разложения, он показал, как вычислять их коэффициенты, предполагаемые сначала неопределенными. В этой же статье И. Бернулли вплотную подошел к изучению связи между круговыми и логарифмической функциями в комплексной области. Этот вопрос, как и последовавшую в 1712—1713 гг. полемику И. Бернулли с Лейбницем о природе логарифмов отрицательных чисел, мы осветим в следующем томе. Пока отметим лишь, что в письмах к Лейбницу 1702 г. И. Бернулли совершенно правильно указал на интегрируемость рациональных функций в рациональных,

Надгробие Я. Бернулли в Базельском соборе

круговых и логарифмических функциях и что в «Acta Eruditorum» за 1719 г. он со всей полнотой разобрал случай, когда знаменатель содержит квадратичные множители в какой-либо степени.

Интегрированию рациональных дробей Лейбниц придавал тем большее значение, что надеялся свести к нему интегрирование любых иррациональностей. В этой связи он подчеркивал важность дальнейшей разработки диофантовой алгебры, имея в виду методы приведения иррациональных выражений к рациональным [1].

Обыкновенные дифференциальные уравнения

В интегрировании функций школа Лейбница выдвигала на первый план сведение более сложных квадратур к более простым, подготовляя почву для подстановки вопроса об интегрируемости в элементарных функциях. В интегрировании дифференциальных уравнений соответственно выдвигалась задача сведения их к квадратурам. Исследование этой задачи, очевидно, требовало классификации уравнений, которая не интересовала Ньютона, удовлетворявшегося решениями в форме бесконечного ряда (см. стр. 246). Проблему решения дифференциальных уравнений любого порядка в квадратурах Лейбниц четко сформулировал в начале первой из статей об интегрировании рациональных дробей, но работа в этом направлении велась с начала 90-х годов. С этой целью искали приемы, преобразующие данное уравнение в уравнение с разделенными переменными.

Одним из первых было решено однородное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

с помощью подстановки $y = xt$. Этот прием изложен в уже упоминавшихся «Математических лекциях о методе интегралов и о других вопросах», которые И. Бернулли составил в 1691—1692 гг.; такой же прием был известен Лейбницу. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

И. Бернулли в тех же «Лекциях» свел к однородному подстановками $x = \xi + \alpha$ и $y = \eta + \beta$; впрочем случай $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ он не упомянул. В «Лекциях» встречается и первое применение интегрирующего множителя, именно к уравнению $axdy - ydx = 0$. Умножая на y^{a-1}/x^2, Бернулли получал $d\,(y^a/x) = 0$ и $y^a = bx$. Непосредственным разделением переменных Бернулли здесь не воспользовался, так как в то время в соответствии с общим правилом

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

принимал $\int\frac{dx}{x}=\infty$ (что соответствует интегрированию при нижнем пределе, равном нулю); впрочем в одном месте тех же «Лекций» он указал, что кривая $\int\frac{dx}{x}$ есть логарифмическая, и впоследствии выражал

[1] Ньютон в «Трактате о квадратуре кривых» также коснулся вопроса об интегрировании рациональных функций, но подробного изложения вопроса не дал.

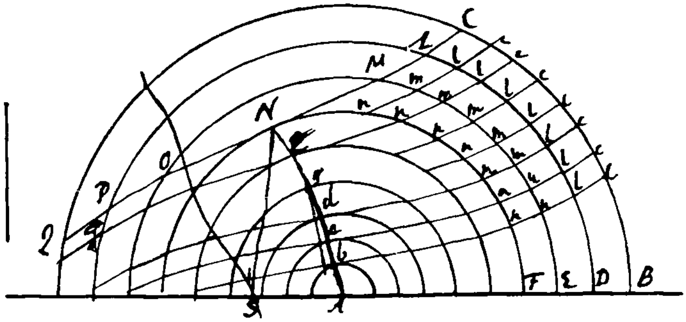


Рис. 49

такой интеграл через $\ln x$ (что соответствует интегрированию при нижнем пределе, равном единице). Позднее (около 1700 г.) И. Бернулли применил интегрирующий множитель вида x^p для последовательного понижения порядка линейного уравнения

$$Qx^n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + Ax \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

которое теперь часто называют по Эйлеру. Метод множителей получил широкое развитие в XVIII в.

В 1694 г. И. Бернулли выступил в «Acta Eruditorum» со статьей «Общий способ построения всех дифференциальных уравнений первого порядка» (Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus). Здесь появились выражения «порядок» (gradus) уравнения и «разделение» (separatio) переменных — последним термином И. Бернулли пользовался еще в своих «Лекциях». Выражая сомнение в сводимости любого уравнения к виду с разделяющимися переменными, И. Бернулли предлагает для уравнений первого порядка $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ общий прием построения всех интегральных кривых при помощи изоклин в определяемом уравнением поле направлений. Изоклины (И. Бернулли называет их директрисами) вводятся как линии $f(x, y, k) = 0$, в точках которых искомые интегральные кривые имеют касательные с одним и тем же наклоном k. Каждая интегральная кривая образуется из смыкающихся бесконечно малых прямых отрезков, проводимых соответственно наклону в данной точке от одной изоклины к другой, соседней. Из самого характера построения делается заключение о существовании бесконечного множества интегральных кривых. Особо рассмотрен вопрос об уравнении кривой точек перегиба интегральных кривых. Все это поясняется на двух примерах, один из которых $x^2dx + y^2dx = a^2dy$ встречается и в руководствах нашего времени. В заключение автор писал, что предложенная идея может быть распространена на уравнения второго и высших порядков.

Рассуждения И. Бернулли в данной статье напоминают своего рода геометрическое доказательство существования непрерывных интегральных кривых данного дифференциального уравнения, возникающих, когда сомкнутся стягивающиеся в точки отрезки прямых. Но Бернулли имел в виду и приближенное вычерчивание интегральных кривых, как это видно из его письма к Лопиталю от декабря 1694 г., где он приводит и чертеж, на котором для уравнения $x^2dx + y^2dx = a^2dy$ изображены изоклины $x^2 + y^2 = k^2$, несколько интегральных кривых и пересекающая их линия точек перегиба AN с уравнением $y^3 + x^2y = a^2x$ (рис. 49). Разобрав этот пример, И. Бернулли здесь писал: «Таков мой метод, найденный мною для общего построения дифференциальных уравнений; он может быть широко применен на практике, если довольствоваться механическим построением, ибо чем больше нанести близких друг к другу директрис, тем более подойдут к истинной искомой кривой» [1]. Одним из достоинств такого геометрического построения Бернулли считал и то обстоятельство, что он позволяет обойтись не только без разделения переменных, чаще всего невозможного, но также в тех случаях, когда разделение возможно, без квадратур, из-за которых аналитическое решение нередко бывает практически неосуществимым. В последующем для приближенного решения дифференциальных уравнений долгое время применялись исключительно аналитические методы. Прикладное значение метод изоклин получил лишь в последней четверти XIX в., в первую очередь благодаря профессору Гентского университета Ж. Массо, которому, по-видимому, принадлежит и термин «изоклина», т. е. равнонаклонная.

До конца XVII в. были решены в квадратурах еще два класса дифференциальных уравнений. Лейбниц в письме к Лопиталю от 6 января 1695 г. привел линейное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$ к виду с разделенными переменными, представив искомое решение в виде произведения двух функций: $y = u \cdot v$. В 1695 г. Я. Бернулли поставил задачу о решении уравнения $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n$. Это «уравнение Бернулли», помимо него самого, решили Лейбниц, указавший, что оно сводится к линейному (Acta Eruditorum, март 1696), и И. Бернулли, предложивший — сначала в письме к Лейбницу от 4 сентября 1696 г.— замену $y^{1-n} = z$, преобразующую уравнение в линейное (Acta Eruditorum, март 1697). Упомянем еще, что в «Acta Eruditorum» за 1697 г. И. Бернулли поставил интересовавшую его с 1694 г. задачу о траекториях, т. е. кривых, пересекающих данное плоское однопараметрическое семейство линий под данным углом, указав на ее возможные применения в теории света Гюйгенса. В следующем году И. Бернулли в том же журнале показал, как эта задача сводится к дифференциальному уравнению первого порядка. Этот же результат был получен Лейбницем (в переписке с И. Бернулли) [2], а Я. Бернулли определил ортогональные траектории логарифмических кривых (Acta Eruditorum,

---

[1] Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Bd. I. Basel, 1955, S. 249.

В это же время Я. Бернулли свел уравнение $y' = x^2 + y^2$ подстановкой $y = -z'/z$ к линейному $z'' + x^2z = 0$, нашел z в форме степенного ряда, представил y (при условии $x = 0$, $y = 0$) отношением

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3\cdot4\cdot7} + \frac{x^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11} - \ldots\right) : \left(1 - \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8} - \frac{x^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12} + \ldots\right)$$

и затем, после деления, степенным рядом. Свои результаты он письменно сообщил Лейбницу в 1702—1703 гг. (опубл. 1744).

[2] Впрочем, только для ортогональных траекторий (путем замены в их дифференциальном уравнении $\frac{dy}{dx}$ на $-\frac{dx}{dy}$).

май 1698). Позднее задача о траекториях и ее обобщения неоднократно привлекали внимание математиков.

Если к сказанному добавить, что, судя по одному письму к Лейбницу, И. Бернулли в 1694 г. проинтегрировал уравнение $y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$, называемое обычно по имени либо Даламбера, либо Лагранжа, то результаты в решении обыкновенных дифференциальных уравнений посредством квадратур, достигнутые менее чем за десять лет, представляются внушительными. В недрах исчисления бесконечно малых созревала новая дисциплина — теория дифференциальных уравнений.

Лейбниц и основания исчисления бесконечно малых

Подобно Ньютону, и Лейбниц уделил большое внимание проблеме обоснования дифференциального и интегрального исчисления. Уже в главном своем мемуаре 1684 г. Лейбниц попытался заранее отвести возможную критику, определив дифференциалы аргумента и функции как некоторые конечные отрезки. Однако — об этом тоже говорилось — он здесь же применил бесконечно малые величины, а в дальнейшем неизменно трактовал дифференциалы как бесконечно малые приращения.

Но что такое бесконечно малые величины? В разное время Лейбниц отвечал на этот вопрос по-разному. Чтобы разрешить собственные сомнения и ответить на возражения извне, он предложил несколько концепций, различных по существу и по историческому значению. Так, в «Опыте о причинах движений небесных тел» (Tentamen de motuum coelestium causis, Acta Eruditorum, 1689) он выдвинул понятие о бесконечно малых как несравнимых величинах и им же воспользовался при разборе критических замечаний, выдвинутых упоминавшимся голландским ученым Б. Нивентейтом в двух работах 1694—1695 гг. Нивентейт считал неправомерными равенства вроде $a + dx = a$, ибо в случае равенства двух величин их разность должна быть нулем, а бесконечно малая считается отличной от нуля. Особенно возражал Нивентейт против бесконечно малых высших порядков, так как величины, которые при умножении на бесконечное число не дают в произведении обыкновенных величин, суть ничто. «Я,— отвечал в 1695 г. Лейбниц,— принимаю равными не только те величины, разность которых есть совершенное ничто, но и те, разность которых несравнимо мала» [1] (т. е. которые не удовлетворяют так называемой аксиоме Архимеда),— это упрощает и сокращает выводы, а «результат всегда можно подтвердить по способу Архимеда посредством приведения к нелепости» [2]. Что касается другого возражения Нивентейта, то Лейбниц пояснял, что произведение бесконечно малых высших порядков на бесконечно большие соответствующих порядков может быть величиной, отличной от нуля.

Однако Лейбниц не пытался построить исчисление актуально бесконечно малых неархимедовых величин, и мы знаем теперь, что такое исчисление не может служить основой классического анализа [3].

---

[1] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 189.
[2] Там же, стр. 189.
[3] Следует, впрочем, сказать, что исчисление актуальных неархимедовых величин может быть положено в основу так называемого нестандартного анализа. См. *A. Robinson.* Non-standard analysis. Amsterdam, 1966; The metaphysics of the calculus. Problems Philos. Math., Amsterdam, 1967, p. 28—40.

Вместе с тем несравнимость инфинитезимальных величин Лейбниц иллюстрировал аналогией, в которой они выступали просто как весьма малые или большие друг относительно друга конечные величины. «Когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых,— писал он в одной заметке 1701 г.,— то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считается точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с полудиаметром земного шара,— так что расстояние от неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика» [1]. Такие примеры вызывали недоумения даже в собственной школе Лейбница, например у П. Вариньона, который в то время вел борьбу с парижскими картезианцами, в частности алгебраистом М. Роллем, заявлявшим, что «характер точности не господствует больше в геометрии с тех пор, как к ней примешали новую систему бесконечно малых» [2]. Главное возражение Ролля, как и Ниментейта, заключалось в том, что из равенства $a + dx = a$ следует $dx = 0$, ибо нуль и определяется равенством $a + 0 = 0$.

Заметим, немного отступая в сторону, что полемика между сторонниками нового анализа и последователями картезианской математики, которая велась и в заседаниях Парижской академии и в печати и в которой участвовало много лиц, принимала временами очень острый характер. Академия даже запретила было своим сочленам, т. е. тем же Роллю и Вариньону, публично выступать по этому вопросу. Главные участники спора посвятили ему одиннадцать статей: пять мемуаров — Ролль и шесть— Вариньон. Дело закончилось тем, что осенью 1706 г. Ролль отказался от своих возражений. Но позиции картезианцев в Академии еще долго оставались крепкими, особенно в области физики.

Получив письмо Вариньона от 29 ноября 1701 г., Лейбниц 2 февраля 1702 г. ответил ему, что воспользовался приведенными несколько выше образами обычного шарика, земного шара и т. п., дабы избежать различных метафизических споров и сделать свои рассуждения понятными всем. Теперь Лейбниц предлагает рассматривать бесконечно малые как переменные, исчезающие величины (быть может, здесь сказалось влияние Ньютона),— это позволяет объяснить точность результатов, полученных с их помощью. «В самом деле, если какой-либо противник желает возражать против наших утверждений, то из нашего исчисления следует, что ошибка будет меньше, чем любая ошибка, какую он сможет указать, ибо в нашей власти взять несравнимо малое достаточно малым для этой цели, поскольку такую величину можно взять сколь угодно малой» [3]. Эти важные утверждения Лейбниц оставил без доказательства. По существу в них содержалась целая программа построения анализа на основе понятия потенциально бесконечно малой величины. Оригинальную попытку такого рода предпринял в 1796 г. Л. Карно, но впервые это удалось в 20-е годы XIX в. О. Коши.

В том же письме Лейбниц касается вопроса о реальности инфинитезимальных величин. Чтобы не ставить анализ в зависимость от того или иного решения этого вопроса, он замечает, что те, кто отвергает их в ка-

---

[1] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 190.
[2] См. статью *С. А. Яновской.* Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых. Труды Ин-та истории естествознания, т. 1. М., 1947, стр. 336.
[3] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 191—192.

честве действительных объектов, могут «надежно пользоваться ими как идеальными понятиями, сокращающими рассуждения и сходными с так называемыми в обыкновенном анализе мнимыми корнями» [1] или с измерениями выше третьего порядка. Но, помимо того, что всегда остается потенциальная бесконечность, несравнимые, как и мнимые, величины имеют свое действительное основание (fundamentum in re), и «в геометрии и даже в природе все происходит, как если бы они представляли собой совершенные реальности» [2]. В другом письме к Вариньону от 20 июня 1702 г. Лейбниц называл обе категории величин хорошо обоснованными фикциями. Здесь методологические проблемы исчисления бесконечно малых смыкались с общими философскими воззрениями Лейбница на соотношение между реальным и идеальным и т. д.

Наряду со всем этим Лейбниц (в рукописной заметке 1702 г.) предлагал еще трактовку бесконечно малых как особого рода нулей, связывая ее со своим принципом непрерывности, о котором говорилось в геометрической главе этого тома (стр. 126). Как поясняет Лейбниц, этот принцип заключается в том, что покой, равенство, круг и т. п. заканчивают (terminent) движения, неравенства и правильные многоугольники, которые переходят в них при непрерывном изменении. И хотя эти концы (terminaisons) не принадлежат к ограничиваемым ими многообразиям (variétés), они имеют свойства последних. Мы уже цитировали такую формулировку Лейбница: «*Если явления* (*или данные*) *непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами* (*или искомыми*)» [3]. Не следует видеть в этих словах определения непрерывной функции; от такого толкования принципа Лейбниц был весьма далек. Вместе с тем принцип непрерывности нашел у него многочисленные приложения. В интересующем нас случае речь идет о переносе свойств непрерывно меняющихся объектов на свойства предельных объектов, когда один их них оказывается исчезающим. В упомянутой заметке Лейбниц показывает, что даже в алгебре приходится иметь дело с бесконечно малыми, если угодно сохранить за ней преимущество общности. Беря два подобных треугольника и представляя себе, что оба они изменяются с сохранением подобия так, что стороны одного стягиваются в точки, Лейбниц рассматривает пропорцию, составленную отношениями каких-либо пар соответственных сторон. Чтобы подвести предельный случай под общее правило, он трактует исчезающие стороны как нули или ничто, но не в абсолютном, а в «сравнительном смысле» [4], как нули по сравнению с конечными сторонами другого треугольника, нули, которые сохраняют между собой определенное отношение конечных величин. Мы увидим, что Эйлер попытался построить математический анализ на основе специального «исчисления нулей».

При всем богатстве высказываний Лейбница о природе и свойствах инфинитезимальных величин ему не удалось выйти за пределы «мистического», как выразился К. Маркс[5], дифференциального исчисления и най-

[1] *Г. В. Лейбниц*. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 192.
[2] Там же, стр. 192.
[3] Там же, стр. 194.
[4] Там же, стр. 195. Характерно название этой заметки, посланной Лейбницем Вариньону: «Оправдание исчисления бесконечно малых с помощью исчисления обыкновенной алгебры» (Justification du Calcul infinitésimal par celui de l'Algèbre ordinaire).
[5] *К. Маркс*. Математические рукописи. М., 1968, стр. 165.

ти решение вопроса, удовлетворяющее его самого. По-видимому, со временем Лейбниц все более отходил от концепции бесконечно малых, как актуально «несравнимых» величин, и склонялся к их пониманию, как переменных величин. Но в школе Лейбница бесконечно малые применялись без всякого определения, просто как величины, подчиняющиеся принципу отбрасывания высших бесконечно малых по сравнению с низшими или же «трансцендентному закону однородности».

Рукописные «Лекции по исчислению дифференциалов», составленные И. Бернулли в 1691—1692 гг., начинались тремя такими постулатами:

«1. Величина, уменьшенная или увеличенная на бесконечно меньшую величину, не уменьшается, не увеличивается.

2. Всякая кривая линия состоит из бесконечно многих прямых, которые сами бесконечно малы.

3. Фигура, заключенная между двумя ординатами, разностью абсцисс и бесконечно малым куском любой кривой, рассматривается как параллелограмм» [1].

Последний постулат, относившийся к примыкавшему к этим «Лекциям» курсу интегрального исчисления Бернулли, в сущности есть следствие первого. Первые два постулата были в несколько иной формулировке включены в «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий» (1696) Лопиталя.

Перед постулатами Лопиталь поместил еще два определения — переменной величины и дифференциала. Последнее гласит: «Бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее дифференциалом» [2].

Первые руководства по математическому анализу

Краткие мемуары Лейбница, весьма трудные для понимания, не могли служить пособием для изучения исчисления бесконечно малых. Лейбниц долгие годы намеревался написать систематическое руководство, но этого не сделал. Первым курсом анализа явились уже не раз упомянутые лекции И. Бернулли, которые он читал в 1691—1692 гг. Лопиталю; их постигла, как говорилось, необычная судьба. Лопиталь по соглашению с Бернулли широко использовал их для своего «Анализа», в том числе и лекции по интегральному исчислению, включавшие многие вопросы, относящиеся к приложениям дифференциального исчисления (соприкосновение кривых, эволюты, каустики и т. д.). Сам же курс анализа Бернулли своевременно напечатан не был.

Совершенно иной оказалась участь «Анализа бесконечно малых» Лопиталя. Изложенные в нем методы принадлежат почти целиком Лейбницу и братьям Бернулли, особенно Иоганну, который помог автору еще и тем, что решил по его просьбе многие трудные задачи. Заявив, что он «без всякого стеснения пользовался их открытиями», Лопиталь признал в весьма общей форме авторские права за ними всеми «на все, что им угодно», не указав, однако, в частности, чем он обязан своему непосредствен-

---

[1] *J. Bernoulli.* Die Differentialrechnung, übersetzt von P. Schafheitlin. Leipzig, 1924, S. 11.

[2] *Г. Ф. де Л'Опиталь.* Анализ бесконечно малых. Перевод Н. В. Леви. Редакция и вступительная статья А. П. Юшкевича. М.— Л., 1935, стр. 62.

ному руководителю[1]. Однако выдающиеся педагогические достоинства книги — ее ясность и увлекательность, богатый подбор детально разобранных задач, прекрасный слог — принадлежат Лопиталю, который внес кое-что свое и в разработку теоретических проблем (мы упоминали, например, об открытии им точек возврата второго рода). Книга выдержала еще четыре французских издания, последнее из которых вышло в 1781 г.; в 1730 г. была переведена на английский (с заменой дифференциалов на флюксии) и в 1764 г. вышла в Вене на латинском языке. Кроме того, к «Анализу» было написано несколько подробных комментариев, один из которых принадлежал перу П. Вариньона (см. стр. 271). Успех книги был, таким образом, велик и вполне заслужен. «Анализ бесконечно малых» Лопиталя впервые открыл доступ к этой науке более широкому кругу людей.

Чтобы дать несколько более полное представление об этом руководстве, добавим, что самый алгоритм дифференцирования в нем изложен в том же объеме, что в «Новом методе» Лейбница (как и в лекциях И. Бернулли), и составляет примерно 5% текста, а основное содержание образуют геометрические приложения, что и получило отражение в полном названии книги. Все понятия тут же иллюстрируются чертежами. Добавим, что и в лекциях И. Бернулли по интегральному исчислению техника интегрирования сводилась еще к очень немногим правилам.

«Анализ бесконечно малых» Лопиталя не удовлетворил, однако, потребности в руководстве, излагающем начала интегрального исчисления. Первую, мало успешную попытку восполнить этот пробел сделал ученик Вариньона Л. Карре (1663—1711) в «Методе измерения поверхностей, размеров тел, их центров тяжести, удара и качания посредством интегрального исчисления» (Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion et d'oscillation par l'application du Calcul intégral, Paris, 1700). Вслед за тем обе ветви анализа включил в свой обширный курс математики профессор в Анжере Шарль-Рене Рейно (1656—1728). Полное название этого двухтомного сочинения очень длинное, мы приведем начало и конец: «Доказанный анализ или метод решения задач математики... и физико-математических наук с помощью обыкновенного исчисления алгебры, дифференциального исчисления и интегрального исчисления. Эти последние исчисления здесь также объяснены и доказаны» (Analyse démontrée ou la méthode de résoudre les problèmes des mathématiques ... et des sciences physico-mathématiques, en employant le calcul ordinaire de l'algèbre, le calcul différentiel et le calcul intégral. Ces derniers calculs y sont aussi expliqués et démontrés, Paris, 1708). Слово «доказанный» употреблено с умыслом: Ролль обвинял сторонников

[1] *Г. Ф. де Л'Опиталь.* Анализ бесконечно малых, стр. 59. То обстоятельство, что И. Бернулли оказал Лопиталю столь значительную помощь в подготовке этой книги, объясняется главным образом материальной заинтересованностью швейцарского математика, в январе 1694 г. обручившегося со своей будущей женой. В письме от 17 марта 1694 г. Лопиталь предложил И. Бернулли ежегодную пенсию в 300 ливров с обещанием затем ее повысить при условии, что он возьмет на себя разработку интересующих его вопросов и будет сообщать ему и только ему свои новые открытия, а также никому не пошлет копии своих сочинений, оставленных в свое время у Лопиталя. Этот удивительный контракт соблюдался до издания «Анализа бесконечно малых». Позднее И. Бернулли — сначала в письмах к друзьям, а после смерти Лопиталя и в печати — стал предъявлять свои права со все большей конкретностью и определенностью. См. статью О. Шписа в книге «Der Briefwechsel von Johann Bernoulli», стр. 123 и след.

нового анализа в том, что он — не доказанный. Рейно, как и Лопиталь и Карре, имел доступ к лекциям Бернулли.

И в Англии в эти же годы вышло первое удовлетворительное изложение метода флюксий Гемфри Диттона (1675—1715): «Учение о флюксиях, содержащее первые начала, действия и некоторые применения и приложения этого замечательного метода» (Institutions of Fluxions: containing the First Principles, the Operations, with some of the Uses and Application of that admirable Method, London, 1706).

Итоги столетия

Обозревая путь, пройденный математикой в течение XVII в., мы видим, что революция, наметившаяся в этой науке в 30-е годы, к концу столетия торжествовала полную победу. Главным предметом исследования стало понятие функции как аналитического выражения, отвечавшее потребностям математического естествознания Нового времени, а главным средством исследования — алгоритмы исчисления бесконечно малых. Создание на первом этапе математической революции аналитической геометрии имело в сущности принципиальное значение лишь в той мере, в какой содействовавало становлению математического анализа.

Как говорилось в начале (стр.16), революционные сдвиги происходили и в других областях математики. Таковы были появление проективной геометрии и теории вероятностей, которым еще предстояло великое будущее. Большими успехами отмечено было развитие численных методов и алгебры; был решен и поставлен ряд важных задач теории чисел. Мы подчеркивали, что приближенные приемы, создававшиеся для астрономических и иных расчетов, имели интерес, выходивший далеко за пределы их приложений. Во многих случаях они требовали глубоких теоретических изысканий и сами оказывались отправным пунктом новых теорий. И чем дальше, тем больше судьбы численных методов связывались с общими судьбами математического анализа. В алгебре впервые была высказана ее основная теорема, заложены начала теории симметрических функций, сделаны первые шаги в изучении распределения корней, проблемы приводимости и т. д. Комплексные числа, несмотря на отсутствие их реальной интерпретации, прочно вошли в обиход алгебры и анализа. Влияние этих и других, не названных здесь открытий на теоретическую мысль со временем возрастало.

При всем том, однако, особенно интенсивно и в количественном и в качественном отношении развивался анализ бесконечно малых. Небольшая группа ученых, группировавшихся вокруг Ньютона и отдельно вокруг Лейбница, за немногие годы не только далеко продвинула дифференциальное и интегральное исчисление, как таковое, и метод бесконечных рядов, но и приступила к созданию новых отделов анализа и его приложений. Мы сравнительно подробно описали первые успехи в интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений и в дифференциальной геометрии плоских кривых. На рубеже XVII и XVIII вв. математики вступили еще в две области математического анализа. Об одной из них, именно о начале исследований в теории функций комплексного переменного, мы упоминали в связи с работами Лейбница и И. Бернулли по интегрированию рациональных дробей (стр. 277). Другую область — вариационное исчисление — мы пока почти совсем не затрагивали. Здесь нам придется ограничиться замечанием, что для развития вариационного исчисления наибольшее значение имели задачи о брахистохроне и о геодезических линиях, поставленные И. Бернулли в 1696 — 1697 гг., и изопериметрическая задача, выдвинутая Я. Бернули в 1697 г., т. е. в самом конце рассматриваемого времени. Нам будет удобнее рассмотреть первые стадии развития теории аналитических функций и вариационного исчисления в соответствующих отделах следующей главы.

Приобретения математического анализа были настолько велики, что подавали надежду на близкое решение всех основных его задач. Лейбниц, для которого, как и для Ньютона, анализ не был при всей его важности и ценности самоцелью, а в первую очередь средством миропознания, писал Гюйгенсу в сентябре 1691 г.: «Я хочу, чтобы мы могли еще в этом веке довести до завершения анализ чисел и линий, по крайней мере, в главном, дабы избавить от этой заботы человеческий род, чтобы отныне вся проницательность человеческого разума обратилась к физике» [1]. Вскоре стало ясным, что это желание великого мыслителя далеко опережало реальные возможности математики. Более того, чем обширнее и значительнее становились приложения анализа в физике, тем более сложные и глубокие задачи возникали перед самим анализом.

Это доказало уже развитие математики в XVIII в., которое во всех своих главных особенностях было непосредственным продолжением научной революции XVII столетия.

---

[1] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften, Bd. II, S. 107—108.