ВТОРАЯ ГЛАВА

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

Леонард Эйлер

Нам уже несколько раз встречалось и часто встретится в дальнейшем имя Эйлера. Этот великий ученый несомненно являлся центральной фигурой в науке XVIII столетия, и мы прежде всего познакомимся с его жизненным путем и творчеством.

Научная деятельность Эйлера продолжалась без перерыва почти шестьдесят лет. С 1726 г. по 1783 г. он вел исследования во всех областях математики и механики XVIII в., а кроме того, во многих отделах астрономии, физики и техники. Его перу принадлежит около 850 научных трудов, среди них примерно два десятка объемистых монографий в одном, двух и трех томах. Издание полного собрания его сочинений в трех сериях и более чем в семидесяти томах, начатое в 1911 г., еще не вполне закончено; в него не входят еще многие сотни сохранившихся научных писем Эйлера, нередко представляющих собой небольшие статьи,— их предполагается издать в виде четвертой серии. Эйлер был не только величайшим математиком своего времени, которое по всей справедливости можно было бы наименовать в истории физико-математических наук «веком Эйлера», но и крупным организатором работ двух больших академий: Петербургской и Берлинской.

Леонард Эйлер (1707—1783) родился в Базеле и первые уроки математики получил от отца, пастора Пауля Эйлера (1670—1745), обучавшегося этому предмету у Я. Бернулли и в 1688 г. защитившего диссертацию по теории отношений и пропорций. Отец предназначал сына также в пасторы, но склонность к математике взяла верх. В годы занятий в Базельском университете (1720—1724) Леонард Эйлер дополнительно изучал математику и механику под руководством Иоганна Бернулли. В 1725—1726 гг. молодой Эйлер выступил с первыми самостоятельными работами об изохронных кривых в сопротивляющейся среде, об одном специальном виде траекторий, о наилучшем расположении мачт на корабле (эта работа, представленная на конкурс Парижской академии, была принята к печати, хотя и не получила премии), о звуке. Диссертация о звуке была написана в связи с намерением Эйлера участвовать в конкурсе на вакансию профессора физики в Базельском университете. Должности здесь замещались тогда путем жребия среди отобранных кандидатов. Эйлер не был допущен к жеребьевке, вероятно, по молодости. Как пишет его швейцарский биограф О. Шпис, это было для Эйлера счастьем: в то время перед ним открывалась более широкая перспектива деятельности.

Действительно, делая попытку устроиться на родине, Эйлер уже имел приглашение в Петербургскую академию наук, которое ему выхлопотали работавшие в ней с 1725 г. сыновья его наставника Даниил и Николай II Бернулли. Эйлер последовал этому приглашению и весной 1727 г. приехал в русскую столицу. Вначале предполагалось, что он займет свободную должность адъюнкта, т. е. младшего академика, по физиологии с тем, чтобы применить к этой науке математические методы. Перед поездкой Эйлер несколько месяцев штудировал анатомию и медицину, к которым, впрочем, не имел никакого призвания. Но в Петербурге все уладилось наилучшим образом: ему предоставили возможность работать в области математических наук. Несколько позднее это было оформлено официально. В январе 1731 г. Эйлер получил место профессора, т. е. академика по физике, а летом 1733 г. заместил уехавшего Д. Бернулли на кафедре математики.

В благоприятных условиях крупной академии, в регулярном общении с другими учеными — математиками, механиками, астрономами, физиками — гениальность Эйлера быстро проявилась во всей полноте. Человек исключительной энергии, он принял активное участие в различных академических мероприятиях, требовавших применения математики: составлении географических карт, различных технических экспертизах, решении многочисленных задач кораблестроения и кораблевождения, в составлении учебных руководств и отзывов на поступавшие сочинения и т. д. В задачах практики рождались стимулы и для многих теоретических исследований Эйлера, которые составляли главный предмет его неустанных размышлений.

Частью еще в Базеле, но главным образом в первые годы жизни в Петербурге Эйлер наметил обширную программу исследований по математике и механике, которую успешно осуществлял, постоянно ее дополняя, до самых последних дней. Открытия его, печатавшиеся в академических «Записках» со второго их тома за 1727 г. (1729) и нередко получавшие известность еще до публикации благодаря его научной переписке, вскоре привлекли внимание ученого мира Европы. Слава его росла из года в год. Это своеобразно выразил в своих письмах к Эйлеру его прежний наставник Иоганн Бернулли, именуя его в 1728 г. «ученейшим и даровитейшим юным мужем», в 1731 г. «славнейшим и ученейшим господином профессором, дражайшим другом» и, наконец, в 1746 г. «главой математиков» (Mathematicorum princeps). В это время Эйлер был членом двух академий — Петербургской и Берлинской. Несколько спустя его избрали своим иностранным членом Лондонское королевское общество (1749) и Парижская академия наук (1755).

Эйлер прожил в Петербурге 14 лет, отмеченных основоположными исследованиями в теории рядов, теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении, теории чисел, динамике точки, теории музыки, в корабельной науке. Только часть подготовленных им в то время рукописей была тогда издана; за эти годы их вышло около 55, в том числе двухтомная «Механика» (1736). Летом 1741 г. Эйлер переехал в Берлин, куда его пригласил прусский король Фридрих II, желавший поднять на высокий уровень деятельность Берлинской академии наук, влачившей при его предшественнике самое жалкое существование. Эйлер принял приглашение, так как в регентство Анны Леопольдовны, правившей с ноября 1740 г. по декабрь 1741 г., в Петербурге сложилась весьма неустойчивая и беспокойная политическая обстановка, отражавшаяся и на положении дел в Академии наук.

Л. Эйлер
(Барельеф, гипс, работы М. И. Павлова, 1777 г. Музей М. В. Ломоносова, Ленинград)

Возглавляя Математический класс в качестве его директора, а в отсутствие президента Мопертюи и ряд лет после его смерти и всю работу Берлинской академии, Эйлер вместе с тем сохранил звание почетного члена Петербургской академии (с постоянной пенсией), фактически же оставался ее иногородним действительным членом. Сил его хватало для совершенно полноценного «совместительства» в двух академиях, свои сочинения он публиковал почти поровну в изданиях обеих и даже обе вместе они не справлялись с своевременной публикацией неиссякаемого потока его трудов. Помимо того, что он выполнял поручения прусского правительства по гидротехнике, баллистике, организации лотерей и проч., он редактировал математические отделы берлинских и петербургских академических записок, годами руководил занятиями живших у него на квартире молодых русских ученых — С. К. Котельникова, С. Я. Румовского, М. Софронова (1729—1760), участвовал в организации научных конкурсов обеих академий, вел живую переписку с немецкими университетскими профессорами и петербургскими академиками, в том числе М. В. Ломоносовым, подыскивал для нашей академии сотрудников, закупал для нее инструменты и книги. Силы Эйлера в зрелые годы кажутся неистощимыми. Продолжая осуществлять планы, намеченные в Петербурге, подготовляя или завершая фундаментальные трактаты по всем отделам анализа, он включает в круг занятий новые вопросы алгебры и теории чисел, эллиптические интегралы, уравнения математической физики, тригонометрические ряды, дифференциальную геометрию поверхностей, задачи топологии, механику твердого тела, гидродинамику, теорию движения Луны и планет, оптику, магнетизм и в каждой из перечисленных областей получает значительные и нередко первостепенные результаты.

В это же время Эйлеру пришлось участвовать в нескольких важных дискуссиях, из которых мы назовем по крайней мере три: 1) знаменитый спор о природе функций, входящих в решение дифференциального уравнения колеблющейся струны, в котором участвовали, кроме него, сперва Даламбер и Д. Бернулли, а затем втянулись и другие крупнейшие математики; 2) спор с Даламбером о логарифмах отрицательных чисел (мы еще вернемся к обоим вопросам) и, наконец, 3) спор с английским оптиком Доллондом, в котором Эйлер, исходя, правда, из ошибочной предпосылки, доказывал в противовес своему оппоненту возможность построения ахроматических объективов, которые несколько неожиданно были действительно построены самим Доллондом.

На годы берлинской жизни приходится издание таких больших монографий Эйлера, как «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума» (Лозанна — Женева, 1744), «Новые принципы артиллерии» (Берлин, 1745) [1], двухтомное «Введение в анализ бесконечных» (Лозанна, 1748), двухтомная «Морская наука» (Петербург, 1749), изданные в Берлине за счет Петербургской академии «Теория движения Луны» (1753), «Дифференциальное исчисление» (1755) и «Теория движения твердых тел» (Росток — Грейфсвальд, 1765) — в общей сложности всего около 260 работ.

---

[1] Это был немецкий перевод английского сочинения Б. Робинса (ср. стр. 259), но дополнения Эйлера по вопросам баллистики здесь в пять раз превосходят по объему текст автора.

Петербургская академия не раз ставила перед Эйлером вопрос о его возвращении. В 60-е годы отношения между Эйлером и Фридрихом II, и ранее не питавшими взаимной симпатии, резко ухудшились. Эйлер, швейцарский бюргер, воспитанный в протестантской традиции, и Фридрих II, прусский абсолютный монарх, поклонник вольтерианского вольнодумства, расходились в очень многом, в том числе и в отношении к математике, которая была для Эйлера делом всей его жизни и в которой король, почти вовсе не знавший ее, ценил только непосредственные и немедленные практические приложения. После смерти в 1759 г. Мопертюи король предложил место президента Даламберу, а когда тот отказался, поручил Эйлеру управлять академией без президентского титула и под своим личным руководством. Разногласия в некоторых финансовых и административных вопросах повлекли за собой разрыв между ученым и королем. Используя свое швейцарское подданство и поддержку русского правительства, Эйлер добился отставки и летом 1766 г. навсегда вернулся в Петербург.

Вскоре после возвращения в Россию Эйлер, еще около 1738 г. потерявший один глаз, почти полностью ослеп на второй. Теперь он должен был заниматься с помощью секретарей, которым диктовал свои сочинения или же давал подробные указания об их литературном оформлении. Секретарями служили высоко образованные молодые ученые: старший сын Эйлера Иоганн-Альбрехт (1734—1800), А. И. Лексель, физик В. Л. Крафт (1743—1814), позднее Н. И. Фусс и М. Е. Головин (см. стр. 209—213); все пятеро были учениками Эйлера и состояли членами Петербургской академии, а И.-А. Эйлер с 1769 г. был ее конференц-секретарем. Изумительная память и духовная мощь Эйлера не ослабевали до конца жизни. За второй петербургский период, длившийся 17 лет, он опубликовал даже больше статей и книг, чем за 25 лет пребывания в Берлине. Мы назовем несколько наиболее крупных по объему трудов. Это двухтомная «Универсальная арифметика» (Петербург, 1768—1769), которую под диктовку Эйлера записал его слуга-немец; подготовленное еще в Берлине трехтомное «Интегральное исчисление» (Петербург, 1768—1770); знаменитые «Письма к одной немецкой принцессе по различным вопросам философии и физики» (три тома, Петербург, 1768—1772), возникшие из уроков, который Эйлер давал одной родственнице короля Фридриха [1]; составленная при участии Крафта трехтомная «Диоптрика» (Петербург, 1769—1771); «Теория движения Луны, трактованная новым методом» (Петербург, 1772), подготовленная совместно с И.-А. Эйлером, Крафтом и Лекселем; наконец, «Полная теория постройки и вождения кораблей» (Петербург, 1773). С помощью Фуса было написано около 250 статей, с помощью Головина — около 70. Если учесть, что не только идейное содержание перечисленных работ, но и бо́льшая часть текста и редакция принадлежат самому Эйлеру, то видно, что Эйлер выделяется среди математиков всех времен не только исключительной количественной продуктивностью, но еще тем, что эта продуктивность не ослабевала на склоне его лет. Вот распределение по десятилетиям числа подготовленных к печати работ, без различия больших и малых (несколько десятков трудов, которые не удалось датировать, оставлены в стороне):

---

[1] Эта популярная энциклопедия физических и астрономических знаний, вышедшая на французском языке, имела огромный успех и выдержала 12 французских изданий, 9 английских и 6 немецких, 4 русских (в переводе С. Я. Румовского), по 2 голландских и шведских, по одному итальянскому, испанскому и датскому.

Годы	Количество работ	%	Годы	Количество работ	%
1725—1734	35	4	1755—1764	110	14
1735—1744	80	10	1765—1774	145	18
1745—1754	150	19	1775—1783	270	34

Идейный порыв Эйлера в молодые и зрелые лета продолжал давать великолепные результаты и в старости. Добавим, что около 300 статей и фрагментов увидело свет уже после его смерти.

Эйлер был геометром в том широком смысле, какое это слово имело в XVIII в. Его математическое творчество в главным определялось глубокими связями между теоретическими и прикладными исследованиями, направленными на решение актуальных проблем естествознания и техники. Он внес вклад непреходящего значения не только в разработку рациональной механики точки, твердого тела, жидкостей и газов, небесной механики и теории упругости, но и в проектирование и теорию реактивных гидротурбин, в теорию зубчатых передач, в совершенствование конструкций и методов расчета телескопов и микроскопов, в корабельное дело, в черчение географических карт и т. д. Современники (и потомство) высоко ценили эти достижения Эйлера; упомянем тут же, что Эйлер одержал более чем кто-либо другой из ученых XVIII в. побед на конкурсах различных академий, предметом которых служили чаще всего насущные задачи механики, физики и техники [1]. Но сколь значительную роль не играли у Эйлера вопросы естествознания и техники, он был главным образом математиком. Эйлер — экспериментатор или создатель физических гипотез, как и Эйлер — конструктор далеко уступали Эйлеру — математику. В задачах физики и техники Эйлер с великим искусством выделял собственно математическое содержание и затем переходил к разработке приемов, позволяющих найти подходящее для практики числовое решение задачи, а самые эти приемы стремился затем развить в возможно более общей и широкой форме. Как «геометр» Эйлер отличался от другого крупнейшего «геометра» XVIII в., своего друга Даниила Бернулли, который, будучи прежде всего физиком, обращался к математике в меру необходимости, нередко ограничиваясь одними физическими соображениями и моделями, и не стремился глубоко развить какой-либо найденный им при изучении того или иного конкретного вопроса аналитический прием. Эйлер всегда разрабатывал математику как целое, отчетливо сознавая, что в таком развитии лучший залог ее прогресса, а значит и ее приложений. Характерная деталь: Д. Бернулли отзывался о занятиях Эйлера теорией чисел со снисходительной иронией, считая их данью чрезмерной утонченности вкусов своего столетия. Эйлер десятилетиями с особенной любовью и настойчивостью занимался теорией чисел и в этом за ним последовали такие гении теоретической и прикладной математики, как К. Ф. Гаусс и П. Л. Чебышев.

---

[1] Так, в 1738—1772 гг. Эйлер 12 раз получал премии Парижской академии наук за работы о приливах и отливах, о движении планет, по теории корабля, по магнетизму и т. д. К этому следует добавить 7 премий его сына Иоганна-Альбрехта, который лишь излагал и обрабатывал идеи отца, и еще вознаграждение от английского парламента, о котором говорилось в первой главе (см. стр. 11).

При всем многообразии интересов Эйлера центральное место в них принадлежит анализу. Из 30 томов математической серии его собрания сочинений 19 отведено анализу, за этим идут теория чисел ($4^1/_2$ тома), геометрия (4 тома), алгебра ($1^1/_2$ тома) и комбинаторика с теорией вероятностей (1 том). К тому же большинство геометрических работ Эйлера посвящено исследованию кривых и поверхностей с помощью алгебры и исчисления бесконечно малых, а многие труды его по механике (их также 30 томов) содержат новые математические приемы решения дифференциальных уравнений, интегрирования функций и т. д. В наших курсах анализа большое число формул и методов до сих пор носит имя Эйлера, и оно встречается, пожалуй, чаще других имен. Но, помимо отдельных приемов и формул, мы обязаны Эйлеру основанием нескольких больших дисциплин, которые лишь в зачаточной форме существовали ранее: теории дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными, вариационного исчисления, элементарной теории функций комплексного переменного. И он же положил начало теории суммирования рядов, разложениям функций в тригонометрические ряды, теории специальных функций и определенных интегралов, дифференциальной геометрии поверхностей и, наконец, теории чисел, как особой науке.

В речи памяти Эйлера, произнесенной в Парижской академии наук, Кондорсе, описывая последние часы жизни Эйлера, сказал, что он кончил «вычислять и жить». Эйлер в самом деле был неутомимым «вычислителем» как в узком, так и в широком смысле слова и, пожалуй, как никто, владел техникой расчетов. Эта особенность его гения отвечала потребности науки того времени, особенно нуждавшейся в быстром развитии формального аналитического аппарата. Но Эйлер был и мыслителем, внесшим огромный вклад в разработку фундаментальных идей математики, без чего также невозможно было ее развитие, таких, как понятия числа, функции, функционала, суммы ряда, интеграла, решения дифференциального уравнения и т. д.

Вместе с тем он создавал новую алгебраически-арифметическую архитектуру анализа. Правда, Эйлер уступал в построении обобщающих концепций более молодому Лагранжу, который ярче отразил в своей теории аналитических функций и аналитической механике духовные устремления эпохи просвещения, в других сферах мышления приведших к созданию новых больших философских, исторических, социально-политических систем. Не следует, однако, забывать, что Лагранж во многом непосредственно следовал за Эйлером, углубляя и совершенствуя его методы и концепции.

Влияние Эйлера было исключительно велико. Лаплас повторял молодым математикам: читайте Эйлера, он наш общий учитель. Прямых учеников у Эйлера было немного, но его труды были настольными в XVIII в. и далеко за его пределами для всех творческих математиков, а работу многих он непосредственно направлял путем переписки. Эйлер охотно и щедро делился своими мыслями и к нему применимы слова, сказанные Фонтенелем о Лейбнице: «он любил наблюдать, как расцветают в чужом саду растения, семена которых он сам доставил».

Методы, теории, задачи Эйлера продолжали вдохновлять творчество ученых на протяжении всего XIX в. К Эйлеру восходят, в частности, традиции Петербургской математической школы, руководителем которой был П. Л. Чебышев.

Основные руководства по алгебре

Все учебники арифметики и алгебры XVIII в. находились под сильным влиянием «Всеобщей арифметики» Ньютона (1707), которая неоднократно переиздавалась как на латинском языке (в 1722 г. под наблюдением самого автора), так и в английском переводе Дж. Рафсона (1-е изд. 1720); в 1802 г. вышел и ее французский перевод. Мы остановимся здесь только на нескольких важнейших курсах алгебры.

Ближе всего примыкает к книге Ньютона «Трактат по алгебре в трех частях» (A treatise of algebra in three parts. London, 1748) его последователя Маклорена[1], изданный два года спустя после смерти автора. Колин Маклорен (1698—1746), сын священника в Килмодане (Шотландия), учился в Глазго и уже в 1717 г. стал профессором математики в Абердине. В 1719 г. он познакомился в Лондоне с Ньютоном и был избран в Королевское общество. Через год вышла книга Маклорена «Органическая геометрия, или всеобщее описание кривых линий», к которой мы еще вернемся. После пятилетнего пребывания во Франции Маклорен с 1725 г. работал в Эдинбурге на кафедре, предоставленной ему по рекомендации Ньютона. В 1742 г. был издан важнейший труд Маклорена «Трактат о флюксиях», к которому мы также обратимся в дальнейшем.

При осаде Эдинбурга в 1745 г. сторонниками претендовавшего на корону Англии внука изгнанного в 1688 г. короля Якова II, Маклорен был одним из руководителей обороны и, когда город временно попал в руки якобитов, переехал в Йорк, где вскоре и умер.

«Трактат по алгебре» Маклорена содержал подробные комментарии к «Всеобщей арифметике», восполнявшие многие доказательства, отсутствующие у Ньютона, например в теории симметрических функций. Маклорен обобщил результаты Ньютона о приводимости уравнений на задачи отыскания квадратичных и кубических множителей многочленов с рациональными коэффициентами. Геометрическое построение корней уравнений еще занимало в трактате Маклорена видное место.

Однако уже в «Началах алгебры» (Éléments d'algèbre. Paris, 1746) Клеро геометрическое построение корней отсутствовало и все изложение приобрело чисто арифметический характер. Вообще «Начала алгебры» Клеро построены очень своеобразно. Клеро был проникнут убеждением, что наиболее правильным педагогическим приемом является тот, при котором учащийся как бы сам изобретает нужные истины и убеждается в целесообразности применяемых методов. Как и в более ранних «Началах геометрии» (1741), он исходит на первых порах из постановки задач, решать которые, по его выражению, побудили необходимость и любопытство, и лишь в дальнейшем, когда читатель уже достаточно ознакомился с предметом, позволяет себе обходиться без таких задач. В книге, написанной в мастерски ясной манере, изложено все, что было известно ко времени ее выхода по теории алгебраических действий и уравнений первых четырех степеней, а также некоторые собственные результаты автора. Вслед за Франсуа Николем (1683—1758; Mém. Ac. Paris, 1738) Клеро представил в неприводимом случае формулы Тартальи — Кардано все три корня кубического уравнения с помощью бесконечных рядов в действительной форме, удобной для вычислений. С большой подробностью разобран вопрос о кор-

[1] Мы записываем фамилию Маклорена в общепринятой в русской математической литературе форме; правильное произношение: Меклóрин.

К. Маклорен
(с портрета неизвестного художника, принадлежащего доктору Д. Маклорену, Шотландия)

нях уравнений четвертой степени и показано, что их мнимые корни всегда имеют вид

$$a+b\sqrt{-1}.$$

Книга Клеро имела большой успех, шестое издание ее вышло в 1801 г., появились немецкий (1752) и голландский (1760) переводы. Еще бóльшую популярность приобрело классическое руководство по алгебре Эйлера. В 1748 г. вышло из печати двухтомное «Введение в анализ бесконечных» Эйлера, в котором он рассмотрел целый ряд важных алгебраических проблем. Специально алгебре Эйлер посвятил уже упоминавшуюся «Универсальную арифметику» (т. I—II, Петербург, 1768—1769; немецкий оригинал — Vollständige Anleitung zur Algebra — там же, 1770). Эйлер, как и Клеро, излагает только буквенную алгебру и не приводит ее геометрических приложений. Уже в самом начале книги Эйлер дает ньютоновское определение положительного действительного числа: «Число не иное что, как содержание (т. е. отношение.— *Ред.*) одного количества к другому, которое берется за единицу» [1]. С еще большей силой подчеркнул

[1] *Леонгард Ейлер*. Универсальная арифметика, т. I. Перевод П. Иноходцева и И. Юдина. Изд. 2. Петербург, стр. 3.

эту идейную близость к Ньютону в своем учебнике арифметики ученик Эйлера академик С. К. Котельников: «Образ, в котором я себе число воображаю, есть ньютонов. Оное представляется как некоторое содержание двух количеств» [1]. В курсе алгебры Эйлера изложение значительно приблизилось к тому, которое стало принятым затем около полутора столетий. И здесь мы находим новый по тому времени научный материал: например, в учении о логарифмах, современной трактовкой которого мы обязаны Эйлеру, в особенности же во втором томе, содержащем два больших отдела диофантова анализа с многочисленными собственными открытиями автора. В последующих учебниках для средней школы от этих отделов осталось лишь решение линейного уравнения с двумя неизвестными; исключены были также решение общих уравнений третьей и четвертой степени и приемы приближенного решения уравнений. Но прогрессии и десятичные дроби, теория соединений и бином Ньютона, а также логарифмы прочно вошли в школьные программы.

Книга Эйлера выдержала много изданий на русском и немецком языках, так же как во французском и английском переводах, кроме того, она вышла в голландском, итальянском и латинском переводах. К первому французскому изданию (Лион, 1774), подготовленному Иоганном III Бернулли (1744—1807), внуком Иоганна I и директором Берлинской обсерватории, Лагранж присоединил свои важные дополнения по диофантову анализу. Влияние курса Эйлера на последующие школьные руководства алгебры было очень велико, особенно в России и Германии. Упомянем сравнительно краткие «Уроки алгебры» (Leçons d'algèbre. СПб., 1783) Н. И. Фуса, в русском переводе вышедшие в 1798 г. под названием «Начальные основания алгебры», а затем составившие первую часть его весьма распространенных «Начальных оснований чистой математики».

Системы счисления

К началу XVIII в. относится работа Лейбница «Изложение двоичной арифметики, для которой достаточно только двух цифр 0 и 1, с замечаниями о ее пользе и о том, что она дает смысл древним китайским фигурам Фохи» (Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1; avec des remarques sur son utilité, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures Chinoises de Fohy. Mém. Ac. Paris, (1703) 1720); в 1759 г. были опубликованы письма Лейбница Я. Бернулли и другим математикам по этому вопросу. Двоичная система счета состоит в том, что каждое целое число представляется в виде

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots + a_k \cdot 2^k + \ldots,$$

где $a_k = 0$ или 1. Такое представление чисел лежало в основе древнеегипетского правила умножения (см. т. I, стр. 24) и его же применяли Леонардо Пизанский в «Книге абака» (1202) и Лука Пачоли в «Сумме арифметики» (1494) при решении задачи о минимальном числе гирь, необходимом для взвешивания всех грузов, не превосходящих некоторого предела. Двоичная система счета излагалась также Дж. Непером в добавлении к «Рабдологии» (1617), а английский философ Френсис Бэкон (1561—1626) в своей книге «О достоинстве и прогрессе наук» (De dignitate et augmentis

[1] *С. К. Котельников.* Первых оснований мафиматических наук часть первая, содержащая в себе арифметику. СПб., 1766, стр. 3.

scientiarum, 1623) на основе двоичной системы составил специальный шифр с двумя знаками. Работа и письма Лейбница значительно способствовали популяризации двоичной системы.

«Фохи», о котором упоминает Лейбниц,— Фуси, легендарный китайский император, живший за три тысячи лет до н. э. Фуси приписывается изобретение иероглифов, циркуля и линейки, а также введение животноводства и охоты с помощью сетей. «Фигуры Фохи», заимствованные из древнекитайских гадальных книг, изображены на рис. 1.

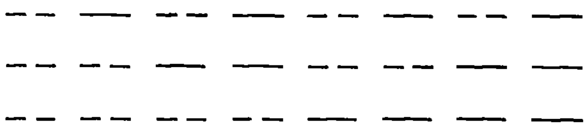


Рис. 1

Лейбниц истолковывает черту — как 1, а две черты — — как 0 и понимает эти знаки как двоичные записи чисел 0 = 000, 1 = 001, 2 = = 010, 3 = 011, 4 = 100, 5 = 101, 6 = 110, 7 = 111 (если читать эти знаки снизу вверх). Однако такое объяснение оказалось неверным и применение двоичной системы в древнем Китае не засвидетельствовано.

Б. Паскаль в «Признаках делимости чисел» (Caractères de divisibilité des nombres, ок. 1654, опубл. 1665) для установления делимости числа a на число n рассматривал аналогичное представление

$$a = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k + \ldots,$$

где $a_k = 0, 1, \ldots, n-1$.

60-ричная система, как мы видели, широко применялась древними вавилонянами, а также учеными стран ислама (см. т. I, стр. 213). В XVIII в. системами счета с основаниями, отличными от 10, занимался знаменитый естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) в «Опыте нравственной арифметики» (Essai d'arithmétique morale, 1760), вошедшем в состав IV тома его «Естественной истории» (Histoire naturelle, v. IV. Paris, 1777), причем особенно он пропагандировал 12-ричную систему. Пользу этой последней системы энергично отстаивал Иоганн Фридрих Христиан Вернебург (1777—1851) в «Кратком изложении новой числовой... системы» (Kurze Darstellung eines neuen Zahlen... Systems, 1798).

Все это не поколебало десятичной системы счета, но двоичная система благодаря своей особой простоте, которую подчеркивал Лейбниц [1], получила позже применение и в теоретических исследованиях, и в области вычислительной математики. Современные быстродействующие вычислительные машины оперируют числами, выраженными обычно в двоичной системе.

Счетные машины и таблицы

Упомянем в этой связи о некоторых успехах, достигнутых за рассматриваемое время в конструкции арифмометров. Предложенная Лейбницем счетная машина оказала существенное влияние на изобретателей XVIII в.

[1] Для сложения и умножения в бинарной арифметике требуются совсем короткие «таблицы» этих действий: $1 + 1 = 10$, $1 \cdot 1 = 1$.

Именно после введения им ступенчатого валика и подвижной каретки началось создание машин, удобно выполняющих (наряду со сложением и вычитанием) умножение и деление.

XVIII в. над усовершенствованием арифмометра Лейбница работали кенигсбергский профессор, учитель Канта, Мартин Кнутцен (1713—1751) и многие другие. В результате была предложена реверсивная муфта, которая обеспечивала вращение ручки в одном направлении при любых действиях, улучшены противоинерционные и фиксирующие приспособления и некоторые другие. Но долгие десятилетия все построенные машины не удовлетворяли даже не очень высоким требованиям своего времени и изготовлялись, как правило, в одном экземпляре.

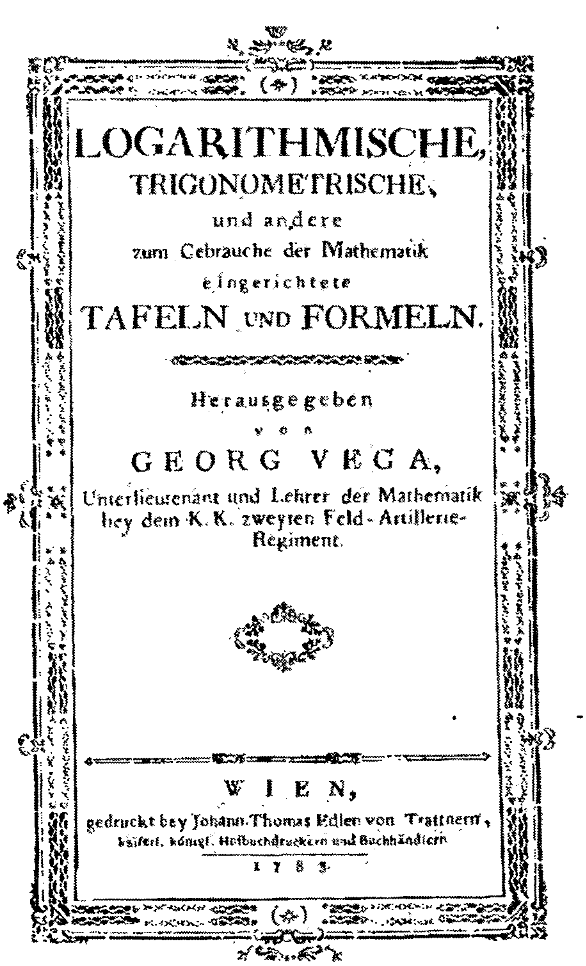
Счетную машину, пригодную для практических расчетов, сконструировал в 1774 г. вюртембергский пастор Матвей (Маттеус) Ган (1739—1790), удачно использовавший накопленный до него опыт. Машина Гана имела цилиндрическую форму. Сверху, в центре, находилась ручка. поворотом которой приводились во вращение ступенчатые валики, расположенные вертикально в отличие от всех предшествующих арифмометров. На машине можно было производить четыре арифметических действия, причем результат не должен был превышать 14 знаков. Ган изготовил несколько арифмометров; последняя машина такого типа была сделана уже после смерти конструктора его сыном в 1809 г. Инженер Иоганн Мюллер в 1783 г. построил машину со звонком, предостерегавшим, когда от нее требовали чего-либо неподходящего.

Более широкое производство арифмометров началось, однако, только в первой половине XIX в.; первый толчок этому сообщила конструкция, разработанная в 1820 г. Ч. Томасом.

Основным вспомогательным средством вычислений оставались логарифмические и тригонометрические таблицы. Как говорилось (см. т. II, стр. 61), таблицы, вычисленные в XVII в., не были безупречными: в первых семи знаках десятизначных таблиц десятичных логарифмов А. Влакка (1628) имелись 123 ошибки для чисел между 10 000 и 100 000. Над усовершенствованием таблиц трудились многие вычислители, и англичанин У. Гардинер, например, уменьшил число ошибок до 19 (Tables of logarithms. London, 1742). Наибольшую известность, благодаря удобному расположению материала и точности, получили семизначные «Логарифмические, тригонометрические и другие таблицы и формулы для применения математики» (Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien, 1783) австрийского артиллериста и профессора математики, уроженца Словении Георга Веги (1754—1802) и его же семизначное «Логарифмически-тригонометрическое руководство» (Logarithmisch — trigonometrisches Handbuch... Leipzig, 1793), сотни раз переиздававшееся вплоть до наших дней и во многих странах как в полном виде, так и в сокращениях. Вега, проделав все вычисления заново, предложил денежное вознаграждение в один дукат (около 3 рублей золотом) за каждую обнаруженную ошибку. Это обошлось ему только в 2 дуката, но позднее были обнаружены еще три ошибки. Вполне безупречное издание «Логарифмически-тригонометрического руководства» подготовил впервые сотрудник берлинского Института геодезии К. Бремикер (1857). Вега составил также десятизначные таблицы (1794), значения которых, однако, как указал в 1851 г. К. Ф. Гаусс, не отвечают требованию разниться от истинных не более чем на половину единицы последнего десятичного знака.

Применение логарифмов усложняется, когда в ходе вычислений появляются суммы или разности. Б. Кавальери в 1639 г., Х. фон Вольф в 1715 г. и французский астроном и геодезист Жан Батист Жозеф Деламбр (1749—1822) в 1782 г. показали, что с помощью некоторых преобразований логарифмы сумм и разностей можно вычислять по обыкновенным таблицам логарифмов чисел и тригонометрических величин. Требуя громоздких выкладок, эти предложения не имели успеха. На рубеже XVIII и XIX вв. итальянский физик Джузеппе Цеккини Леонелли (1776—1847) нашел вполне удобный прием вычисления $\log(a \pm b)$ по $\log a$ и $\log b$. К описанию его, данному в «Логарифмическом дополнении» (Supplément logarithmique. Bordeaux, г. XI, т. е. 1802—1803), Леонелли приложил три стра-

Титульный лист первого издания логарифмических таблиц Г. Веги (Вена, 1783)


LOGARITHMISCHE, TRIGONOMETRISCHE, und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete TAFELN UND FORMELN.

Herausgegeben von GEORG VEGA, Unterlieutenant und Lehrer der Mathematik bey dem K. K. zweyten Feld-Artillerie-Regiment.

WIEN, gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern 1783.

ницы употребляемых при этом вспомогательных таблиц. Вслед затем пятизначные таблицы логарифмов сумм и разностей опубликовал в 1812 г. Гаусс, в одном месте сославшийся на Леонелли.

К вспомогательным средствам вычислений принадлежат также таблицы произведений, квадратов и кубов чисел. Мы отметим особо появление обширных таблиц простых чисел и делителей составных чисел, например таблиц И. Г. Ламберта, доведенных до 102 000 и помещенных во II т. его «Очерков по математике и ее применении», Берлин, 1770 (стр. 111). Вега в лейпцигском издании своих логарифмически-тригонометрических таблиц 1797 г. продолжил таблицу делителей до 400 000, а Л. Чернак в «Арифметическом решете» (Cribrum arithmeticum. Deventer, 1810) — до 1 020 000.

Десятичные и непрерывные дроби

В течение всего XVIII в. продолжалось внедрение в обиход и изучение десятичных дробей. В конце XVII в. математики обратили специальное внимание на бесконечные десятичные дроби и, в частности, на периодические. До того ограничивались действиями над их конечными приближениями, хотя существование периодических дробей было замечено еще ранее и слово «период» (periodus) иногда встречается уже в «Десятичном счете» (Logistica decimalis. Francofurti a. M., 1603) И. Г. Бейера[1].

Дж. Валлис в «Трактате по алгебре» (1685; см. т. II, стр. 36) показал, что дроби со знаменателем вида 2^m5^n обращаются в конечные десятичные дроби, и установил некоторые простейшие свойства периодов, например, то, что для несократимой дроби p/q число цифр периода не превосходит $q - 1$. Он знал также, что иррациональные корни не выражаются периодическими дробями. Лейбниц обнаружил некоторые свойства цифр периода, в том числе неизвестные Валлису, но ничего по этому вопросу не опубликовал. После того наступил долгий перерыв, до середины XVIII в., когда изучением бесконечных десятичных дробей успешно занялся И. Г. Ламберт. Он доказал периодичность разложения несократимой дроби, знаменатель которой содержит простые делители, отличные от 2 и 5, и рациональность любой периодической дроби (Acta Helvetica, v. III, Basileae, 1758), а затем, применяя так называемую малую теорему Ферма (стр. 103), установил несколько теорем о числе цифр периода (Nova Acta Eruditorum, 1769). Более глубокие свойства периода были найдены с помощью теории степенных вычетов К. Ф. Гауссом («Арифметические исследования», 1801; см. стр. 123). Примерно в это же время действия с периодическими дробями и, в частности, их обращение в обыкновенные изложил библиотекарь Лондонского королевского общества Джон Робертсон (1712—1776), предложивший для их сокращенной записи обозначения вроде $0,\dot{7}8\dot{5} = 0,785785...$ (Phil. Trans., 1768); сходное предложение внес автор «Усовершенствованной десятичной арифметики» (Decimal arithmetic made perfect, 1742) Джон Марш.

Поскольку десятичные дроби употреблялись главным образом при теоретических исследованиях и астрономических вычислениях, в элементарных руководствах им отводилось очень скромное место, а в некоторых

---

[1] Шестидесятиричные периодические дроби были известны в странах ислама еще ранее и встречаются у Сибта ал-Маридини в XV в.

весьма популярных учебниках, например «Первых основаниях всех математических наук» (1710) Х. фон Вольфа (см. стр. 23), они не упоминались вовсе. Даже в «Универсальной арифметике» Эйлера (т. I, 1768) десятичные дроби вводятся мимоходом при описании логарифмических таблиц, правила действий над ними не сформулированы, а в небольшой главе «О бесконечных десятичных дробях» приведено лишь несколько примеров обращения обыкновенных дробей в десятичные и периодических в обыкновенные (с числом цифр периода, не превосходящим трех). Введение в 1799 г. во Франции десятичной метрической системы мер и весов, разработанной двумя комиссиями, в которые входили Лагранж, Лаплас, Монж и другие выдающиеся ученые, дало толчок более широкому употреблению десятичных дробей в повседневной жизни и выработке методики их преподавания. В основу всех мер был положен метр, определенный как десятимиллионная часть четверти земного меридиана, а для установления точной длины метра были предприняты обширные геодезические измерения, одним из руководителей которых являлся названный выше Деламбр. Когда несколько позднее выяснилось, что фактическая длина метра несколько отличается от обусловленного его определения, это уже не повлекло за собой изменения принятого эталона. Метрическая система с самого начала была задумана «на все времена, для всех народов» с тем, чтобы заменить существовавшие тогда в каждой стране собственные меры. Быстрому распространению ее вначале мешало то обстоятельство, что она была создана революционной Францией, а в дальнейшем — сила традиции. Даже в самой Франции, после возвращения к власти Бурбонов в 1815 г., метрическая система перестала быть обязательной, и лишь в 1837 г. правительство Луи-Филиппа издало закон, по которому она с 1 января 1840 г. опять вводилась во всеобщее употребление. Однако преимущества метрической системы были настолько велики, что постепенно ее заимствовали одни государства за другими. В настоящее время лишь немногие страны, и среди них США, сохраняют старые недесятичные меры.

Наряду с десятичными дробями в теоретических исследованиях все большее место занимали непрерывные дроби. Здесь основная заслуга принадлежит Эйлеру, который в первой же своей статье, посвященной этому предмету, доказал ряд теорем своих предшественников и добавил некоторые новые. В этой статье, озаглавленной, в соответствии с терминологией Валлиса, «О непрерывных дробях» (De fractionibus continuis, Commentarii (1737) 1744)[1], Эйлер впервые указал приемы преобразования бесконечных непрерывных дробей в бесконечные же ряды и показал связь периодических дробей с квадратными уравнениями и квадратичными иррациональностями. Если, например,

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cdots}},$$

то $x - a = \dfrac{1}{b + x - a}$ и $x = a - \dfrac{b}{2} + \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{4}}$, в частности,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

[1] В XVIII в. появилось и другое название — цепная дробь, прежде всего в немецкой литературе (Kettenbruch).

Здесь же Эйлер индуктивно нашел представление в форме непрерывной дроби чисел e,

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

и некоторых других, с ними связанных; выражение для $4/\pi$, найденное в XVII в. Броункером (т. II, стр. 40), было ему известно. Впоследствии Эйлер много раз возвращался к изучению непрерывных дробей и применил их для представления функций и определенных интегралов, интегрирования дифференциальных уравнений, суммирования рядов и т. д. Популяризации непрерывных дробей содействовало «Введение в анализ бесконечных» (1748), в I томе которого им отведена целая глава. Здесь показано, в частности, что всякое рациональное число представимо конечной непрерывной дробью и что периодическая непрерывная дробь с числителями, равными единице, есть корень квадратного уравнения. Двадцать лет спустя Лагранж доказал, что и, наоборот, всякая квадратичная иррациональность выражается такого рода дробью (Mém. Ac. Berlin, (1768) 1770). Годом ранее он ввел в употребление непрерывные дроби со знакопеременными знаменателями (там же, (1767) 1769), которые затем употреблял и Эйлер. Нам еще придется говорить о важных применениях непрерывных дробей, в частности к приближенному вычислению корней алгебраических уравнений (см. стр. 83) и решению ряда вопросов теории чисел (см. стр. 105 и 112).

Учение о числе

К началу XVIII в. в распоряжении математиков имелась система комплексных чисел в полном объеме, и на протяжении первой половины века удалось распространить на отрицательные и мнимые числа все известные операции алгебры и анализа. Но в учении о числе по-прежнему встречались значительные психологические и логические трудности. С одной стороны, при обобщении понятия числа утрачивались некоторые привычные арифметические свойства, отражавшие свойства привычных реальных моделей; с другой — взаимосвязи между законами операций как в пределах какой-либо одной категории чисел, так и между различными категориями были еще мало изучены. Преодоление инерции мышления, связывавшего с общей идеей числа особенности, присущие только натуральным числам или абсолютным величинам, вроде геометрических фигур, и создание первой удовлетворительной модели комплексных чисел потребовали усиленной работы на протяжении всего столетия. Неудивительно, что некоторые видные ученые упорно продолжали трактовать не только мнимые, но и отрицательные числа как удобные для вычислений фикции и знаки, лишенные, однако, реального смысла.

Менее всего было сделано в арифметике натуральных чисел, поскольку она не причиняла каких-либо беспокойств. Сообразуясь с новыми педагогическими веяниями, авторы учебников стремились сообщить изложению арифметики натурального числа доказательный характер и с этой целью начинали его более или менее пространными списками аксиом и определений. Эти аксиомы, в значительной части заимствованные из «Начал» Евклида, подбирались мало критически, некоторые были лишними, и, вместе с тем, все они вместе были недостаточны для обоснования арифметики. Нередко авторы ограничивались формулировкой аксиом и после того ими уже не пользовались. Приведем для примера арифметические аксиомы X. фон Вольфа по русскому переводу его «Сокращения первых оснований мафиматики» (1770; ср. стр. 23).

1. $a = a$.

2. Если $a = b$, $c = b$, то $a = c$.

3—4. Если $a \gtrless b$, то $a \pm c \gtrless b \pm c$.

5. Если $a \gtrless b$, то $ac \gtrless bc$.

6. Если $a \gtrless b$, то $a : c \gtrless b : c$.

7. Если $a = b$, $c \gtrless a$, то $c \gtrless b$.

8. Целое есть сумма своих частей и больше каждой из них.

Девятая аксиома определяет транзитивность отношения:

9. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.

(Она вводится перед определением дробного числа.)

Из пяти основных законов арифметических действий чаще приводились переместительный и сочетательный для умножения и сложения, реже — распределительный относительно сложения для умножения и совсем редко все пять.

Задачу дедуктивного построения арифметики, исходя из немногих начал, поставил со всей определенностью Лейбниц. В качестве примера истины, на первый взгляд очевидной, в действительности же доказуемой и потому подлежащей доказательству, он привел равенство: два и два четыре. Принимая, что 1) каждое натуральное число, после 1, получается из предыдущего добавлением единицы и что 2) $m + (n + 1) = (m + n) + 1$, Лейбниц вывел это равенство следующим образом:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Идея Лейбница, изложенная им в «Новых опытах о человеческом разуме» (Nouveaux essais sur l'entendement humain), законченных в 1705 г., но увидевших свет только в 1765 г., была снова выдвинута Б. Больцано (1810) и подробно развита в теории натуральных чисел Г. Грассмана (1861). Следует тут же добавить, что в XVIII в. под натуральными числами понимали обычно количественные, т. е. собрания единиц, а не порядковые, которые определяются исключительно своим положением в ряду знаков 1, 2, 3, ..., и вообще не различали строго, к какой категории чисел относятся те или иные рассуждения. Самое выделение порядковых — ординальных и количественных — кардинальных числительных восходит, по крайней мере, к древним Египту и Вавилону. Латинские термины numeralia ordinalia и numeralia cardinalia встречаются в дошедшей литературе около 500 г. н. э. Принципиальное значение деления натуральных чисел на эти две категории было установлено Г. Кантором (стр. 49).

В решении поставленной Лейбницем задачи математики XVIII в. продвинулись недалеко. Их выводы опирались на неосознанные допущения, содержали логические пробелы и порочные круги. В частности, они постоянно неявно применяли принцип полной математической индукции, лежащий в основе теории натурального числа. Все же в поисках доказательств правил действий были выделены все пять основных законов сложения и умножения натуральных чисел, и большинство математиков пришло к убеждению в необходимости рассматривать их как собственно арифметические предложения, независимо от возможных истолкований. В этом отношении интересны «Первые основания чистой математики» (Anfangsgründe der reinen Mathesis, Königsberg, 1790) профессора математики Иоганна Шульца или Шульце (1739—1805), друга и философского единомышленника И. Канта. Включив в список аксиом переместительный и сочетательный законы сложения, Шульц вывел распределительный закон умножения и затем переместительный; доказательство сочетательного закона он не привел. Получившее известность в первой половине XIX в. построение арифметики натуральных чисел немецкого ученого М. Ома (1822) близко к данному Шульцем. Специальные названия законов счета появились несколько позднее в ходе дальнейших исследований по основаниям арифметики и алгебры. Французский артиллерийский офицер и преподаватель Ф. Сервуа ввел в 1815 г. термины «коммутативный» — переместительный и «дистрибутивный» — распределительный, а У. Гамильтон в 1843 г. слово «ассоциативный» — сочетательный.

Более глубокое исследование понятия натурального числа было предпринято лишь во второй половине XIX в. Г. Грассман, которого мы уже назвали ранее, разработал (1861) учение о порядковом числе в духе Лейбница, дополнив его отправные принципы еще двумя, определяющими умножение: 1) $m \cdot 1 = m$ и 2) $m\,(n + 1) = mn + m$, и присоединив в начале натурального ряда нуль — как знак, предшествующий знаку единицы [1]. Метод Лейбница — Грассмана был по существу своему индуктивным, но с особенной отчетливостью принцип полной математической индукции проявился в системе аксиом арифметики, предложенной итальянцем Дж. Пеано (1889). В дальнейшем развитии идеи количественного числа решающую роль сыграло введенное Г. Кантором (1878) понятие мощности множества, позволившее распространить эту идею на бесконечные множества. Кантор же обобщил на вполне упорядоченные бесконечные множества понятие порядкового числа и, выявив принципиальные различия между мощностями и порядковыми типами для бесконечных множеств, объяснил, почему натуральные числа характеризуют конечные множества одновременно и в количественном и в порядковом аспектах. В первой трети XX в., начиная с 1900 г., серию замечательных попыток полностью реализовать замысел Лейбница предпринял Д. Гильберт. Однако все старания дать законченное логическое построение арифметики натуральных чисел на базе какой-либо системы аксиом оказались тщетными. Причиной этого является то обстоятельство, что, как показал К. Гёдель (1932), во всякой формализованной арифметической системе можно высказать предложения, истинность или ложность которых нельзя установить на основе принятой системы аксиом.

В учении о рациональных дробях в XVIII в. отправлялись либо от концепций дроби как собрания равных долей единицы или же как частного двух натуральных чисел, не являющегося целым числом, либо от предложенного Ньютоном во «Всеобщей арифметике» (1707) общего определения положительного действительного числа как отношения двух однородных величин. При исследовании операций естественно вставали два главных вопроса. Сложение и вычитание, так же как расположение дро-

[1] К ряду «так называемых натуральных чисел» 0 «или ничто» отнес еще Эйлер в §19 «Универсальной арифметики» (1768).

бей по величине, опирались на равенство $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, а сокращение — на равенство $\frac{a:m}{b:m} = \frac{a}{b}$, где m — натуральное число. В рамках теории отношений, общей или же построенной для рациональных отношений, вывод этих равенств не представлял трудности, так же как определение операции умножения (и деления), равно пригодное для целых и дробей. Однако многие предпочитали исходить из концепции, независимой от теории отношений, и в этом случае мотивировали правила действий частью с помощью содержательного толкования самого определения дробей, частью молчаливо считая для них верными те или иные свойства системы натуральных чисел. Вообще и в этой области арифметики существенных результатов не было.

Сказанное относится и к иррациональным числам. Наиболее часто их определяли по Ньютону как отношения несоизмеримых величин и этим удовлетворялись, считая достаточными для обоснования античную теорию отношений и определения действий в «Геометрии» Декарта (1637) (см. т. II, стр. 34). Распространению этого определения на континенте Европы особенно содействовали учебники Вольфа, начавшие выходить всего через 3 года после курса алгебры Ньютона; мы видели, что так же определял действительное число Эйлер (см. стр. 40). Вместе с тем были сделаны первые попытки исследовать операции над иррациональными числами, отправляясь от их приближений рациональными числами, в частности, бесконечными десятичными дробями.

Такой подход, которому предстояло глубокое дальнейшее развитие, встречается в руководствах А. Г. Кестнера. вытеснивших в Германии второй половины XVIII в. учебники Вольфа и его непосредственных последователей и получивших известность и в других странах. В предисловии к «Первым основаниям арифметики, геометрии, плоской и сферической тригонометрии и перспективы» (Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv. 1. Aufl. Göttingen, 1758) [1] Кестнер выступил как сторонник обоснования всех понятий арифметики на идее целого числа: дроби суть целые числа, единицей которых служит часть выбранной вначале единицы, иррациональные величины суть дроби, единица которых переменна и представляет собой все меньшую и меньшую часть целого. Обоснование учения о дробях при помощи учения об отношениях, как у Вольфа, Кестнер считал принципиально неправильным. Соответственно выбран и общий план арифметической части книги: от натуральных чисел Кестнер переходит к дробям, затем к отрицательным числам, далее вводит некоторые буквенные обозначения, десятичные и шестидесятиричные дроби, иррациональные числа и уже после того излагает теорию отношений.

Иррациональные числа у Кестнера — это собственно алгебраические «неизвлекомые» корни. Любое такое число можно рассматривать как сумму рационального «начала» и «конца» (Ende), значение которого в точности всегда неизвестно, но который можно сделать меньше всякой данной величины. Кроме того, любое неизвлекомое число можно заключить

---

[1] Этот и другие курсы Кестнера, охватившие, кроме «анализа конечных величин» и «анализ бесконечного» (ср. название классического труда Эйлера), переиздавались более сорока лет. Русский перевод «Начальных оснований математики» (ч. 1—2, Петербург, 1792—1794) включает также алгебру, некоторые сведения о бесконечных рядах, аналитической геометрии на плоскости.

между двумя сколько угодно близкими рациональными приближениями. Эти соображения, сами по себе отнюдь не новые, используются для проверки свойств арифметических операций в области иррациональных чисел: для образца Кестнер доказывает приведением к нелепости переместительность умножения: если бы для иррациональных $x = A + a$, $y = B + b$ не выполнялось равенство $xy = yx$, то в силу возможности взять «концы» a и b сколь угодно малыми не было бы верно и $AB = BA$, где A и B — рациональные «начала». Правила раскрывать скобки при умножении двучленов здесь, очевидно, предполагаются. Кестнер добавлял, что аналогично можно вывести другие положения.

Как видно, Кестнер трактовал здесь иррациональное число как предел последовательности рациональных чисел, хотя и не пользовался термином «предел». Но он вовсе не определял иррациональные числа как пределы рациональных последовательностей, как не определял и операции в области иррациональностей. Существование корней вида $\sqrt[n]{a}$, где a не есть n-я степень какого-либо рационального числа, и возможность арифметических действий с ними принимались заранее. Сходные идеи мы находим позднее у русского артиллерийского офицера и любителя математики П. А. Рахманова, павшего на поле Лейпцигской битвы в 1813 г. В его «Новой теории содержания (отношения.— *Ред.*) и пропорции геометрической соизмеримых и несоизмеримых количеств, и в последнем случае основанной на теории пределов» (Москва, 1803) трактовка «неизвлекомых коренных величин» как пределов приближающих их снизу и сверху рациональных чисел и специально десятичных дробей выступает совершенно отчетливо. На этой основе и с помощью теории пределов (развитой, впрочем, недостаточно) П. А. Рахманов строил теорию отношений и выводил, например, что $\sqrt{6} : \sqrt{24} = 1 : 2$. Но и он, так же как Кестнер, сперва принимал существование «неизвлекомых» чисел и уже затем устанавливал их место среди рациональных. Так, соответственные члены последовательностей (A) 2; 2,4; 2,44 и (B) 3; 2,5; 2,45; ... имеют разности 1; 0,1; 0,01; ..., которые становятся меньшими любого данного числа; с другой стороны, «непременное число» $\sqrt{6}$ всякий раз заключается между соответственными членами (A) и (B) и, следовательно, есть предел десятичных дробей (A) или (B).

Кестнер и другие математики XVIII в., как и П. А. Рахманов, заботились, собственно, не столько о построении теории иррациональных чисел во всем объеме, сколько об обосновании алгебраических операций для алгебраических же иррациональностей. В том же столетии математики пришли к убеждению о существовании трансцендентных чисел, о чем говорится в третьей главе.

Первые строгие конструкции теории действительного числа, в которых иррациональные числа и операции над ними определялись на базе системы рациональных чисел, были опубликованы почти одновременно и независимо около 1870 г. В одной из этих теорий, разработанной Ш. Мерэ (1869—1872) и Г. Кантором (1872) независимо друг от друга, всякая сходящаяся последовательность рациональных чисел $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$, т. е. последовательность, элементы которой с неограниченным ростом номера неограниченно между собой сближаются, определяет действительное (рациональное или иррациональное) число. Кантор называл такие последовательности фундаментальными, а Мерэ — вариантами. Точнее говоря, последовательность $\{a_n\}$ именуется сходящейся, если для любого $\varepsilon > 0$

существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при всех $n > N$, $m > N$. Элементами $\{a_n\}$ могут быть, в частности, десятичные дроби. Сумма двух действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ вводится как число — последовательность $\{a_n + b_n\}$, очевидно сходящаяся вместе с первыми двумя; подобным же образом определяются другие арифметические действия. В системе действительных чисел Мерэ — Кантора осуществимо извлечение иррациональных корней, и вообще любая непрерывная функция действительного аргумента $f(x)$ однозначно определяется своими значениями для рациональных x. Другие теории действительного числа были предложены Р. Дедекиндом (см. т. I, стр. 97—98) и К. Вейерштрассом. Как видно, в понятии сходящейся последовательности Мерэ и Кантор использовали необходимый и достаточный критерий сходимости последовательности, сформулированный еще Больцано (1817) и Коши (1821). На основе теории Дедекинда этот критерий можно строго доказать для любой последовательности чисел. В теории Мерэ — Кантора этот критерий служит предварительным условием, выделяющим те последовательности рациональных чисел, которые принимаются в качестве определения действительных чисел; когда система последних уже построена, можно доказать, что и любая последовательность действительных чисел, сходящаяся в смысле Мерэ — Кантора, имеет действительный (рациональный или иррациональный) предел.

Отрицательные числа

Ньютоново общее определение числа охватывает только положительные действительные числа. Нуль и отрицательные числа вводились дополнительно. Нулем, писал Вольф, «в арифметике называется знак 0, которым мы обозначаем ничто» [1],— такая дефиниция была общепринятой. Вместе с тем нуль трактовали как целое число, предшествующее единице. Исходя из этого и из определений сложения и умножения натуральных чисел, иногда старались обосновать аддитивные и мультипликативные свойства нуля. Несколько употребительных определений отрицательного числа восходили к концепциям, сложившимся в XVI—XVII вв.

Сам Ньютон и некоторые другие ученые, как слепой английский математик Николай Сондерсон (1682—1739), «Начала алгебры» которого (Elements of algebra. London, 1740) были переведены также на французский (1756) и немецкий (1798) языки, определяли отрицательные количества как меньшие, чем ничто. Вслед за тем противоположность положительных и отрицательных чисел иллюстрировалась примерами имущества и долга, движения вперед и назад, направленных отрезков. Такое определение отрицательного числа само по себе недостаточно для обоснования правил операций. Это, вероятно, понимал Ньютон, который и не доказывал правила знаков при умножении и делении, но только их формулировал. Сондерсон считал возможным доказать эти правила, принимая, что некоторые свойства арифметической прогрессии, установленные в области положительных чисел, верны и для всех действительных чисел.

Определение Ньютона, восходящее через Декарта к Штифелю (т. I, стр. 316; т. II, стр. 36), удовлетворяло далеко не всех. Понимая под величиной только абсолютное значение, а под нулем ничто, многие считали

[1] *Chr. Wolff.* Mathematisches Lexicon. Hildesheim, 1965, S. 1486.

нелепым утверждение, что отрицательное число меньше нуля. Действительное количество не может быть меньше ничего, и любое отрицательное число, взятое само по себе, больше нуля. Так думали и Кестнер, и вслед за ним И. Кант (1724—1804), опубликовавший специальный «Опыт введения в философию понятия отрицательных величин» (Versuch den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen, 1763). Согласно Кестнеру, некоторые виды величин состоят из противоположных однородных величин, уменьшающих друг друга. При этом безразлично, какую из противоположных величин назвать положительной и какую отрицательной,— существенно только, что одна из соотносительных величин уменьшает другую. В известном смысле можно сказать, что отрицательная величина меньше ничего, именно она меньше нуля по сравнению с противоположной ей; собственно это означает, что сумма двух равных противоположных величин есть ничто.

Маклорен, Клеро, Эйлер определяли положительные числа как количества, прибавляемые и предшествуемые знаком плюс, а отрицательные как количества, вычитаемые и предшествуемые знаком минус. Высказав такое определение, Маклорен тут же добавлял, что оба вида количества «в равной мере действительны, но противоположны друг к другу, так что если они равны по количеству, то каждое из них уничтожает эффект другого при любом действии» [1]. В этой концепции в начальной форме содержатся и понимание относительных чисел как противоположных элементов кольца действительных чисел, связанных равенством $(+a) + (-a) = 0$, и трактовка их как противоположных операторов. Конечно, в XVIII в. было еще весьма далеко до теории колец и полей или же до операторной теории действительного числа и не проводилось ясное различение между символами $+$ и $-$ как знаками операций и как знаками относительных чисел.

Характерны для тогдашнего состояния учения о числе попытки вывести правила знаков. Маклорен прежде всего определяет общим образом вычитание как прибавление числа с обратным знаком,— сложение основывалось на самом определении противоположных чисел. Умножение на целое отрицательное число вводится как повторное вычитание. Трудности, возникающие при переходе к дробям, оставлены в стороне.

Маклорен счел нужным обобщить определения сложения и умножения для всех целых чисел. Чаще, однако, математики XVIII в. пытались обосновать эти операции, молчаливо допуская универсальность законов счета положительных или натуральных чисел, а также обращаясь к доводам «здравого разума». Примером может служить вывод правила знаков при умножении целых чисел в «Универсальной арифметике» Эйлера (т. I, 1768). Прежде всего, он показывает, что $(-a)(+b) = -ba$, для большей убедительности рассматривая множимое $-a$ как долг. Ни такую интерпретацию, ни определение умножения как повторного сложения нельзя использовать в случае отрицательного множителя. Эйлер заявляет, что $-ba = -ab$, т. е. принимает, считая само собой разумеющейся, коммутативность умножения в этом специальном случае. Далее Эйлер пишет: «Осталось теперь только упомянуть о следующем случае: когда — умножен будет на —, или $-a$ на $-b$, причем, во-первых, известно, что произведение в рассуждении литер (т. е. букв.— *Ред.*) будет ab, но должно ли к тому придать знак $+$ или $-$, о том сказать не можно, то только извест-

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of algebra in three parts. London, 1748, p. 6.

но, что один из оных знаков, или тот, или другой, быть должен. Но теперь вопрошаю: не может ли быть тут знак — ? Понеже $-a$, умноженное на $+b$, даст $-ab$, следовательно, $-a$, умноженное на $-b$, не может то же дать, что дает $-a$ на $+b$, но должно из того вытти противному, а имянно $+ab$» [1]. Таким образом, помимо существования произведения $(-a)(-b)$ в системе целых чисел, Эйлер допускал, как очевидные, коммутативность $(-a)(+b)$, равенство $|(-a)(-b)| = ab$ и неравенство $(-a)(-b) \neq \neq (-a)(+b)$.

В предисловии к своим «Началам алгебры» (1746) Клеро особенно подчеркивал важность доказательства правил «минус на плюс дает минус» и «минус на минус дает плюс» — правил, которые, «представляя собой на слух противоречие в словах, побуждают думать, что здесь имеется противоречие в вещах» [2]. Он прежде всего пытается доказать равенство $a(c-d) = ac - ad$, ограничиваясь случаем, когда $a > 0$, $c > d > 0$. Затем аналогично выводится равенство $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + + bd$ (причем $a > b > 0$), и в заключение Клеро утверждает, будто метод вывода, «не специфицируя какие-либо частные значения ни a, ни c» [3], должен сохранить силу и в случае равенства обоих этих количеств нулю, так что $(-b)(-d) = +bd$. Однако на самом деле все предыдущие рассуждения Клеро имели силу только в случае $a > b > 0$, $c > d > 0$. Исходное равенство $a(c-d) = ac - ad$ он мотивировал тем, что, поскольку $c - d$ меньше, чем c, на d, то и произведение $a(c-d)$ должно быть меньше, чем произведение ac, на ad. Не говоря уже о том, что такой вывод представляет собой простую перефразировку доказываемого распределительного свойства, его распространение на случаи $a \gtreqless 0$, $c < d$, уже на этом этапе потребовало бы установления правила знаков. Лаплас в лекциях, читанных в Политехнической школе в 1795 г., также неявно постулировал распределительный закон и применимость к отрицательным числам умножения на нуль: произведение $(-a)(+b-b) = 0$, $(-a)(+b) = -ab$, следовательно, $(-a)(-b) = +ab$ (Journal de l'École Polytechnique, 1812). Таким же образом можно предварительно доказать, что $(-a)(+b) = -ab$.

Все эти и другие попытки обосновать операции с отрицательными числами опирались на формальный и чаще всего неявный перенос в их область законов и свойств действий с положительными или с натуральными числами. Сходное явление имело место в математическом анализе, где законы и свойства конечных величин формально распространялись на бесконечные (см. седьмую главу). Создать логически совершенную теорию действий с относительными числами не удалось ни одному математику XVIII в. Это неудивительно, ибо, как уже говорилось, даже законы счета натуральных чисел были в полном объеме установлены только к исходу рассматриваемого времени. Во втором издании своего труда по основаниям анализа (1813; см. далее стр. 278) французский математик Л. Карно писал: «Метафизика правила знаков при более глубоком изучении ее обнаруживает, пожалуй, большие трудности, чем метафизика бесконечно малых количеств; это правило никогда не было доказано вполне удовлетворительным образом и, по-видимому, оно даже не может быть доказано достаточно удовлетворительно» [4]. В настоящее время мы не проводим дока-

---

[1] *Л. Эйлер.* Универсальная арифметика, т. I. Изд. 2. Петербург, 1787, стр. 19—20.
[2] *A. Clairaut.* Eléments d'algèbre. Paris, 1760, p. VIII.
[3] Там же, стр. 74.
[4] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. М.—Л., стр. 267—268.

зательств, подобных приведенным выше, но вводим отрицательные числа как объекты, с помощью присоединения которых система положительных чисел расширяется до кольца или же поля при сохранении основных законов сложения и умножения натуральных чисел.

Нелегко было преодолеть и психологические трудности, связанные с тем, что, как и ранее, привычные свойства положительных чисел казались обязательными и для отрицательных. Данцигский математик Г. Кюн в переписке с Эйлером вновь поставил вопрос о парадоксе Арно, состоящем в том, что в пропорции $+1:-1=-1:+1$ отношение большего числа к меньшему равно отношению меньшего числа к большему (см. т. II, стр. 36). 22 августа 1735 г. Эйлер писал другому своего данцигскому корреспонденту, К. Л. Элеру, для передачи Кюну, что в рассматриваемой пропорции нет противоречия и она лишь парадоксальна. Дело лишь в том, что к этой пропорции неприменимы слова и выражения, которыми привыкли пользоваться, когда члены пропорции положительны. «Не слова, однако, составляют пропорцию, а математическое понятие, которое расширяется» [1]. И далее Эйлер критиковал Вольфа, полагавшего, что положительные и отрицательные величины разнородны и потому не могут находиться между собой в отношении. В том же году Эйлер в отзыве на одну присланную Петербургской академии наук статью Кюна писал, что в различных задачах могут находить применение различные по свойствам виды чисел и что «в отношении задач то один, то другой вид будет как бы мнимым» [2]. Однако эта точка зрения пробивала себе дорогу медленно. Еще в 1831 г. Гаусс писал: «Насколько не опасаются вводить в общую арифметику дробные числа, хотя существуют так много пересчитываемых вещей, в применении к которым дробь не имеет никакого смысла, настолько же не следует отказывать отрицательным числам в правах, равных с положительными, потому только, что многие вещи не допускают противоположения. Реальность отрицательных чисел достаточно определяется тем, что в бесчисленных других случаях они находят адекватную основу» [3].

На протяжении всего XVIII в. находились ученые — Вольф, Даламбер, Клеро, Гурьев и немало других, которые рассматривали отрицательные числа лишь как удобные знаки фиктивных понятий, лишенных реального содержания. Против реальности отрицательных чисел выдвигались разнообразные доводы, начиная с простейших, вроде того, что величины по своей природе положительны или что нельзя отнять какую-либо величину от ничего, и кончая сложными геометрическими софизмами, казалось бы опровергающими обычную геометрическую интерпретацию относительных чисел. Даламбер выступил с возражением против существования изолированных отрицательных чисел в ряде статей «Энциклопедии», (Négatif — «отрицательное», Positif — «положительное» и др.), Карно — в «Геометрии положения» (1803; см. стр. 200). Разумеется, оба они не отвергали общеизвестных правил действий с отрицательными числами, но лишь стремились обосновать как эти правила, так и получаемые с их помощью результаты в терминах арифметики положительных чисел. Согласно основному принципу теории Карно, отрицательное решение какой-либо задачи

---

[1] *Л. Эйлер.* Письма к ученым. М.—Л., 1963, стр. 312—313, 324.

[2] Цит. по книге: *В. Н. Молодший.* Основы учения о числе в XVIII и начале XIX веков. М., 1963, стр. 123.

[3] Цит. по книге: *А. В. Васильев.* Введение в анализ, вып. II. Казань, 1908, стр. 55.

выражает разность двух количеств, большее из которых было принято в условии задачи за меньшее, а меньшее — за большее. Мы можем, впрочем, оставить без рассмотрения сходства и различия теорий Даламбера и Карно. Поскольку, в конце концов, в самих операциях и применениях алгебры ничто не изменялось, спор о реальности или фиктивности понятия отрицательного числа приобретал в сущности терминологический характер; вместе с тем в обосновании правил операций прогресс достигнут не был. Но критические замечания Даламбера и Карно раскрывали действительно слабые стороны современных им учений о числе и о величине. «Утверждать,— писал Карно,— что изолированное отрицательное количество меньше нуля, это значит облечь математику, которая должна быть наукой прозрачной, в непроницаемый туман и углубиться в лабиринт парадоксов, одних более странных, чем другие. Сказать, что это просто количество, противоположное положительным количествам, это значит ничего не сказать, потому что затем надо будет объяснить, что это за противоположные количества. Прибегать для этого объяснения к новым первоначальным идеям, подобным идеям материи, времени и пространства,— это значит сознаться, что затруднение считается неразрешимым, и породить новые затруднения» [1]. И к этому Карно добавляет: если в качестве примера противоположных количеств приведут движение к востоку или движение к западу, или соответственно к югу и северу, то что означает движение к северо-востоку, к юго-юго-западу и т. д. и какими символами такие количества могут быть выражены в вычислении?

Первые арифметические теории отрицательного числа были разработаны во второй трети XIX в. Гамильтоном и Грассманом. Но ответ на только что упомянутый вопрос, поставленный Карно, был дан еще в конце XVIII в. в геометрической теории комплексного числа, созданной К. Весселем, к которой мы вскоре обратимся. В этой теории естественное объяснение получили и правила знаков действий с относительными числами.

Мнимые и комплексные числа

Во II томе мы видели, что мнимые величины, появившиеся в XVI в., были еще в XVII в. окружены ореолом «амфибии между бытием и небытием»; этот ореол рассеялся только в XVIII в.

В настоящее время система комплексных чисел может быть определена как минимальное поле, содержащее поле действительных чисел и еще элемент i, квадрат которого равен -1, т. е. корень уравнения $x^2 + 1 = 0$ (существуют и другие приемы число арифметического введения комплексных чисел). Любое комплексное чисто можно записать в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа; комплексные числа, не являющиеся действительными ($b \neq 0$), называются мнимыми числами. Комплексные числа $a + bi$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие с парами действительных чисел a, b и с точками плоскости, имеющими эти пары чисел своими координатами. Над комплексными числами определены сложение, вычитание и умножение по правилу сложения, вычитания и умножения многочленов, причем квадрат i^2 заменяется на -1, а деление на комплексные числа, отличные от 0, совпадает с умножением на число

[1] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 282.

$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$. Все пять основных законов счета при этом выполняются.

В XVII в. и в начале XVIII в. мнимыми называли любые «количества», возникающие при каких-либо действиях над действительными числами, но отличные от последних. Предполагалось, что оперировать с ними можно по обычным правилам арифметики, но было неясно, какие «мнимости» могут встретиться в математике и даже только при решении алгебраических уравнений. Мы видели, что Лейбниц из-за случайной ошибки в вычислениях пришел к заключению, что существуют мнимости, принципиально отличные от чисел вида $a+b\sqrt{-1}$ (т. II, стр. 38). Лишь Даламбер и Эйлер установили, что все известные в то время операции алгебры и анализа приводят к числам этого вида.

Однако еще до установления этих общих результатов в теории мнимых величин были поставлены проблемы и сделаны открытия, далеко идущее значение которых выяснилось только позднее. В самом начале века встал вопрос о логарифмах отрицательных чисел, обсуждавшийся Лейбницем и И. Бернулли,— к этой проблеме, лежащей вне алгебры, мы обратимся в дальнейшем (стр. 325). Здесь же мы, прежде всего, остановимся на решении общей задачи об извлечении корня n-й степени из данного числа, решенной Муавром и Коутсом (ср. т. II, стр. 52).

Еще Виет показал, что корни кубического уравнения в неприводимом случае, когда они все действительные, можно представить в действительной форме, если отождествить уравнение с выражением для синуса тройного угла. Зная правила определения синусов кратных дуг, Виет сумел в одном случае найти все положительные корни некоторого уравнения 45-й степени (т. I, стр. 312). Муавр в некотором смысле развил идеи Виета, имея в своем распоряжении соотношение между синусами двух дуг, относящихся как $n:1$, которое Ньютон привел в письме к Лейбницу от 13 июня 1676 г. (т. II, стр. 47) и которое тот же Муавр вывел в «Philosophical Transactions» за 1698 г. при помощи теоремы о степени многочлена (см. стр. 98).

Знаменитая «формула Муавра» впервые появилась в небольшой статье «Аналитическое решение некоторых уравнений третьей, пятой, седьмой, девятой и высших следующих до бесконечности степеней в конечном виде, аналогичное правилам Кардано для кубических уравнений» (Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicis quae vocantur Cardani resolutio analytica. Philos. Trans., 1707). В статье рассматриваются уравнения

$$ny+\frac{nn-1}{2\cdot3}ny^3+\frac{nn-1}{2\cdot3}\frac{nn-9}{4\cdot5}ny^5+\frac{nn-1}{2\cdot3}\frac{nn-9}{4\cdot5}\frac{nn-25}{6\cdot7}ny^7+\ldots=a, \quad (1)$$

$$ny+\frac{1-nn}{2\cdot3}ny^3+\frac{1-nn}{2\cdot3}\frac{9-nn}{4\cdot5}ny^5+\frac{1-nn}{2\cdot3}\frac{9-nn}{4\cdot5}\frac{25-nn}{6\cdot7}ny^7+\ldots=a \quad (2)$$

(оба содержащие конечное число членов при нечетном n), а также их решения для (1) в виде

$$y=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a} \quad (3)$$

и еще в трех эквивалентных формах, а для (2) в виде

$$y=\frac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{a-\sqrt{aa-1}} \qquad (4)$$

и также в трех равносильных формах. Статья содержала два числовых примера, и в одном из них мимоходом был сделан намек на происхождение уравнения (2), которое представляет собой зависимость между синусом y дуги α и синусом a дуги $n\alpha$ [1]. С помощью замены $y = \sin\alpha$, $a = \sin n\alpha$ мы могли бы переписать формулу (4) в виде

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha+\sqrt{-1}\cos n\alpha}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha-\sqrt{-1}\cos n\alpha}\,.$$

Это равенство равносильно формуле

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha,$$

которую мы теперь называем по имени Муавра (ср. стр. 323).

Что касается уравнения (1), то в терминах теории гиперболических функций, начала которой были заложены в середине XVIII в. В. Риккати и И. Г. Ламбертом (стр. 330), его можно рассматривать как разложение $\operatorname{sh} n\alpha = a$ по степеням $\operatorname{sh}\alpha = y$. Напомним, что гиперболические косинус и синус определяются через показательную функцию

$$\operatorname{ch}\alpha=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2},\qquad \operatorname{sh}\alpha=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$$

и связаны между собой зависимостью $\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1$. Формулу (3) можно поэтому записать и так:

$$\operatorname{sh}\alpha=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\operatorname{ch} n\alpha+\operatorname{sh} n\alpha}-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\operatorname{ch} n\alpha-\operatorname{sh} n\alpha}\,.$$

Выражения (1) и (2), а также соответственно (3) и (4) между собой тесно связаны и переводятся одни в другие с помощью мнимых подстановок, равно как одноименные гиперболические и тригонометрические функции $\operatorname{ch}\alpha = \cos i\alpha$, $i\operatorname{sh}\alpha = \sin i\alpha$. Последние два уравнения представляют собой лишь другую запись формул Коутса — Эйлера, о которых говорится далее (стр. 61 и 324).

Пятнадцать лет спустя в «Philosophical Transactions» за 1722 г. (1724) Муавр продвинулся далее, рассмотрев вопрос о выражении всех корней уравнения (2) с помощью теоремы Коутса о разложении на множители двучлена $a^n \pm x^n$ (стр. 61). Более полно теория извлечения корней была изложена в «Аналитических этюдах о рядах и квадратурах» (Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londini, 1730). Здесь читатель на первой же странице знакомится с формулой

$$x=\frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}+\frac{1/2}{\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}},$$

[1] Разложение (2), приведенное Ньютоном, вновь вывел, наряду с аналогичным разложением для $\cos n\alpha$, Я. Бернулли (Mém. Ac. Paris (1702) 1704). Несколько ранее И. Бернулли опубликовал разложения $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ по произведениям степеней $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ (Acta Eruditorum, 1701).

где $x = \cos \alpha$, $l = \cos n\alpha$, которая следует из выведенных несколько далее основных уравнений деления углов:

$$z^{2n} - 2lz^n + 1 = 0, \qquad z^2 - 2xz + 1 = 0.$$

Решив относительно z^n и z эти два уравнения, принадлежащие, по терминологии Эйлера, к числу возвратных, т. е. не меняющих свой вид при замене z на $1/z$ (см. стр. 86), легко вывести формулу Муавра в привычном теперь виде. Сам Муавр этого не сделал, и современной записью, как и новым, более простым выводом (при натуральных значениях n), мы обязаны Эйлеру (опубл. 1748, см. стр. 323). Кроме того, Муавр подробно рассмотрел разложение на линейные и квадратичные множители двучлена $z^n - 1$, равносильное определению всех n значений $\sqrt[n]{1}$ в тригонометрической форме. Все формулы и теоремы были снабжены доказательствами. Наконец, в статье, напечатанной в «Philosophical Transactions» за 1738 г. (1740), Муавр распространил исследование на извлечение корней из комплексных чисел вида $a + \sqrt{-b}$, подробнее остановившись на случаях $n \leqslant 7$.

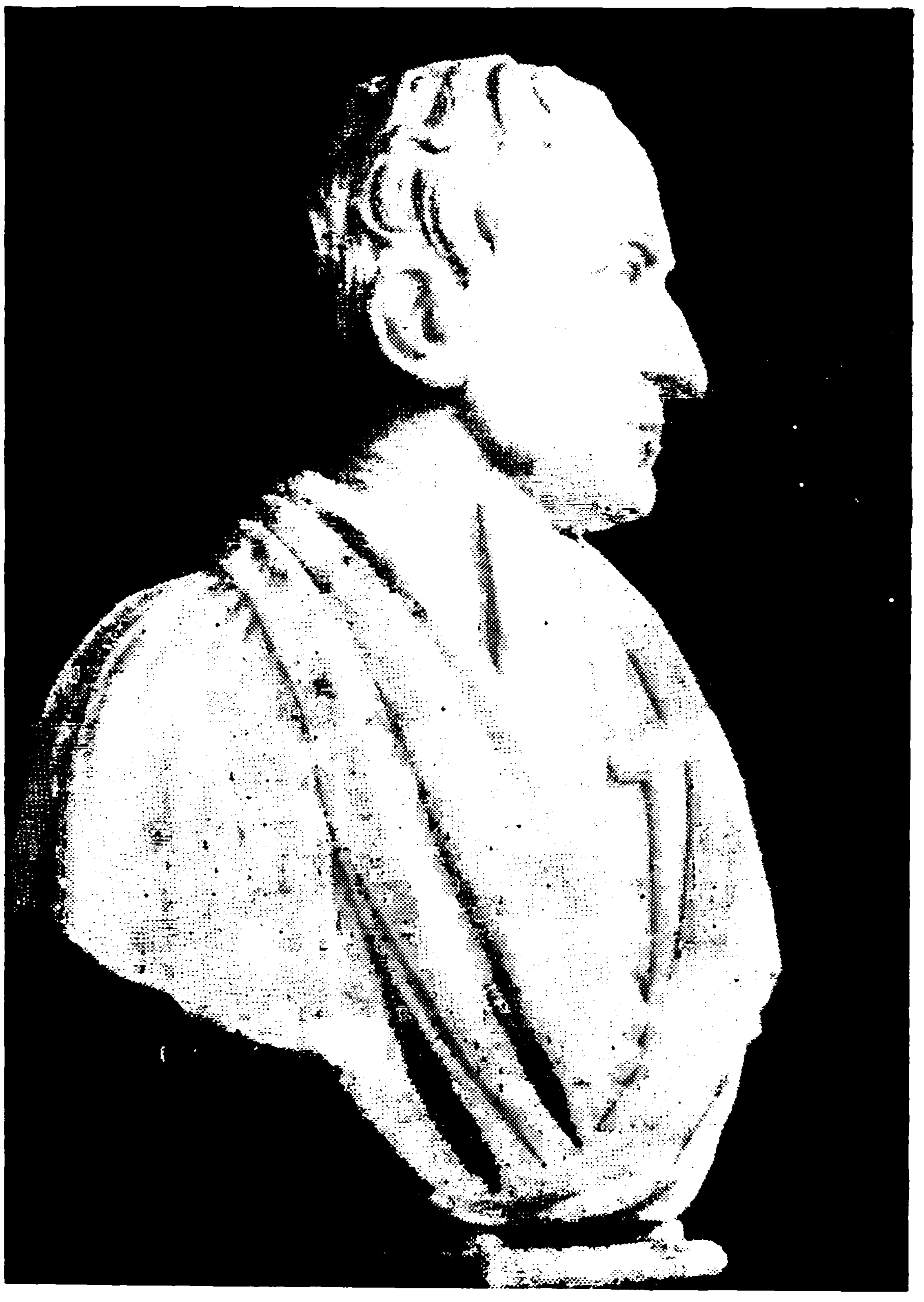
Полное изложение доказательств Муавра заняло бы много места, и мы сделаем лишь несколько замечаний. К уравнению (1) он пришел, решая задачу о делении на n равных частей сектора равносторонней гиперболы, ограниченного двумя радиус-векторами, проведенными из центра в вершину и еще какую-либо точку кривой, и ее дугой между этими двумя точками. Найдя средствами метода флюксий и бесконечных рядов уравнение (1) и его решение (3), Муавр заметил чрезвычайное сходство между уравнениями (1) и (2), которое выражает задачу о делении на n равных частей угла или, что сводится к тому же, кругового сектора. Это обстоятельство и аналогия между уравнениями окружности $x^2 + y^2 = 1$ и равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, отличающимися только знаком, навело его на мысль, что решение уравнения (2), т. е. (4), можно получить посредством перемены в соответствующей части вычислений некоторых знаков. Весьма вероятно, что первоначально он получил результат с помощью мнимых подстановок вида $u = \sqrt{-1}\, v$, о которых, однако, в «Аналитических этюдах» ничего не говорится (ср. стр. 325). В пользу такого предположения свидетельствует письмо Муавра Иоганну Бернулли от 17 июля 1708 г., в котором он употребил такого рода подстановку для доказательства формулы тангенса n-кратного аргумента, примененной незадолго до того Дж. Мечином при приближенном вычислении π (см. стр. 331)[1].

Исследования по теории комплексных чисел Муавра частью переплетались, как мы только что видели, с работами Роджера Коутса (1682—1716), воспитанника и с 1706 г. профессора астрономии и физики Кембриджского университета. Талантливый и трудолюбивый ученый, Коутс[2] вписал свое имя в историю не только математики, но и механики. В 1709—1713 гг. он помогал Ньютону в подготовке второго издания «Математических начал натуральной философии». Участие Коутса было очень вели-

---

[1] Ср. цитаты из «Аналитических этюдов» в примечании С. Я. Лурье к книге: *Л. Эйлер*. Введение в анализ бесконечных, т. 1. Изд. 2. М., 1961, стр. 295—300.— На применение мнимых подстановок Муавра несомненно натолкнуло знакомство с работой И. Бернулли об интегрировании рациональных дробей (1703; ср. далее стр. 352).

[2] Часто встречающееся написание этой фамилии «Котес» неправильно.



Р. Коутс
(бюст работы П. Шимейкерса 1758 г., хранящийся в Тринити колледже, Кембридж)

ко: он исправил или побудил автора исправить многие неточности в доказательствах, вычислениях и даже в экспериментальной части, и ему было доверено написать обширное предисловие к новому изданию, содержащее яркое изложение принципов натурфилософии Ньютона и наряду с ним критику учения о вихрях Декарта и близких к этому учению взглядов на механизм движений небесных тел Лейбница. Ньютон очень высоко ценил дарование своего молодого помощника и после ранней его смерти говаривал: «будь Коутс жив, мы узнали бы еще кое-что».

В «Philosophical Transactions», (1714)1717, Коутс напечатал обширную статью «Измерение отношений» (Logometria), содержавшую теорию логарифмических функций, которые он назвал «мерами отношений». Меру отношений он вводил, если выразиться по-современному, функциональным уравнением $f\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right] = nf\left(\frac{a}{b}\right)$ с исходным условием $f\left(\frac{a}{a}\right) = 0$, после чего в некоторых предположениях доказывал, что мера $\frac{a}{b} = f\left(\frac{a}{b}\right) = M \ln\frac{a}{b}$, где M — определенным образом выбранная постоянная.

В этой работе уже содержалось замечательное соотношение $\ln(\cos x + i \sin x) = xi$, равносильное формуле Эйлера, связывающей показательную и тригонометрическую функции (см. стр. 324). Сам Коутс высказал это предложение, ставшее одним из основных в теории функций, мимоходом и не дал ему каких-либо применений. Вот собственная формулировка Коутса: «Если какая-либо дуга четверти круга, описанная радиусом CE, имеет синус CX и синус дополнения до четверти XE и если принять радиус CE за модуль, то дуга будет мерой отношения $EX + XC\sqrt{-1}$ к CE, умноженной на $\sqrt{-1}$» [1].

Когда Коутс скончался, его сочинения были собраны заменившим его на кафедре профессором Робертом Смитом (1689—1768) в книге «Гармония мер, или анализ и синтез, развитые с помощью мер отношений и углов и т. д.» (Harmonia mensurarum, sive analysis et synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae, etc. Cantabrigiae, 1722). Сюда вошла в качестве первой части «Логометрия», а вторая часть посвящена интегрированию рациональных и тригонометрических функций. В дополнении ко второй части была опубликована уже упомянутая теорема о разложении на действительные множители первой и второй степени двучленов вида $a^n \pm x^n$, обнаруженная Смитом в бумагах Коутса. Сам Коутс выразил ее в геометрических терминах, но перевод на язык алгебры не представлял труда. В случае $a^n - x^n$ и нечетного n множителями являются $a - x$ и квадратичные трехчлены вида $a^2 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n}x + x^2$, где $2k = 2, 4, \ldots, n-1$; при четном n множители суть $a - x$, $a + x$ и трехчлены $a^2 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n}x + x^2$, где $2k = 2, 4, \ldots, n-2$. Очевидно, что теорема позволяет записать в тригонометрической форме все значения корня n-й степени из положительного числа a. Разложение на множители двучлена $a^n + x^n$ аналогично. Доказательство теоремы в бумагах Коутса отсутствовало, и его впервые привел в своих «Аналитических этюдах» Муавр.

Несмотря на эти выдающиеся достижения, операция извлечения корня еще долгое время представляла некоторые трудности. Даже Эйлер не избежал в одном случае промаха и в своей «Универсальной арифметике» (т. I, 1768) заявил, что произведение двух «невозможных» чисел может быть положительным: так как вообще $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, то $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$; правда, далее добавлено, что $\sqrt{4} = \pm 2$. Большинство математиков, обративших внимание на это место, не согласилось с выводом Эйлера, но при отсутствии четких определений правил действий с мнимостями их собственные доводы были недостаточно обоснованы.

Общее утверждение, что любой целый алгебраический многочлен с действительными коэффициентами раскладывается на линейные и квадратичные множители с действительными же коэффициентами (т. е. что корни любого алгебраического уравнения с такими коэффициентами имеют вид $a + b\sqrt{-1}$), впервые высказал с полной ясностью Л. Эйлер в письме к Николаю I Бернулли от 1 сентября 1742 г. Лейбниц, как мы видели (см. т. II, стр. 38), был другого мнения. Николай Бернулли и Гольдбах, которому Эйлер также вскоре сообщил этот, пока еще недоказанный, результат, сперва пытались построить противоречащие примеры, тут же опровергнутые Эйлером. Затем Николай Бернулли полностью согласил-

[1] «Philosophical Transactions», (1714) 1717, N 338, p. 32.

ся с Эйлером и в письме к нему от 6 апреля 1743 г. заявил, что любые мнимые величины приводятся к форме $a + b\sqrt{-1}$. К такому же заключению пришел в «Размышлениях об общей причине ветров» (Réflexions sur la cause générale des vents. Berlin, 1747) Даламбер. Он исследовал здесь и природу выражения $(a + b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$. Для доказательства равенства

$$(a + b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$$

он принял основание $a + b\sqrt{-1}$ и степень $A + B\sqrt{-1}$ переменными и, применяя логарифмическое дифференцирование, получил равенство

$$(g + h\sqrt{-1})\frac{d(a+b\sqrt{-1})}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{d(A+B\sqrt{-1})}{A+B\sqrt{-1}}.$$

Отделяя затем действительную и мнимую части, Даламбер выразил $A^2 + B^2$ и $\operatorname{arctg} B/A$ через g, h, $a^2 + b^2$ и $\operatorname{arctg} b/a$.

Этот же вопрос рассматривал Эйлер в «Исследованиях о мнимых корнях уравнений» (Recherches sur les racines imaginaires des équations. Mém. Ac. Berlin, (1749)1751) при доказательстве основной теоремы алгебры. В начале этой статьи Эйлер подчеркивает, что он не определяет заранее мнимые числа как выражения $a + b\sqrt{-1}$. «Мнимым количеством называют такое, которое ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равно нулю; это, следовательно, нечто невозможное, как, например, $\sqrt{-1}$ или вообще $a + b\sqrt{-1}$, поскольку такое количество ни положительно, ни отрицательно, ни нуль» [1]. Доказываемую им теорему, о которой будет говориться далее (см. стр. 74), Эйлер рассматривает как частный случай следующего общего предложения: «Всякое мнимое количество всегда образовано двумя членами, один из которых есть действительное количество, обозначаемое через M, а другой — произведение также действительного количества N на $\sqrt{-1}$; таким образом, $\sqrt{-1}$ есть единственный источник всех мнимых выражений» [2].

Для доказательства Эйлер применяет к числам вида $a + b\sqrt{-1}$ различные алгебраические и трансцендентные операции и убеждается, что результат является числом того же вида. «Итак, поскольку,— пишет Эйлер,— все мнимые количества, образованные трансцендентными операциями, также заключаются в общей форме $M + N\sqrt{-1}$, мы сможем, не колеблясь, утверждать, что вообще все мнимые количества, какими бы сложными они ни являлись, всегда приводимы к виду $M + N\sqrt{-1}$» [3].

Необходимо заметить, что самая постановка задачи — доказать, что любое мнимое количество имеет вид $a + b\sqrt{-1}$,— страдала в XVIII в. неопределенностью, поскольку не был, да и не мог быть, заранее точно очерчен круг операций, порождающих эти любые мнимости. Фактически задача решалась для наиболее важных классов функций, с которыми тогда имели дело, т. е. для отдельных «аналитических выражений» (см. стр. 250).

---

[1] *L. Euler.* Opera omnia, series I. Opera mathematica, t. 6. Leipzig — Berlin, 1921, p. 79.

[2] Там же, стр. 121.

[3] Там же, стр. 147.

Как ни велики были достижения в исследовании свойств мнимых величин и их приложений, как ни сходны были законы операций над ними с законами, управляющими действительными числами, они оставались в глазах математиков XVIII в. полезными фикциями, лишенными самостоятельного реального значения. Попытка геометрического истолкования мнимых чисел, предпринятая Валлисом (см. т. II, стр. 37), долгое время не находила удовлетворительного продолжения. Сходную интерпретацию мнимых чисел подробнее развил уже упоминавшийся данцигский преподаватель математики Генрих Кюн (1690—1769). В статье, помещенной в «Novi Commentarii», (1750—1751) 1753, он присваивал площадям положительные и отрицательные значения, а мнимые числа истолковывал как стороны квадратов отрицательной площади. Об истолковании операций над мнимыми числами у Кюна не было и речи. Эйлер, редактировавший математический отдел новой серии «Записок» Петербургской академии, был очень недоволен публикацией статьи Кюна, и по его настоянию в том же томе, что и она, было напечатано в качестве ее резюме редакционное замечание: «Это рассуждение по своему значению таково, что о нем ничего нельзя сказать по характеру его изложения; поэтому мы хотим, чтобы читатели посмотрели самое рассуждение» [1].

В некоторых работах Даламбера и Эйлера (см. стр. 169) по механике и геометрии комплексные числа и аналитические функции, точнее, их действительные части и коэффициенты при $\sqrt{-1}$, ставились в соответствие с реальными величинами — скажем, проекциями скорости частицы жидкости или координатами точки на плоскости. Однако ни Эйлер и Даламбер, ни другие математики XVIII в., поступавшие так же, не пришли при этом к истолкованию комплексных чисел как таковых. Для такого истолкования было недостаточно переходить при вычислениях от числа $a+b\sqrt{-1}$ к точке с координатами a, b и обратно; для этого нужно было еще интерпретировать действия над комплексными числами, а этого не делали. Тригонометрическая запись комплексного числа, которой не раз пользовались те же Эйлер и Даламбер, также не навела их на геометрическое истолкование мнимых величин.

Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и основных действий над ними было впервые предложено норвежцем Каспаром Весселем (1745—1818), работавшим геодезистом-картографом Датской академии наук. Оно содержится в его единственном математическом труде, поданном академии в 1797 г. и два года спустя напечатанном в ее записках: «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников» (Om directionens Analytiske Betegning et Forsög anwendt fornemellig til plane og sphaeriske Polygoners oplösning. Danske Vidensk. Selsk. skr., 1799). Целью Весселя было создать удобный аппарат решения геодезических задач, для чего он впервые систематически разработал векторное исчисление на плоскости, тут же выступающее как геометрическая модель алгебры комплексных чисел. Идея выразить изменение направления отрезка (слово «вектор» ввел У. Гамильтон) с помощью алгебраических символов формулируется совершенно отчетливо. «Настоящий опыт,— писал он,— предпринимается с целью узнать, как аналитически представлять направление», и «посредством одного только уравнения, связываю-

[1] «Novi Commentarii Ac. Sci. Petropolitanae», t. III, Summarium, p. 18.

щего один неизвестный отрезок и несколько известных отрезков, получить такое выражение, которое сразу представляло бы искомый отрезок как по величине, так и по направлению»[1]. Обычные алгебраические операции позволяют изменить направление только на противоположное, т. е. положительное на отрицательное и наоборот. Создание исчисления отрезков, имеющих на плоскости произвольные направления, требует обобщения алгебры; нужно «расширить определения алгебраических операций, но так..., чтобы не было противоречия со старой теорией чисел...»[2].

В цитированных только что словах Вессель сжато высказал одну из основных идей того метода введения определений при обобщении понятия числа, который основан на так называемом принципе перманентности формальных законов счета. Суть этого принципа заключается в том, что при построении новой, более широкой по сравнению с исходной, системы чисел операции в ней обобщаются таким образом, что остаются в силе (латинское permanere значит оставаться, сохраняться) основные законы одноименных действий над числами исходной системы. Фактически вплоть до начала XIX в. переход от натуральных чисел к дробным, отрицательным, иррациональным и мнимым, какими бы причинами в каждом отдельном случае он ни был вызван, всегда происходил так, что действия над новыми символами подчинялись пяти законам счета и не были в противоречии с одноименными прежними действиями. Идея принципа перманентности возникала у многих, например, Валлиса (1685), когда он указывал, что над иррациональными корнями можно производить арифметические действия, хотя их нельзя выразить с помощью «истинных» чисел. Вессель, по-видимому, первый высказал сформулированное им требование в общей и явной форме. Более полное выражение эти идеи нашли у Дж. Пикока (1833) и Г. Ганкеля (1867), последнему принадлежит и само выражение «принцип перманентности формальных законов».

Построение алгебры компланарных векторов и комплексных чисел у Весселя очень сходно с тем, какое можно найти в руководствах нашего времени, только Вессель еще не ставил некоторые более тонкие вопросы. Так, обойден вопрос о равенстве направленных отрезков и для сложения и умножения их, определяемых точно так, как теперь, проверено выполнение лишь отдельных законов счета. Применяя правило умножения к основным единицам, обозначаемым $+1$, -1, $+\varepsilon$, $-\varepsilon$, Вессель вывел следующие формулы:

$$\begin{aligned}
(+1)(+1) &= +1, & (-1)(+\varepsilon) &= -\varepsilon,\\
(+1)(-1) &= -1, & (-1)(-\varepsilon) &= +\varepsilon,\\
(-1)(-1) &= +1, & (+\varepsilon)(+\varepsilon) &= -1,\\
(+1)(+\varepsilon) &= +\varepsilon, & (+\varepsilon)(-\varepsilon) &= +1,\\
(+1)(-\varepsilon) &= -\varepsilon, & (-\varepsilon)(-\varepsilon) &= -1.
\end{aligned}$$

«Отсюда следует,— заключал Вессель,— что ε равно $\sqrt{-1}$ и что таким образом определенное отклонение (угол с направлением положительной единицы.— *Ред.*) произведения не противоречит обычным правилам опера-

[1] Цит. по французскому переводу: *C. Wessel.* Essai sur la représentation analytique de la direction, avec des applications etc. Copenhague, 1897, p. 3.
[2] Там же.

ций»[1]. Направленному отрезку ставится в соответствие комплексное число в тригонометрической форме $r(\cos v + \varepsilon \sin v)$ и рассматриваются все операции над комплексными числами, причем формула Муавра доказывается и для случая дробного рационального показателя. В качестве примера приложений своего исчисления Вессель решил ряд задач на сферические многоугольники.

Так, в «геометрическом анализе» Весселя нашли реальное истолкование и обоснование комплексные числа и действия над ними и, в частности, отрицательные числа. Понятия. в течение двухсот пятидесяти лет представлявшиеся только удобными фикциями, получили ясный реальный смысл, а сам термин «мнимое число» стал всего лишь историческим пережитком.

Своеобразно реализовав мечту Лейбница о геометрическом исчислении для компланарных векторов, Вессель пошел далее, попытавшись обобщить комплексные числа так, чтобы аналитически представить и векторы в трехмерном пространстве. При этом он высказал плодотворную идею относительно связи произведения таких векторов с вращениями пространства. Однако обобщение алгебры комплексных чисел, которого и после Весселя искал ряд математиков, удалось только У. Гамильтону, построившему теорию кватернионов.

К сожалению, замечательный труд Весселя стал известен широким кругам математиков только в конце XIX в., после того как в 1897 г. Датская академия наук опубликовала его французский перевод. В конце XVIII и в начале XIX в. к геометрическому истолкованию комплексных чисел пришли и другие ученые, среди которых назовем жившего в Париже уроженца Женевы Жана Робера Аргана (1768—1822). «Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях» (Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris, 1806) Аргана, изданный анонимно, также оставался незамеченным, пока Жозеф Диаз Жергон (1771—1859), основатель математического журнала «Annales de mathématiques pures et appliquées» («Анналы чистой и прикладной математики»), не опубликовал эту работу в четвертом томе своего журнала (1813/14); тут же развернулась и оживленная полемика по вопросу об истолковании мнимых чисел. После этого сочинение Аргана получило широкую известность. Плоскостью комплексного переменного пользовался по существу Гаусс в своей диссертации (1799), о которой мы будем говорить ниже, и в совершенно явной форме — в «Теории биквадратичных вычетов» (1831) (см. стр. 124). Год спустя У. Гамильтон построил чисто арифметическую теорию комплексных чисел, рассматриваемых как пары действительных чисел (опубл. 1837); любопытно, что обоснование арифметики дробей, как пар целых чисел, было дано много позднее — Ж. Таннери в 1894 г. Наряду с теорией Гамильтона были предложены и другие подходы к обоснованию комплексных чисел, на которых мы не можем останавливаться. Отметим только один момент: обобщением комплексных чисел явились числовые системы со многими единицами, начиная с кватернионов Гамильтона. Впрочем, кватернионы уже существенно отличаются от комплексных чисел: их умножение не коммутативно. Глубокие исследования, проведенные в конце

---

[1] *C. Wessel.* Essai sur la représentation analytique de la direction, avec des applications etc., p. 9.

XIX в. К. Вейерштрассом, Г. Фробениусом и Б. Пирсом, показали, что всякое расширение понятия числа за пределы системы комплексных чисел возможно только при отказе от каких-либо обычных свойств операций.

В заключение приведем некоторые подробности, относящиеся к символике и терминологии. Знак мнимой единицы i (от восходящего к термину Декарта слова imaginaire — «мнимый») предложил в 1777 г. Эйлер (опубл. 1794) и в общее употребление ввел Гаусс (с 1801 г.); впрочем, Коши стал им пользоваться только с 1847 г. Термин «комплексное число» встречается у Л. Карно (1803), но в обиход оно вошло опять-таким благодаря Гауссу (1831). Слово «сопряженный» применил Коши (1821), «модуль» — Арган и за ним Коши, «абсолютная величина» и запись $|a+bi|$ — Вейерштрасс (хотя об «абсолютной величине» линии $a+b\sqrt{-1}$ писал еще Арган), «норма» (a^2+b^2) — Гаусс.

Линейные уравнения и определители

Метод решения систем линейных уравнений и исключения неизвестных, намеченный Лейбницем в письме к Лопиталю от 28 апреля 1693 г. (см. т. II, стр. 52—53), был вновь открыт несколько десятков лет спустя. Маклорен в своем курсе алгебры (опубл. 1748) при решении систем двух, трех и четырех уравнений с таким же числом неизвестных отметил, что все они выражаются дробями с одним и тем же знаменателем, и был близок к установлению правила образования числителей, но все же далее этого не пошел. Общий алгоритм решения определенных систем с любым числом неизвестных и исключения неизвестных из $n+1$ уравнения с n неизвестными при помощи определителей разработал тогда же профессор университета в Женеве Габриэль Крамер (1704—1752), ученик и друг Иоганна Бернулли. Крамеру, среди прочего, мы обязаны изданием четырехтомного собрания сочинений И. Бернулли, трех томов сочинений Я. Бернулли и двухтомной переписки Лейбница с И. Бернулли.

Впервые Крамер изложил свой метод в большом мемуаре «Об исчезании неизвестных величин» (De l'évanouissement des grandeurs inconnues), представленном в 1744 г. через Клеро Парижской академии наук, но не увидевшем света. Затем Крамер подробно описал свой метод во «Введении в анализ кривых алгебраических линий», к которому мы еще вернемся (стр. 171).

Крамер рассматривал систему любого числа линейных уравнений с таким же числом неизвестных $x, y, z, v, \ldots$, помечая при этом коэффициенты индексами в виде показателей:

$$\begin{aligned}
A^1 &= Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{ и т. д.},\\
A^2 &= Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{ и т. д.},\\
A^3 &= Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{ и т. д.},\\
A^4 &= Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{ и т. д.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Общий знаменатель дробей, выражающих неизвестное, образуется как сумма произведений вида $\pm ZYXV\ldots$ с индексами, представляющими собой все возможные $n!$ перестановок чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Для определения знака произведений вводится понятие «беспорядка» (dérangement) в расположении индексов: беспорядок — теперь говорят «инверсия» — имеет место всякий раз, как большее число предшествует меньшему, и, если в перестановке четное число беспорядков, произведение берется с положительным знаком, а если нечетное, то с отрицательным. Таким образом, знаменатель есть, выражаясь современным языком, определитель данной системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} Z^1 & Y^1 & X^1 & V^1 & \dots \\ Z^2 & Y^2 & X^2 & V^2 & \dots \\ Z^3 & Y^3 & X^3 & V^3 & \dots \\ Z^4 & Y^4 & X^4 & V^4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Наконец, числители образуются из знаменателя путем замены коэффициентов каждого неизвестного на свободные члены с теми же индексами.

Распространению метода определителей содействовал парижский профессор математики и академик Этьен Безу (1730—1783), автор упомянутого выше шеститомного курса математики для военно-морских школ (см. стр. 24). Пытаясь свести решение произвольных алгебраических уравнений к двучленным (см. стр. 87), Безу пришел к проблеме исключения неизвестных, которой посвятил несколько ценных работ. Особенно интересовала математиков задача исключения одного из неизвестных из системы двух алгебраических уравнений, равносильная задаче об определении точек пересечения двух плоских алгебраических кривых. В главе о геометрии нам придется еще говорить о соответствующих изысканиях Маклорена, Крамера и Эйлера, который в XIX главе второго тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) описал на примерах два приема исключения. Этому вопросу Эйлер посвятил также статьи в «Mém. Ac. Berlin», (1748) 1750, и (1764) 1766, причем во второй изложил метод, носящий и теперь его имя. В случае двух уравнений с одним неизвестным задача исключения совпадает с задачей определения условия существования общего корня этих уравнений. Мы поясним метод Эйлера на его собственном частном примере уравнений $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ и $x^2 + Px + Q = 0$. Если эти уравнения имеют общий корень α, то $x^3 + px^2 + qx + r \equiv (x - \alpha)(x^2 + ax + b)$, $x^2 + Px + Q = (x - \alpha)(x + A)$, т. е. существуют такие множители $x^2 + ax + b$, $x + A$, что $(x^3 + px^2 + qx + r)(x + A) = (x^2 + Px + Q)(x^2 + ax + b)$. Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях x дает линейную систему четырех уравнений с тремя неизвестными A, a, b. Исключение неизвестных дает выражение, вскоре получившее название результанта (см. стр. 69); равенство результанта нулю представляет собой условие, при котором система совместна и данные уравнения имеют общий корень.

Безу в «Mém. Ac. Paris», (1764) 1767, привел иной, более удобный для выкладок, прием и применил его к системе уравнений с двумя неизвестными $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ степени m и соответственно n. При этом он показал, что возникающий после исключения одной из них результант имеет, вообще говоря, степень mn, которая может быть в частных случаях и ниже (именно, когда многочлены f_1 и f_2 имеют множитель, отличный от постоянного). Таким образом, данная система имеет, вообще говоря, mn общих решений. Это предложение, известное и ранее (см.

стр. 156), Безу впервые обосновал удовлетворительным для своего времени образом. Для распространения теории определителей статья была важна потому, что в ней с самого начала формулируется нужное в дальнейшем рекуррентное правило образования результанта, т. е. определителя, равенство нулю которого обеспечивает совместность системы n линейных уравнений с $n+1$ неизвестными. Добавим, что в «Общей теории алгебраических уравнений» (Théorie générale des équations algébriques, Paris, 1779) Безу обобщил теорию на случай нескольких уравнений и рассмотрел всю проблему с большой подробностью.

Прошло немного времени и сами определители стали предметом исследования. В этом направлении первые шаги были сделаны парижским академиком, с 1782 г. директором знаменитого Музея искусств и ремесел, а впоследствии активным участником Французской революции и пылким якобинцем Александром Теофилем Вандермондом (1735—1796), Лапласом и Лагранжем. Их результаты излагаются теперь в любом руководстве по теории определителей. Алгоритмам Крамера и Безу недоставало подходящей символики. В «Мемуаре об исключении» (Mémoire sur l'élimination, (1772)1776) Вандермонд ввел, подобно Лейбницу (см. т. II, стр. 52), двойную индексацию коэффициентов — по месту в уравнении и по номеру уравнения, правда, в форме, менее удобной, чем принятая теперь; он писал номер уравнения над номером места, вроде $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ в буквенном виде $\begin{smallmatrix}\alpha\\a\end{smallmatrix}$ и т. п. Определитель второго порядка Вандермонд изображал знаком $\frac{\alpha|\beta}{a|b}=\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{a}$; определители высших порядков вводились рекуррентными соотношениями, как у Безу, так что, например, $\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c}=\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma}{b|c}+$ $+\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma}{c|a}+\frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma}{a|b}$, аналогично и $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d}$ определяется, как мы бы сказали, разложением по элементам первого столбца и т. д. В соответствии с этими обозначениями Вандермонд сформулировал основные теоремы о числе членов определителя, о сохранении значения определителя при перемене местами строк и столбцов, об изменении знака определителя при перестановке местами двух параллельных рядов и о вытекающем отсюда равенстве нулю определителя с двумя тождественными параллельными рядами. Приведем для образца запись системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\,\xi_1+\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\,\xi_2+\begin{matrix}1\\3\end{matrix}=0,$$

$$\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\,\xi_1+\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\,\xi_2+\begin{matrix}2\\3\end{matrix}=0,$$

с решениями:

$$\xi_1=\frac{\frac{1|2}{2|3}}{\frac{1|2}{1|2}},\qquad \xi_2=\frac{\frac{1|2}{3|1}}{\frac{1|2}{1|2}}.$$

Другие обозначения были предложены в том же томе «Mém. Ac. Paris» Лапласом в виде $({}^1a\cdot{}^2b\cdot{}^3c)$ и т. п., затем в форме $(ab'c'')$ — Безу (1779), позднее — О. Коши (1815), который писал $S\,(\pm\, a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n)$ или $S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \ldots a_{n\cdot n})$, Н. И. Лобачевским (1834) и другими учеными. Наше современное обозначение в виде квадратной таблицы коэффициентов с двумя вертикальными чертами по бокам ввел в 1841 г. А. Кэли. Заметим, что сам термин «детерминант», т. е. определитель, употребил сперва в более узком смысле дискриминанта квадратичной формы с двумя или тремя переменными Гаусс (1801), после чего Коши применил его в самой теории определителей (1815).

Несколько страниц отведено определителям в только что упомянутой большой статье Лапласа «Исследования по интегральному исчислению и о системе мира» (Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Mém. Ac. Paris, (1772)1776). Лаплас, называвший определитель результантом (ибо это выражение возникало в результате исключения неизвестных), так же как и Вандермонд рассмотрел свойства, связанные с перестановкой рядов или совпадением соответственных элементов. Кроме того, он пришел к носящей его имя теореме о выражении определителя в виде суммы произведений его миноров на соответствующие им адъюнкты. Лагранж вновь дал разложение определителя по элементам какого-либо ряда (что, в сущности, есть частный случай теоремы Лапласа) и доказал, что сумма произведений элементов ряда на адъюнкты, соответствующие элементам параллельного ряда, равна нулю (Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773)1775).

Были рассмотрены некоторые специальные виды определителей и среди них «вековое уравнение»

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0,$$

где $a_{ik} = a_{ki}$, которое встретилось в частных случаях $n = 2$, $n = 3$ Лагранжу при исследовании поверхностей второго порядка ((1773)1775) и Лапласу при изучении вековых неравенств в движении планет ((1772)1773 и «Небесная механика», т. I, 1799),— с этим связано название такого уравнения. Для рассмотренных ими случаев Лаплас и Лагранж доказали, что корни векового уравнения действительны; общее доказательство этой теоремы дал Коши (1829). Вековое уравнение вообще имеет важное значение в механике; ему удовлетворяют частоты малых колебаний системы точек с n степенями свободы около положения равновесия.

Вандермонд (Mém. Ac. Paris, (1771)1774) ввел определители вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

правда, лишь для $n = 3$, а общий случай опять-таки рассмотрел Коши (1815).

В начале XIX в. теорией определителей занимался польский философ и математик Юзеф Гёне-Вронский (1778—1853), который, среди прочего, впервые ввел в 1812 г. функциональный определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

примененный Э. Кристоффелем (1858) к исследованию линейной зависимости системы функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ и в 1882 г. названный Т. Мюиром «вронскианом». Вронский, после участия в восстании Костюшко, проживший бо́льшую часть жизни в Париже, занимался поисками универсальных алгоритмов и формул решения любых уравнений, как алгебраических, так и дифференциальных, разложений в бесконечные ряды и произведения. Достичь поставленных им целей было невозможно, но попутно он пришел к ряду частных интересных открытий, которые не получили в свое время признания из-за крайне трудной и неясной формы изложения. Творчеству этого высокоодаренного человека был в высокой степени присущ формальный подход к разработке технического математического аппарата. Подобный формализм не помешал, впрочем, Вронскому критически оценить теорию аналитических функций Лагранжа (см. стр. 285).

На математических работах Вронского отразилось некоторое воздействие немецкой комбинаторной школы К. Ф. Гинденбурга (см. стр. 99), которому (1784), как и его последователю Г. А. Роте (1800), принадлежат некоторые заслуги в дальнейшем распространении определителей.

Новыми успехами в XIX в. теория определителей была обязана прежде всего О. Коши, а затем К. Г. Якоби, А. Кэли и Дж. Сильвестеру. Эти успехи положили основу развития новых важных областей математики: линейной алгебры, матричного исчисления, алгебраической теории форм и их инвариантов. Не касаясь всего этого, отметим лишь одно обстоятельство, тесно связанное с предыдущим изложением. Математики XVIII в. не исследовали сколько-нибудь подробно систему n уравнений с n неизвестными, когда ее определитель равен нулю. Полный анализ этого случая, а также более общих систем m линейных уравнений с n неизвестными, как однородных, так и неоднородных, был проведен целым рядом ученых: Л. Кронекером (с 1864 г.), Г. Фробениусом (1876), Э. Руше и Г. Фонтене (с 1875 г.) и другими. Введение Г. Фробениусом понятия о ранге матрицы (1879) позволило ему, а также А. Капелли (1892) сформулировать необходимое и достаточное условие совместности неоднородной системы в той сжатой и удобной форме, в какой оно вошло в учебники нашего времени. Заметим, что термин «матрица» принадлежит Сильвестеру (1851).

Даламбер и основная теорема алгебры

Одной из проблем теории алгебраических уравнений высших степеней, стоящих в центре внимания математиков XVIII в., была так называемая основная теорема алгебры. Эта теорема была высказана впервые П. Роте, А. Жираром и Р. Декартом в формулировках (см. т. II, стр. 24—25, 42),

Ж. Даламбер
(с пастели Де ла Тура)

сильно отличающихся от современной, принадлежащей Эйлеру и Даламберу: всякий алгебраический многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных или квадратичных действительных множителей. Эйлер, как упоминалось еще в 1742 г., письменно высказал это утверждение, означающее, что уравнение n-й степени имеет n корней, принадлежащих полю комплексных чисел $a + b\sqrt{-1}$ (см. стр. 61).

Первое доказательство этой теоремы было предложено в 1746 г. Жаном ле Роном Даламбером (1717—1783). Даламбер, сын маркизы де Тансен и артиллерийского офицера Детуша, вскоре после рождения был подкинут матерью на ступени парижской церкви Св. Иоанна Круглого (Jean le Rond), чем и объясняется его имя. Даламбер воспитывался в семье усыновившего его бедного стекольщика; фамилия Даламбер (собственно, д'Аламбер) произведена из имени его приемного отца Аламбера. Даламбер учился в колледже Мазарини и в Академии юридических наук и получил звания бакалавра искусств и лиценциата прав, однако профессия адвоката ему была не по душе, и он стал изучать математику, причем первым руководителем его был историк этой науки Ж. Э. Монтюкла. Уже в 1739 и 1740 гг. Даламбер представил Парижской академии свои сочинения о движении твердых тел в жидкости и об интегральном исчислении и в 1741 г. был избран ее адъюнктом; впрочем, академическое звание, дающее право на государственное жалование, он получил только в 1756 г., а в 1772 г. он стал непременным секретарем Академии. Петербургская академия избрала его в 1764 г. своим иностранным членом.

В 1743 г. в Париже вышел «Трактат о динамике» (Traité de la dynamique) Даламбера, где был предложен так называемый «принцип Даламбера», позволяющий весьма общим образом приводить задачи, относящиеся к движению несвободной системы, к задачам статики. В 1747 г. в Берлине были опубликованы упоминавшиеся «Размышления об общей причине ветров», а в 1748 г. вышли его «Исследования по интегральному исчислению» (Recherches sur le calcul intégral. Mém. Ac. Berlin, (1746)1748), о которых мы будем говорить ниже. Тогда же Даламбер нашел свое решение задачи о колебании струны, положившее начало знаменитой дискуссии о природе функций, входящих в интегралы уравнений математической физики (см. стр. 413 и след.). Выдающийся вклад Даламбер внес и в небесную механику.

С 1750 г. Даламбер принимает деятельное участие в организованном Д. Дидро издании «Энциклопедии», о которой говорилось раньше (см. стр. 7). В первом томе «Энциклопедии» (1751) была помещена обширная вступительная статья Даламбера о происхождении и развитии наук.

Разделяя, вслед за Ф. Бэконом, умственные способности на память, рассудок и воображение, Даламбер соответственно расчленил все человеческие познания на историю, относящуюся к памяти, философию, проистекающую из рассудка, и поэзию, рождающуюся из воображения. Статья заканчивается общей схемой знаний в виде таблицы. Наиболее важны в ней мысли о преемственности и связи между отдельными науками. Перу Даламбера принадлежит в «Энциклопедии» множество разнообразных статей, в том числе по математике. Блестящие по форме и весьма содержательные, хотя нередко и спорные, они оказали большое влияние на развитие математической мысли и образования во второй половине XVIII в. Мы имели уже случай коснуться статей «Геометрия», «Отрицательный», «Положительный» и нам еще встретятся такие, как «Дифференциал», «Предел» (см. стр. 272) и «Герб и решетка», содержащая прямую ошибку (см. стр. 144). Упомянем, что в статье «Размерность» (Dimension, v. IV) высказана мысль о рассмотрении времени как четвертого измерения. Вольнодумная, по общему своему направлению, «Энциклопедия» имела влиятельных противников, которых поддерживали правительство Франции и католическая церковь. Когда нападки реакционных кругов. затронувшие и непосредственно Даламбера, усилились, он вышел из редакции, но остался одним из авторов «Энциклопедии» и другом Дидро. который, обладая бо́льшим гражданским мужеством, довел ее издание до конца. В философских воззрениях Даламбера преобладало скептическое отношение к вопросам о познаваемости сущности вещей, о существовании разумного творца мира и т. д., хотя он и склонялся к сенсуализму. Эти воззрения материалист Дидро подверг остроумной критике.

Доказательство Даламбера основной теоремы алгебры содержится в упомянутых несколько ранее «Исследованиях по интегральному исчислению» ((1746)1748). Прежде всего Даламбер доказывает следующую теорему I: Пусть TM — некоторая кривая, координаты которой $TP = z$ и $PM = y$ и при $z = 0$, $y = 0$ или $y = \infty$. Тогда для каждого бесконечно малого значения z, положительного или отрицательного, соответствующее значение y будет действительным числом или же числом вида $p + q\sqrt{-1}$, где p и q — действительные числа.

Даламбер предполагает, что в окрестности точки $z = 0$ переменную y можно выразить сходящимся рядом

$$y = az^{m/n} + bz^{r/s} + cz^{t/h} + \ldots, \tag{5}$$

в котором рациональные показатели m/n, r/s, t/h, ... монотонно возрастают, а коэффициенты a, b, c, ... — действительны. Поскольку z бесконечно мало́, Даламбер отбрасывает в ряде (5) все члены, кроме первого, и показывает, что $az^{m/n}$ есть действительное или комплексное число, в зависимости от того, четен или или нечетен знаменатель степени m/n. При этом Даламбер учитывает отброшенные члены ряда (1), утверждая, что в сумме они дают комплексную или действительную величину, бесконечно малую по отношению к первому члену $az^{m/n}$.

Далее доказаны три следствия. В следствии I утверждается, что если для нашей кривой при некотором действительном значении z_0 соответственное значение y_0 есть комплексное число, то любому z, бесконечно мало отличающемуся от z_0, также соответствует комплексное число. Для доказательства производится параллельный перенос кривой таким образом, чтобы точка (y_0, z_0) попала в начало координат, и все сводится к теореме I. В следствии II Даламбер показывает, что теорема I справедлива не только для бесконечно малого z, но и для некоторого конечного z. Доказательство основывается на представлении, что конечное значение z можно исчерпать бесконечно малыми значениями. В следствии III установлено, что любой действительной абсциссе z нашей кривой соответствует действительная или комплексная ордината y. Пусть действительное число z удовлетворяет уравнению нашей кривой $P(y, z) = 0$ при некотором комплексном y, а z_2 не удовлетворяет этому уравнению, причем $z_2 > z_1$. Рассматривается значение z_0, являющееся максимальным из всех значений z, удовлетворяющих указанному уравнению. Но, по следствию I, все значения z в окрестности z_0 удовлетворяют этому уравнению, т. е. найдется z', для которого $z_0 < z' < z_2$, что противоречит определению числа z_0.

Согласно теореме II, если некоторый многочлен $y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + \ldots + fy + g$ не обращается в нуль ни при каком действительном y, то всегда существует величина $p + q\sqrt{-1}$, которая, будучи подставлена вместо y, обращает многочлен в нуль. Доказательство непосредственно вытекает из следствия III. Действительно, рассмотрим кривую

$$z = P(y) = y^m + ay^{m-1} + \ldots + fy. \tag{6}$$

Каждому действительному значению z соответствует комплексное y, удовлетворяющее уравнению (6). Если положить $z = -g$, мы получим искомое утверждение.

В теореме III Даламбер доказывает, что каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен в произведение линейных и квадратичных множителей. Для этого он устанавливает, что если $p + q\sqrt{-1}$ является корнем многочлена, то корнем будет и $p - q\sqrt{-1}$.

К. Ф. Гаусс в докторской диссертации «Новое доказательство теоремы о том, что всякая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой и второй степени» (Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii, 1799) совершенно справедливо отметил нестрогость рассуждений Даламбера, уже неприемлемых для математики начала XIX в. Так, не было обосновано исходное положение о возможности разложения алгебраической функции в сходящийся ряд. Нестрогими являлись также некоторые рассуждения относительно бесконечно малых (например, в следствии II).

Существенным замечанием Гаусса является то, что алгебраическая функция не обязана достигать своих граней, на чем основано следствие III теоремы I Даламбера. Все же критика Гаусса носила несколько односторонний характер: рассуждения, применяемые Даламбером при доказательстве теоремы, могут быть уточнены (ряд таких уточнений был сделан самим Гауссом), и всему доказательству придана форма, строгая даже с современной точки зрения. Однако в результате критики Гаусса (кстати, изложенной не вполне ясно) математики XIX в. утратили интерес к доказательству Даламбера. Оно было забыто, а так называемая «лемма Даламбера», используемая нередко при доказательстве основной теоремы алгебры в современных учебниках, была доказана Ж. Р. Арганом в упоминавшейся выше работе 1806 г. (см. стр. 65) [1].

Доказательство Эйлера

Доказательство Даламбера имело аналитический характер. Почти одновременно Эйлер попытался дать основной теореме чисто алгебраическое доказательство. В настоящее время известно, что этого сделать нельзя, так как для доказательства этой теоремы необходимо пользоваться некоторыми предложениями о непрерывности. Однако эти предложения можно свести к минимуму. Эйлер и сделал это. В 1746 г. он представил Берлинской академии свои «Теоремы о мнимых корнях уравнений» на латинском языке (Theoremata de radicibus aequationum imaginariis), а французский вариант этой работы «Исследования о мнимых корнях уравнений» (Recherches sur les racines imaginaires des équations) напечатал в ее «Записках» за 1749 г. (1751).

Эйлер пользовался только двумя топологическими предложениями (на самом деле достаточно было бы первого из них):

1. Всякое уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень; если оно имеет несколько действительных корней, то число их нечетно.

Это вытекает из того, что функция $y = P_{2m+1}(x)$, где $P_{2m+1}(x)$ — многочлен степени $2m + 1$, имеет противоположные знаки при больших по абсолютной величине и противоположных по знаку значениях x.

2. Всякое уравнение четной степени, свободный член которого отрицателен, имеет по крайней мере два действительных корня, из которых один положителен, а другой отрицателен.

Это также легко вытекает из рассмотрения поведения функции $y = P_{2m}(x)$ при больших по абсолютной величине значениях x и при $x = 0$.

---

[1] Согласно этой лемме, если какое-либо значение многочлена $f(x_0) \neq 0$, то существует сколь угодно близкое к x_0 значение x_1, при котором $|f(x_1)| < |f(x_0)|$. (Изложение доказательства Даламбера написано С. С. Петровой. — *Ред.*)

В остальном все рассуждения Эйлера чисто алгебраические. Пусть задано уравнение

$$P_n(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + N = 0.$$

Эйлер полагает

$$P_n(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\nu),$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ — «мнимые величины» в том смысле, который был пояснен выше (см. стр. 57). Перемножая и складывая их по обычным правилам, Эйлер получает:

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \ldots + \nu = -A, \\ &\alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots + \mu\nu = B, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\alpha\beta\ldots\nu = (-1)^n N. \end{aligned} \tag{7}$$

Основная теорема алгебры при таком предположении состоит в доказательстве того, что все эти «мнимые величины» имеют вид $a + b\sqrt{-1}$. Такая постановка вопроса, по-видимому, безоговорочно принималась математиками XVIII в. По крайней мере, вслед за Эйлером, ее придерживались Лагранж и Лаплас. Только в самом конце века подверг эту позицию резкой критике Гаусс. В своей упоминавшейся диссертации он писал, что недопустимо предполагать существование каких-то «мнимых величин», отличных от $a + b\sqrt{-1}$, и при этом производить над этими «тенями теней», о которых мы равно ничего не знаем, арифметические действия по тем же правилам, как с обычными числами. В своей второй работе (1815), посвященной доказательству основной теоремы, Гаусс считает, что рассуждения, основанные на предположении о разложимости любого многочлена в произведение линейных множителей, «по крайней мере в том месте, где речь идет о доказательстве такой разложимости, есть не что иное, как „petitio principi"»[1] («постулирование основания», т. е. порочный круг). Интересно отметить, что в этом новом доказательстве Гаусс строго осуществил именно ту редукцию, которая не вполне строго была проведена при доказательстве основной теоремы Эйлера.

Гаусс был прав, обвиняя математиков XVIII в. в нестрогости изложения. Однако он был неправ, когда утверждал, что в доказательстве Эйлера содержался порочный круг. На самом деле, как показало развитие алгебры XIX в., на основную теорему алгебры можно смотреть с двух точек зрения: алгебры и анализа. Согласно второй из них, поле C всех комплексных чисел заранее задано и основная теорема алгебры состоит в доказательстве того, что каждый многочлен $P_n(x)$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет корень θ в поле C. Однако, как показал Кронекер, развивая идеи Гаусса, можно не предполагать заранее существования поля C комплексных чисел, а построить поле $Q(\theta)$ над данным полем Q, к которому принадлежат коэффициенты заданного неприводимого многочлена $P_n(x)$, посредством чисто алгебраической конструкции (так называемой конструкции Кронекера). Так можно построить поле разложения данного многочлена, после чего доказывается, что это поле изоморфно некоторому подполю C. Эта конструкция была

---

[1] *C. F. Gauss*. Werke. Bd. III, Göttingen, 1878, S.40.

применена в весьма завуалированной форме Гауссом в его втором доказательстве основной теоремы, затем Коши для многочлена $P_2(x) = x^2 + 1$ над полем действительных чисел, поле разложения которого совпадает со всем полем комплексных чисел, и, наконец, в самом общем виде Кронекером. Мы видим, что математики XVIII в. придерживались алгебраической точки зрения. С каждым многочленом они связывали поле его разложения, но не могли еще провести построение этого поля с той строгостью, которая стала обязательной в XIX в.

Вернемся к доказательству Эйлера. Поскольку любое уравнение нечетной степени имеет вещественный корень, то достаточно рассмотреть уравнения четной степени. Эйлер сперва рассматривает уравнения $P_{2m}(x) = 0$ при $2m = 2^k$ и представляет многочлен $P_{2^k}(x) = 0$ в виде произведения $P_{2^{k-1}}(x)Q_{2^{k-1}}(x)$ двух многочленов 2^{k-1}-й степени с неопределенными коэффициентами; он утверждает, что коэффициенты многочленов $P_{2^{k-1}}(x)$ и $Q_{2^{k-1}}(x)$, определяемые через коэффициенты многочлена $P_{2^k}(x)$, могут быть выбраны действительными. Эйлер приводит подробное исследование уравнений четвертой степени, при котором пользуется такими глубокими фактами, как то, что рациональная функция от корней уравнения, принимающая при всевозможных перестановках корней ν различных значений, удовлетворяет алгебраическому уравнению ν-й степени с коэффициентами, рационально выражающимися через коэффициенты данного уравнения; и что рациональная функция от корней уравнения, не изменяющаяся ни при каких перестановках корней, рационально выражается через коэффициенты данного уравнения (здесь применяются доказанные Эйлером теоремы о симметрических функциях). Однако обобщение этих результатов на общий случай обосновано недостаточно. Применяя эту теорему несколько раз, многочлен $P_{2^k}(x)$ можно представить в виде произведения многочленов второй степени. В случае произвольного уравнения $P_{2m}(x) = 0$, для которого $2m \neq 2^k$, можно найти такое k, что $2^{k-1} < 2m < 2^k$. и, домножив $P_{2m}(x)$ на произведение $2^k - 2m$ множителей вида $x - \alpha$, мы сведем это уравнение к рассмотренному случаю, откуда и вытекает утверждение основной теоремы алгебры.

Восполнению пробелов доказательства Эйлера была посвящена работа Лагранжа «О видах мнимых корней уравнений» (Sur la forme des racines imaginaires des équations. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1772) 1774). Подход Лагранжа к основной теореме алгебры был тот же, что и у Эйлера.

Наконец, как мы уже упоминали, Гаусс провел в своем втором доказательстве основной теоремы редукцию Эйлера вполне строго, без предположения о существовании «мнимых корней», для чего ему пришлось применить совершенно новую алгебраическую конструкцию, в чистом виде выделенную Кронекером.

Численное решение уравнений и рекуррентные ряды

Новый метод приближенного вычисления корней алгебраических уравнений был разработан Д. Бернулли.

Даниил Бернулли (1700—1782) родился к Гронингене (Голландия), где его отец И. Бернулли работал до 1705 г. Даниил учился математике у отца и старшего брата Николая II (1695—1726); наряду с этим он изучал медицину и в 1721 г. сдал в Базеле установленные экзамены и защитил диссертацию на тему о дыхании. Некоторое время он провел в Италии

Д. Бернулли
(гравюра И. Гайда с портрета работы И. Губера, Государственный Эрмитаж, Ленинград)

с целью усовершенствования во врачебной практике и здесь же в 1724 г. выпустил «Математические этюды» (см. стр. 370), принесшие ему известность. Вскоре он был приглашен вместе с братом Николаем в Петербургскую академию наук, где проработал с осени 1725 г. около восьми лет. По условию Д. Бернулли должен был заняться физиологией и приложением в ней математических методов; начало исследованиям в этом направлении, прежде всего по механике движения животных, положил итальянец Дж. Борелли (1608—1679). Впрочем, физиологии Д. Бернулли уделял некоторое внимание лишь первое время, вообще же занялся механикой, физикой и математикой; в 1728 г. он официально сменил звание академического профессора физиологии на звание профессора математики. Вернувшись в 1733 г. в Базель, он получил в здешнем университете кафедру анатомии и ботаники (другой вакантной не нашлось) и только в 1750 г. перешел на освободившуюся кафедру физики. Петербургская академия сохранила за Д. Бернулли при отъезде звание почетного (иностранного) члена и пожизненную пенсию, и он до конца жизни поддерживал с нею постоянную научную связь, публикуя в ее изданиях подавляющее большинство своих работ. Для прогресса физико-математических наук имела большое значение его научная переписка, в частности, продолжавшаяся около 40 лет переписка с Эйлером, основное содержание которой постепенно переходило в печатные труды обоих корреспондентов.

В Петербурге Д. Бернулли подготовил большой труд по гидродинамике, содержащий описание многочисленных опытов и теоретическое исследование ряда проблем. В окончательной редакции это классическое сочинение, в котором механика жидкостей и газов впервые выступила как отдельная наука, вышло в Страсбурге в 1738 г. под названием «Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей» (Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii). Здесь, в частности, выведено известное теперь каждому инженеру-гидравлику «уравнение Бернулли», выражающее зависимость между давлением и скоростью идеальной тяжелой жидкости на данной глубине под поверхностью. Дифференциальных уравнений движения в книге еще нет: их установил в 50-е годы Эйлер. Замысел написать вторую часть труда, содержащую применения гидродинамики к кровообращению и движению воздуха при вдыхании и других жидкостей в организме, осуществлен не был.

Как указывал сам автор, этот трактат по гидродинамике являлся скорее физическим, чем математическим. Вообще среди математиков XVIII в. Д. Бернулли был особенно ярким представителем прикладного направления не только по интересам, но и по стилю мышления. Это отмечали уже современники. В похвальной речи памяти Д. Бернулли, произнесенной непременным секретарем Парижской академии наук Кондорсе (Бернулли был избран ее иностранным членом в 1748 г.), дана следующая характеристика его научного творчества: «...Его вкусы влекли его преимущественно к исследованию вопросов, которые представляют больше трудностей в приведении их к математическому аппарату, чем в решении, когда это приведение уже сделано. В задачах, которыми он занимался, он старался в самой их природе найти средства к их упрощению, к их приведению к простейшей форме, оставляя за вычислениями только то, что от них не может быть отнято» [1]. Именно работая на стыке математики и ее приложений, Д. Бернулли внес новые идеи в математическую физику и связанные с нею отделы анализа, в теорию вероятностей и теорию ошибок. Более абстрактные области математики, как теория чисел, его не привлекали (ср. стр. 37). Научные заслуги Д. Бернулли были по достоинству оценены современниками: он состоял членом не только Петербургской и Парижской академий, но также Берлинской, Лондонского королевского общества и т. д.

Занимаясь некоторыми задачами теории колебаний, приведшими его к открытию цилиндрической функции $y = J_0(2\sqrt{x/n})$ в форме бесконечного ряда

$$y = 1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4n\cdot n} - \frac{x^3}{4\cdot 9n^3} + \frac{x^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4} - \dots,$$

Д. Бернулли отметил, что уравнение $y = 0$ имеет бесконечно много действительных корней, и приближенно вычислил значения двух первых с помощью открытого им тогда же метода (Commentarii, (1732—1733) 1738).

---

[1] Цит. по статье *В. И. Смирнова* «Даниил Бернулли» в книге. *Д. Бернулли.* Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей. Перевод В. С. Гохмана. Комментарии и редакция А. И. Некрасова и К. К. Баумгарта. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 455.

Самый метод он изложил для случая уравнений конечной степени в «Замечаниях о рекуррентных последовательностях» (Observationes de seriebus recurrentibus, Commentarii, (1728) 1732).

Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется рекуррентной, т. е. возвратной, если ее общий член a_n линейно выражается через определенное число предыдущих членов рекуррентной формулой

$$a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \ldots + m_k a_{n-k}.$$

Рекуррентными называются и степенные ряды, коэффициенты которых образуют такую последовательность. Мы привели определение, которое почти не отличается от данного в статье, посвященной разложению рациональных дробей и напечатанной в «Philosophical Transactions» за 1722 г. (1724), а затем в «Аналитических этюдах» (1730) Муавром, который, впрочем, как и другие математики XVIII в., не имел отдельных терминов для последовательностей и рядов и называл те и другие по-латыни одинаково — series recurrentes; нашу рекуррентную формулу он именовал «индексом или шкалой отношения» (1730). К рекуррентным рядам Муавр пришел в ходе решения одной задачи теории вероятностей и некоторые сведения о них привел уже в «Учении о случаях» (1718; см. стр. 128): например, то, что рекуррентными являются арифметические последовательности любого порядка n, для которых равны нулю все $(n+1)$-е разности.

Другим давно известным примером рекуррентной последовательности является геометрическая прогрессия, $a_n = qa_{n-1}$. К тому же типу относится и последовательность чисел Фибоначчи (см. т. I, стр. 262), общий член которой есть $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Еще Кеплер заметил, что отношение a_n/a_{n-1} членов этой последовательности стремится к корню $(\sqrt{5}+1)/2$ квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$; эта же последовательность применялась к решению квадратных уравнений также Николаем I Бернулли.

Более подробное изложение теории рекуррентных рядов Муавр дал в «Аналитических этюдах». Здесь на примерах бесконечных рядов с двух- и трехчленной шкалой отношения он показал, как вычислять их суммы, являющиеся (если ряд сходится) рациональными функциями; Стирлинг, который также изучал рекуррентные ряды (1730), даже называл их рядами, возникающими при делении,— именно делении друг на друга целых рациональных функций. Сумму конечного числа начальных членов Муавр находил как разность суммы двух бесконечных рядов. Большее внимание он уделил определению произвольного члена a_n по k-членной шкале отношений и k начальным членам. С бесконечными рядами Муавр в «Аналитических этюдах» оперировал формально, не касаясь проблем сходимости и законности производимых действий. В более ранней переписке 1714 г. он предполагал, говоря о суммировании бесконечных рядов, что члены их постоянно убывают (чего, впрочем, для сходимости недостаточно). Примерно тот же круг сведений о рекуррентных рядах, со ссылкой на Муавра, изложил в 13-й главе первого тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлер. О связях теории рекуррентных рядов с исчислением конечных разностей мы еще расскажем в четвертой главе.

Численный метод решения алгебраических уравнений, предложенный Д. Бернулли, состоит в том, что уравнение сначала приводится к виду

$$1 = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + px^\nu.$$

Далее берутся ν произвольных чисел $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, с помощью которых для $n = \nu + 1, \nu + 2, \ldots$ последовательно находятся числа

$$A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2} + \ldots + mA_{n-\nu+1} + pA_{n-\nu}$$

Тогда при достаточно большом n отношение A_{n-1}/A_n приближенно равно корню уравнения, ближайшему к нулю. Для простоты можно взять $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = 1$. Применение того же процесса к уравнению, записанному в виде

$$x^\nu = ax^{\nu-1} + bx^{\nu-2} + \ldots + mx + p,$$

дает приближенное значение корня уравнения, наиболее удаленного от нуля. Отношение A_{n-1}/A_n не всегда стремится к определенному пределу при $n \to \infty$, так что метод применим не всегда, как например, при наличии двух действительных корней $x_1 = -x_2$. В последнем случае, впрочем, можно предварительно сделать замену $x = y + \alpha$. В записках Петербургской академии за 1730—1731 гг. (опубл. 1738) Д. Бернулли приложил свой метод и к отысканию нулей функций, заданных «бесконечно продолжающимися уравнениями», т. е. степенными рядами. Мы не можем здесь остановиться на зависимости между методом Д. Бернулли и приближенным методом, основанным на применении степенных сумм корней (ср. стр. 82).

Метод Д. Бернулли был предложен им без доказательства; исследованию этого метода посвящена 17-я глава первого тома «Введения в анализ бесконечных» Эйлера, где выясняются и условия применения метода при наличии двух действительных корней, отличающихся лишь знаком, тех или иных кратных действительных корней, некоторых мнимых корней и т. д.

Другие численные методы; отделение корней

Метод Д. Бернулли имеет более теоретический интерес, чем практическое значение.

Эйлер в «Дифференциальном исчислении» (1755) предложил способ определения границ корней алгебраических уравнений, в сущности приводящий к методу Ролля (см. т. II, стр. 46), но распространяющийся и на мнимые корни. В основе этого метода лежит использование расположения максимумов и минимумов парабол n-го порядка (для $n = 3$ и 4 этот метод был предложен в 1741 г. Дж. Стирлингом и Ж. П. Гюа де Мальвом). Установлением границ корней алгебраических уравнений занимался также крупнейший английский математик второй половины XVIII в. Эдвард Варинг[1] (1734—1798), блестяще окончивший Кембриджский университет в 1757 г. и уже в 1760 г. получивший в нем Люкасовскую кафедру, которую в свое время занимали Барроу и затем Ньютон. Варинга высоко ценили на родине, и он был избран в 1767 г. членом Лондонского королевского общества, но на континенте его труды были мало известны, так что некоторые его открытия были повторены, как это случилось, например, с интерполяционной формулой, получившей имя Лагранжа (см. стр. 230). Вклад Варинга в математику был бы значительнее, если бы он не увлекся надолго медициной и практической врачебной работой в Кембриджской больнице, которую оставил только из-за плохого зрения. Основные заслуги Варинга относятся к алгебре и теории чисел, и многие ре-

---

[1] Правильное произношение: Уэринг.

Э. Варинг
(с портрета, хранящегося в Ашмолеанском музее, Оксфорд)

зультаты он изложил уже в «Аналитических этюдах об алгебраических уравнениях и свойствах кривых», подготовленных к 1760 г., но изданных несколько позднее (Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus. Cantabrigiae, 1762). Этот труд был впоследствии переработан, дополнен и разделен на два: «Алгебраические размышления» (Meditationes algebraicae. Ed. 1. Cantabrigiae, 1770) и «Свойства алгебраических кривых» (Proprietates algebraicarum curvarum. Cantabrigiae, 1772; см. стр. 172).

Варинг развил далее теорию симметрических функций корней алгебраических уравнений. Он явно выразил степенные суммы S_n через коэффициенты и обратно («формулы Варинга»). Напомним, что выражения для S_1, S_2, S_3, S_4 нашел еще Жирар (1629), а Ньютон (опубл. 1707) открыл рекуррентное соотношение между S_n, S_{n-1}, . . ., S_1 (см. II, стр. 25 и 46). Далее, Варинг дал метод выражения любой целой рациональной симметрической функции через степенные суммы и через элементарные симметрические функции, т. е. коэффициенты. Этот метод вновь нашел Гаусс (1815), полностью доказавший теорему о том, что целая рациональная симметрическая функция есть целая рациональная функция коэффициентов. Наконец, симметрические функции Варинг использовал для нахождения уравнений, корни которых выражаются определенным образом через корни данного.

В частности, уравнение, корни которого обратны разностям корней данного уравнения, дало Варингу средства установления границ действительных корней данного уравнения (1762). Для отделения корней исходного уравнения Варинг использовал также уравнение, корни которого суть квадраты разностей корней данного, он указал также некоторые условия существования мнимых корней уравнений третьей, четвертой и пятой степеней. Несколько позднее и независимо уравнение в квадратах разностей было применено в тех же целях Лагранжем, который посвятил отделению действительных и мнимых корней ряд статей (Mém. Ac. Berlin, (1767) 1769 и (1768) 1770); Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1777) 1779).

В «Аналитических этюдах» (1762) Варинг предложил идею приближенного метода, в некотором смысле восходящую ко «Всеобщей арифметике» (1707) Ньютона, где изложен прием вычисления наибольшего по абсолютной величине корня уравнения с действительными корнями как предела последовательности $\sqrt[2n]{S_{2n}}$ при $n \to \infty$. Прием Варинга, правда, лишь намеченный, заключается в следующем. Для данного уравнения $x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$ с действительными различными корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, расположенными в порядке убывания их абсолютных величин, строится уравнение $y^m + A_1y^{m-1} + \ldots + A_m = 0$ с корнями $\beta_1 = \alpha_1^k, \beta_2 = \alpha_2^k, \ldots, \beta_m = \alpha_m^k$. При достаточно большом четном k каждое из чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ весьма велико по сравнению со всеми, за ним следующими, так что равенство $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = -A_1$ можно заменить приближенным равенством $\beta_1 = \alpha_1^k = -A_1$. Аналогично находятся $\beta_2, \beta_3, \ldots$ с помощью других элементарных симметричных функций. Эта идея была впоследствии успешно разработана, независимо друг от друга, бельгийцем Ж. П. Данделеном в 1826 г., Н. И. Лобачевским в 1834 г. и особенно подробно швейцарцем К. Г. Греффе в 1837 г.; все они брали $k = 2^n$. Метод, иногда называемый по имени Греффе, применим к вычислению всех комплексных корней без предварительного отделения.

Два оригинальных метода приближенного решения алгебраических уравнений были предложены И. Г. Ламбертом, причем один из них специально для трехчленных уравнений вида $x^m + px = q$ (Acta Helvetica, 1758). Не останавливаясь ни на этих методах, ни на их развитии в ряде работ Эйлера, мы скажем несколько слов только о примыкающих исследованиях Лагранжа, получившего результат гораздо более общего характера, изложенный прежде всего в «Новом методе решения буквенных уравнений посредством рядов» (Nouvelle méthode pour résoudre les équations littéraires par le moyen des séries. Mém. Ac. Berlin, (1768)1770). Здесь приведена формула Лагранжа для обращения функций, которую мы приведем в той общей форме, как она записана в XV главе I части его «Теории аналитических функций» (1797; см. стр. 285): если $z = x + yfz$, то

$$\varphi z = \varphi x + y\varphi' x fx + \frac{y^2}{2}(\varphi' x fx^2)' + \frac{y^3}{2\cdot 3}(\varphi' x fx^3)'' + \text{и т.д.},$$

где φx означает $\varphi(x)$, fx^2 означает $f^2(x)$ и т. п. В следующем томе записок Берлинской академии за 1769 г. (1771) Лагранж дал с помощью этой формулы приближенное решение трансцендентного уравнения Кеплера $x = t - e \sin x$ (ср. т. I, стр. 236). Первые доказательства формулы опубликовали Кондорсе (Miscell. Taurinensia, (1770—1773)) и Лаплас (Mém. Ac. Paris, (1777)1780), после чего ее по-разному вывели Г. А. Роте (1795), И. Ф. Пфафф (1795) и сам Лагранж. Доказательства Лагранжа содержатся в его труде «О решении числовых уравнений всех степеней» (De la résolution des équations numériques de tous les degrés. Paris, год VI, т.е. 1798), в котором он объединил и дополнил свои исследования по этому вопросу, а также в «Теории аналитических функций» (1797).

В мемуаре «О решении числовых уравнений» (Sur la résolution des équations numériques. Mém. Ac. Berlin, (1767)1769) Лагранж предложил метод приближенного решения алгебраических уравнений с помощью непрерывных дробей. Если корень x заключен в пределах $p < x < p + 1$ и если подставить в уравнение $x = p + \frac{1}{y}$, получится уравнение той же степени относительно y. Поскольку $1 > \frac{1}{y} > 0$, новое уравнение имеет корень, больший единицы. Если целая часть приближенного значения y равна q, то полагаем $y = q + \frac{1}{r}$ и т. д., так что

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \ldots}}.$$

Корень x рационален, если эта непрерывная дробь обрывается, и иррационален, если дробь бесконечна. В добавлении к этому мемуару, напечатанном в «Mém. Ac. Berlin» за 1768 г. (1770), Лагранж показал, что для корней квадратного уравнения эти дроби периодичны (ср. стр. 47).

Ж. Р. Муррайль, секретарь отделения наук Академии в Марселе, впоследствии мэр этого города, в «Трактате о решении любых уравнений» (Traité de la résolution des équations en général. Marseille, 1768) подробно разобрал метод Ньютона (см. т. II, стр. 47—48) и показал, как можно устранить некоторые его недостатки. Сочинение Муррайля не получило известности, и метод Ньютона был позднее вновь подвергнут критическому разбору Лагранжем в его трактате 1797 г., а также Ж. Б. Фурье, который примерно в это же время открыл носящую его имя теорему о числе действительных корней между двумя данными пределами. Фурье опубликовал свои результаты в 1820 г., но излагал их на лекциях в Политехнической школе с 1796 г. Аналогичные результаты были найдены в начале XIX в. врачом Ф. Бюданом, опубликовавшим их в 1822 г. Результаты Фурье были перекрыты работавшим в Париже швейцарцем Ж. Ш. Штурмом [1] в 1829 г., а теорема Штурма об отделении корней была обобщена на случай комплексных корней О. Коши (1831).

Отметим также, что П. Руффини в премированном Итальянским научным обществом сочинении «Об определении корней численных уравнений любой степени» (Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado, Modena, 1804) и У. Горнер (Philos. Trans., 1819) предложили способ приближенного решения алгебраических уравнений при помощи схемы, часто называемой «схемой Горнера» или «схемой Руффини — Горнера». Этот способ по идее совпадает с методом тянь-юань, применявшимся в средневековом Китае (см. т. I, стр. 171).

---

[1] Правильное произношение: Стюрм.

Решение алгебраических уравнений в радикалах

Одной из основных проблем алгебры XVIII в. была проблема решения уравнений «в радикалах». Эта проблема имеет два аспекта: общеалгебраический (функциональный) и арифметический (числовой). В первом случае изучается уравнение с буквенными коэффициентами

$$f_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

т. е. многочлен $f_n(x)$ по существу рассматривается над полем рациональных функций от n переменных $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и ищутся формулы, выражающие корни этого уравнения через его коэффициенты с помощью рациональных операций и радикалов. В древности были найдены такие формулы для $n = 2$, а в XVI в. для $n = 3, 4$. Все попытки получить аналогичными методами решение общих уравнений высших степеней, предпринимавшиеся в XVII и XVIII вв., окончились неудачей.

С развитием алгебраического направления были связаны создание буквенного исчисления, формальное введение мнимых чисел, изучение различных подстановок и открытие симметрических функций.

При арифметическом аспекте рассматривается уравнение с заданными числовыми коэффициентами и исследуется вопрос о разрешимости его «в радикалах» над заданной областью рациональности Q. С самого начала это направление оказалось связанным с изучением числовых полей и их подполей и с определением общего вида целых чисел этих полей. Этот аспект привлек внимание ученых, когда общеалгебраические методы оказались бессильными при попытках решить уравнение пятой степени.

Арифметические вопросы, как всегда, труднее алгебраических. Проиллюстрируем это следующим примером: известно, что уравнение $f_n(x) = 0$ с буквенными коэффициентами имеет над полем $Q(a_1, \ldots, a_n)$ в качестве группы перестановок корней всю симметрическую группу S_n. Между тем построение уравнения с числовыми коэффициентами, имеющего симметрическую группу, представляет отнюдь не легкую задачу. Способ построения таких уравнений при любом n был предложен лишь в 1892 г. Д. Гильбертом.

Интерес исследователей обращался то к алгебраической, то к арифметической стороне вопроса, причем идеи и методы, возникавшие при решении одного рода проблем, помогали при изучении других.

Во «Всеобщей арифметике» (1707) Ньютон поставил задачу, которую, несколько модернизируя, можно сформулировать так: пусть дано уравнение $f_{2m}(x) = 0$ степени $2m$ с целыми рациональными коэффициентами и коэффициентом единица при старшем члене, неприводимое над Q. Требуется узнать, существует ли такое целое D, что над полем $Q(\sqrt{D})$ многочлен $f_{2m}(x)$ распадается в произведение двух множителей степени m:

$$f_{2m}(x) = \varphi_m(x)\,\psi_m(x).$$

Если такое разложение существует, то требуется найти число D и коэффициенты многочленов $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$.

Вопрос, поставленный Ньютоном, решается теперь с помощью теории Галуа: для существования искомого разложения необходимо и достаточно, чтобы группа заданного уравнения имела подгруппу индекса два, которая в свою очередь содержала бы подгруппу подстановок, оставляющих инвариантным один из корней.

Первый критерий для решения этого вопроса был дан Ньютоном. Критерий Ньютона — это алгоритм, который позволяет с помощью конечного числа проб либо найти такое число D, что $f_{2m}(x)$ распадается на множители над $Q(\sqrt{D})$, либо установить, что такого числа не существует. Этот же алгоритм дает способ вычисления коэффициентов многочленов $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$.

Хотя Ньютон и не дал никаких доказательств, можно без труда восстановить способ, которым был получен его алгоритм: Ньютон представлял заданный многочлен в виде произведения двух многочленов с неопределенными коэффициентами вида $a + b\sqrt{D}$, а затем, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной и привлекая теоретико-числовые рассмотрения (а именно вопросы делимости), получал нужные ему условия.

Заметим, что коэффициенты многочленов $\varphi_m(x)$ и $\psi_m(x)$ на основании одной теоремы Гаусса будут целыми числами поля $Q(\sqrt{D})$. Из алгоритма Ньютона следует, что если $D = 4k + 3$, то коэффициенты будут иметь вид $a + b\sqrt{D}$, где a и b — целые рациональные. Если же $D = 4k + 1$, то $a = a_1/2$, $b = b_1/2$, где a_1 и b_1 — целые числа одной четности. Таким образом, Ньютон первый нашел общий вид целых чисел действительных квадратичных полей.

Еще в середине прошлого века вопрос об общем виде целых чисел алгебраических полей был далеко не ясен. Долгое время понятие целого переносили только на числа вида

$$b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + \ldots + b_n\theta^{n-1},$$

где b_i — целые рациональные, а θ — корень неприводимого над Q уравнения степени n с целыми коэффициентами и коэффициентом единица при старшем члене. Только исследования Р. Дедекинда и Е. И. Золотарева показали, что такое определение недостаточно.

Ньютон знал больше, чем счел нужным изложить. Так, он пишет, что мог бы «присоединить изложение приведения уравнения при помощи извлечения иррационального кубического корня»[1]. Эти слова показывают, что он нашел и общий вид целых чисел поля $Q(\sqrt[3]{D})$. Последняя задача намного труднее предыдущей: вид целых чисел кубического поля зависит от того, как раскладывается число 3 в произведение простых идеалов. То, что Ньютон сумел справиться с проблемой, не имея в своем распоряжении теории идеалов или какого-нибудь ее эквивалента, открывает нам еще одну сторону его удивительного гения: это был не только великий физик и аналист, но и великий исследователь науки о числах.

Некоторыми пояснениями алгоритм Ньютона был снабжен в «Алгебре» Маклорена (1748), однако там ему не придается большого значения: исследования не проводятся до конца и не делается попытка обобщить их. Варинг, по-видимому, первый оценил алгоритм Ньютона. В «Алгебраических размышлениях» (1770) он продолжил исследования Ньютона и пытался применить его методы для решения тех же проблем, которые являются центральными в теории Гаусса,— например, вопроса о том, в каких случаях корень заданного уравнения выражается через иррациональности определенного вида (через одни только квадратные радикалы или через квадратные и кубические). Однако оперирование «прямыми

[1] *И. Ньютон.* Всеобщая арифметика. М., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 289.

методами» Ньютона оказалось слишком сложным. Сам Варинг ошибся при определении общего вида целых чисел биквадратичного поля. После него, насколько мы знаем, эти методы были оставлены.

Общеалгебраическая точка зрения была развита в двух работах Эйлера. В «Предположении о виде корней уравнений любого порядка» (De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Commentarii, (1732—33)1738) Эйлер указывал, что решение уравнений второй, третьей и четвертой степеней сводится соответственно к решению уравнений первой, второй и третьей степеней, которые он называл «разрешающими уравнениями» (aequatio resolvens — отсюда современный термин «резольвента»). Эйлер получил резольвенту кубического уравнения

$$x^3 = ax + b$$

с помощью подстановки

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

а уравнения четвертой степени

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

с помощью подстановок

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \quad \text{или} \quad x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$$

и тем самым открыл новый способ решения уравнения четвертой степени. Это дало основание предположить, что и в общем случае уравнение

$$x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + \ldots + g$$

может быть решено с помощью подстановки

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \ldots + \sqrt[n]{G},$$

где число слагаемых есть $n-1$.

Однако при $n = 5$ Эйлеру удалось найти решение в радикалах только для случая возвратных уравнений, которые незадолго до него изучал Муавр (см. стр. 59), установивший, что возвратное уравнение четной степени $2n$ приводится к уравнению степени n (он использовал это свойство для $n = 6$ и 8) и что в случае нечетной степени оно делением на $x + 1$ приводится к возвратному же уравнению.

В работе «О решении уравнений любой степени» (De resolutione aequationum cujusvis gradus. Novi Commentarii, (1762—63)1764) Эйлер заменил указанную подстановку новой подстановкой

$$x = w + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + C\sqrt[n]{v^3} + \ldots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}}.$$

Эйлер снова уверен, что на этом пути можно найти решение любых алгебраических уравнений в радикалах, но фактически он решил таким образом только уравнения третьей и четвертой степеней и отдельные виды уравнений пятой степени, допускающие решение вида

$$x = w + A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4}.$$

Сходными путями шел Варинг. В «Аналитических этюдах» (1762) он применил к уравнению четвертой степени ту же подстановку, что и Эйлер тридцатью годами ранее, а относительно уравнения пятой степени заметил, что с помощью подстановки вида $x = \sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\beta} + \sqrt[5]{\gamma} + \sqrt[5]{\delta}$ оно не решается. Варинг пытался использовать и другое представление корней уравнений высших степеней в радикалах, которое, как мы только что видели, одновременно предложил Эйлер, но ограничился его приложением к решению кубического уравнения.

Впоследствии оказалось, что, если уравнение пятой степени разрешимо в радикалах, его корень представляется именно в указанном Эйлером виде, и норвежский ученый Нильс Хендрик Абель в своем доказательстве невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени общего вида исходил именно из этого выражения.

Уверенность Эйлера в том, что всякое алгебраическое уравнение допускает решение в радикалах, лежала в основе еще одного доказательства основной теоремы алгебры, предложенного Эйлером в упоминавшихся «Исследованиях о мнимых корнях уравнений» (1749; стр. 74). Основываясь на том, что в силу формулы Муавра следует, что каждый радикал имеет конечное число значений вида $M + N\sqrt{-1}$, Эйлер писал: «Итак, вот новое доказательство общей теоремы, которую я поставил себе целью здесь доказать и против которого нельзя ничего возразить, кроме того, что мы не знаем, как выражены корни уравнения степени выше 4-й. Но это возражение не будет иметь никакой силы, если только согласятся со мной, что выражения для корней не содержат никаких других операций, кроме извлечения корней, не считая четырех обычных операций, а ведь никто не будет утверждать, что туда будут примешаны трансцендентные операции»[1].

Исследования Эйлера были продолжены Этьеном Безу. В статье «О многих классах уравнений всех степеней, допускающих алгебраическое решение» (Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique, Mém. Ac. Paris, (1762)1764) Безу исходил из того, что всякое двучленное уравнение $x^n - a = 0$ разрешимо в радикалах; действительно, одним из корней такого уравнения является арифметический корень α n-й степени из a, однако остальные корни этого уравнения в силу формулы Муавра можно записать в виде

$$x_k = \alpha\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

где $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ — корни уравнения

$$\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = 0,$$

которые Безу еще не умел выражать с помощью радикалов. Считая последние уравнения разрешимыми в радикалах, Безу стремился, подобно Э. В. Чирнгаузу (см. т. II, стр. 51), найти подстановки, переводящие данные уравнения в двучленные, и тем самым выделить классы уравнений, разрешимых в радикалах. В работе «Об общем решении уравнений всех степеней» (Sur la résolution générale des équations de tous les degrés, Mém. Ac. Paris, (1765 (1768) Безу продолжил свои изыскания, причем убедился, что резольвента уравнения степени n имеет степень $2 \cdot 3 \ldots (n-1)$, и

[1] *L. Euler*. Opera omnia, series I, t. 6, p. 120.

привести ее к степени ниже n ему удалось, естественно, только при $n < 5$, а уравнения для определения коэффициентов преобразований при $n = 5$ он нашел прямо отпугивающими. Более полные результаты о степени резольвент вскоре получил Лагранж (см. стр. 90). Мы уже говорили. что в ходе этих занятий Безу пришел к проблеме исключения неизвестных (см. стр. 67).

Шведский любитель математики, профессор истории в Лундском университете Эрланд Самуэль Бринг (1736—1798), используя преобразование Чирнгауза, коэффициенты которого определяются из уравнения не выше третьей степени, привел общее уравнение пятой степени к трехчленному $x^5 + px + q = 0$ («Математические опыты о преобразовании алгебраических уравнений» — Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum, Lundae, 1786). Неизвестно, считал ли Бринг возможным сведение к двучленному уравнению. Его открытие не вызвало в свое время интереса, и в 1834 г. оно было повторено англичанином Дж. Джеррардом. Большое значение преобразования Бринга — Джеррарда выяснилось после того, как Ш. Эрмит использовал указанную трехчленную форму для решения уравнений пятой степени в эллиптических модулярных функциях (1858), положив тем самым начало новым методам изучения и решения уравнений высших степеней с помощью трансцендентных функций.

Изучением резольвент занимался в своих «Аналитических этюдах» (1762) и Варинг, который для уравнений четвертой степени выразил корни его кубических резольвент как трехзначные рациональные функции корней данного уравнения. Вскоре затем многозначные рациональные функции корней гораздо шире и успешнее применил Лагранж.

Ж. Л. Лагранж

Поворотным пунктом в истории проблемы решения уравнений в радикалах явились исследования Лагранжа. Жозеф Луи Лагранж (1736—1813), правнук французского офицера, поступившего на службу в армию сардинского короля, родился в Турине, где отец его был казначеем Управления промышленностью и укреплениями. Юношей Лагранж заинтересовался математикой и уже в 17 лет мог без чьей-либо помощи изучать сочинения Ньютона и Лейбница, братьев Бернулли и Эйлера, а в 20 лет начал преподавать математику в туринской Королевской артиллерийской школе. В 1757 г. он, вместе с несколькими другими молодыми людьми, организовал частное научное общество, ставшее затем Туринской академией наук, и принял деятельное участие в подготовке сборников, обыкновенно коротко называемых «Miscellanea Taurinensia» [1]. В этих сборниках появились труды Лагранжа по вариационному исчислению, механике твердых и жидких тел, о распространении звука и др. Когда Лагранжу было всего 18 лет, он вступил в переписку с Эйлером, и последний сразу высоко оценил новый алгоритм варьирования, изложенный ему юным ученым в пись-

---

[1] Первый том (1759) назывался «Философско-математические сборники частного Туринского общества» (Miscellanea philosophica mathematica Societatis privatae Taurinensis; во втором — пятом томах (1760/1761—1773) название было заменено на французское и слова «частное общество» — на «Королевское общество» (Mélanges de philosophie et de mathématiques de la Société royale de Turin); с шестого тома (1784) издавались «Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin».

Ж.-Л. Лагранж
(с рисунка Бозио)

ме от 12 августа 1755 г. (см. десятую главу). В 1759 г. Лагранж по предложению Эйлера был избран иностранным членом Берлинской академии; в 1766 г. он по рекомендации Даламбера и Эйлера, решившего вернуться в Петербург, был приглашен на пост директора математического класса, который до того занимал сам Эйлер. На годы жизни Лагранжа в Берлине приходятся многие его работы по алгебре, теории чисел, дифференциальным уравнениям и механике. В 1772 г. он был избран иностранным членом Парижской академии наук и в 1776 г.— Петербургской.

В 1787 г. Лагранж переехал в Париж, где перед ним, в условиях Французской революции и в тесном общении с блестящей плеядой парижских ученых, раскрылись новые перспективы деятельности. Еще в Берлине Лагранж начал испытывать некоторое разочарование в математике; ему казалось, что идейный запас ее в главном исчерпан, и в этом можно усмотреть предчувствие глубоких перемен, наступивших в XIX в. Лагранж ожидал теперь большего от физики и химии, которые все сильнее привлекали ученых. Знаменитая «Аналитическая механика» Лагранжа, изданная в 1788 г., с помощью А. М. Лежандра, два года пролежала на столе автора нераскрытой. Вскоре, однако, Лагранж вновь проявил блеск своего математического гения. Из курса анализа, читанного им в Политехнической школе, возникли «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции об исчислении функций» (1801), содержащие замечательный опыт новой системы математического анализа (см. стр. 285). В Нормальной школе он вел курс элементарной математики и отчасти в связи с этим издал несколько сочинений по алгебре. О его участии в комиссии по введению десятичных мер упоминалось ранее.

Лагранж принадлежал к лучшим математикам XVIII в., уступая лишь Эйлеру по количеству областей исследований и разнообразию решенных задач; впрочем, размах интересов Лагранжа был также громадным. Особенно характерным для Лагранжа, в сравнении с ближайшими предшественниками и современниками, было создание широких теоретических концепций, связывающих в единое целое множество отдельных задач, предложений и приемов. После Ньютона и Лейбница, осуществивших первые синтезы инфинитезимальных методов (Ньютон — также механики), был собран и систематизирован гигантский новый материал, нуждавшийся в дальнейшем обобщении, и это касалось не только дифференциального и интегрального исчисления, но и других старых и новых математических наук. Конечно, поисками общих алгоритмов, методов и концепций занимались и другие математики, в первую очередь Эйлер, но в XVIII в. лишь у Лагранжа такие поиски становятся основным направлением творчества, да и манеры мышления. Аналогом его математических и механических конструкций могут служить развитые в ту эпоху философские, философско-исторические и иные идеологические системы. С этим было связано особое «совершенство аналитического стиля» Лагранжа (мы привели в кавычках слова о нем Ж. Б. Фурье), особая изящность, сжатость и вместе с тем общность изложения, которые стали отличительными для языка французской математической школы.

Обрисованные особенности творчества Лагранжа нашли яркое выражение в его трудах по вариационному исчислению, аналитической механике, теории аналитических функций, а также и по алгебре.

В своих «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» (Réflexions sur la résolution algébrique des équations, Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1770)1771, (1772)1773) Лагранж подверг критическому пересмотру все существовавшие до него способы решения уравнений первых четырех степеней с тем, чтобы выяснить, почему ни один из этих способов не годится для уравнений пятой степени, и найти общие приемы решения уравнений всех степеней.

Подход Лагранжа был чисто алгебраическим. Он рассматривал уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с произвольными буквенными коэффициентами, т. е., по существу, рассматривал вопрос об их решении над полем рациональных функций от коэффициентов уравнения: $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Лагранж показал, что все существовавшие методы решения уравнений в радикалах сводились к нахождению рациональных функций корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнений, которые принимали бы при всевозможных перестановках корней $k < n$ различных значений. В общем случае функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает $N = n!$ значений, однако всегда можно найти такие функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, для которых некоторые из этих значений будут совпадать. Например, функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

принимает только два различных значения: φ и $-\varphi$.

Опираясь на теорему о симметрических функциях, согласно которой рациональные функции корней, не изменяющиеся ни при каких перестановках корней (они называются симметрическими функциями), выражаются рационально через элементарные симммметрические функции, т. е. через коэффициенты исходного уравнения, Лагранж выводит следующее важное предложение.

Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает при всех перестановках корней ровно k значений, то она удовлетворяет уравнению степени k

$$\Phi(y) = (y - \varphi_1)(y - \varphi_2)\ldots(y - \varphi_k) = 0$$

или

$$\Phi(y) = y^k - (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_k)\,y^{k-1} + \ldots + (-1)^k \varphi_1 \ldots \varphi_k = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения не меняются ни при каких перестановках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, поэтому они выражаются рационально через $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$.

Проиллюстрируем применение этого предложения на примере решения уравнения третьей степени. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Тогда, следуя Лагранжу, составим выражение

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3,$$

где $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$. Легко видеть, что функция $\theta = t^3$ принимает при всевозможных перестановках корней два различных значения:

$$\theta_1 = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3 \quad \text{и} \quad \theta_2 = (x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3)^3,$$

поэтому она является корнем квадратного уравнения

$$\theta^2 + p\theta + q = 0,$$

коэффициенты которого рационально выражаются через a, b, c. Найдя по обычным формулам корни этого уравнения θ_1 и θ_2, мы определим x_1, x_2, x_3 из системы:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a, \\ x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 &= \sqrt[3]{\theta_1}, \\ x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 &= \sqrt[3]{\theta_2}. \end{aligned}$$

В результате глубокого анализа проблемы Лагранж пришел к следующим основным выводам, которые положили начало будущей теории Галуа.

1. Вопрос о решении уравнений в радикалах сводится к рассмотрению группы подстановок корней уравнения и ее подгрупп. При этом, однако, Лагранж не вводил понятий группы и подгруппы, но широко пользовался подстановками. Подстановкой называется преобразование, переводящее

корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в другую последовательность тех же корней $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$. Для подстановки приняты теперь обозначения

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_{k_1} & x_{k_2} & \ldots & x_{k_n} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Произведением двух подстановок σ и τ называется подстановка ρ, равносильная последовательному выполнению подстановок τ и σ. Роль единицы играет тождественная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, переводящая каждый корень в себя. Каждая подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$ обладает обратной подстановкой $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Группа всех подстановок n элементов называется симметрической группой и обозначается S_n.

Легко видеть, что все подстановки, оставляющие неизменной некоторую рациональную функцию корней φ_1, образуют подгруппу H. Пусть порядок этой подгруппы (т. е. число ее элементов) есть h. Лагранж доказал, что h всегда является делителем порядка N группы S_n и что если $N = kh$, то φ принимает при всех подстановках из S_n ровно k значений. Число k называется индексом подгруппы H в группе S_n. Эта теорема Лагранжа вошла теперь под его именем во все учебники алгебры.

Таким образом, дело сводится к отысканию подгрупп с индексами, меньшими n, и функций, инвариантных при подстановках из этих подгрупп. Именно этот результат и привел, по-видимому, Лагранжа к выводу, что подстановки являются «истинной метафизикой решения уравнений» [1].

2. Две рациональные функции корней $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, не меняющиеся при подстановках одной и той же подгруппы H и только при них, выражаются друг через друга рационально. Такие функции Лагранж называл подобными. В современной терминологии это означает, что подобные функции принадлежат одному и тому же полю $\varkappa$, которое получается путем присоединения к $Q(a_1, \ldots, a_n)$ одной из этих функций. Это частный случай теоремы Галуа, устанавливающей связь между подполем нормального расширения и подгруппами группы Галуа.

Теорема Лагранжа дает возможность выбрать среди подобных функций наиболее простую. Такую функцию можно найти с помощью «резольвенты Лагранжа»

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n,$$

где $\alpha^n = 1$, $\alpha \neq 1$. При циклической подстановке корней $x_k \to x_{k+b}$ (если $k + b > n$, то берется остаток его от деления на n) резольвента переходит в

$$\alpha^{-b} t = x_{b+1} + \alpha x_{b+2} + \ldots + \alpha^{n-1} x_b,$$

откуда видно, что при циклических подстановках $\theta = t^n$ не меняется и, следовательно, функция θ принимает $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ различных значений. Лагранж показывает явно, как, зная $t_1, \ldots, t_n$, найти корни исходного

[1] *J. L. Lagrange*. Oeuvres, t. 3. Paris, 1869, p. 357.

уравнения (способом, аналогичным тому, который мы привели для уравнений третьей степени).

Далее Лагранж рассматривает «метациклическую» подстановку корней $x_k \to x_{ak+b}$, где a взаимно просто с n (если $ak + b > n$, то здесь также берется остаток от деления на n). Метациклическая группа имеет порядок $n\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, равная количеству натуральных чисел, меньших n, и взаимно простых с ним. Поэтому, как показал Лагранж, уравнение степени n можно свести к решению уравнения степени $\frac{n!}{n\varphi(n)}$. Если n простое, то $\varphi(n) = n - 1$ и решение сводится к решению уравнения степени $\frac{n!}{n(n-1)} = (n-2)!$ коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения. В частности, для $n=3$ и $n=5$ число $\frac{n!}{n(n-1)}$ соответственно равно 1 и 6.

Таким образом, решение уравнения пятой степени сводится к решению уравнений шестой степени! «Отсюда следует,— пишет Лагранж,— что весьма сомнительно, чтобы методы, которые мы рассмотрели, могли дать полное решение уравнения пятой степени» [1].

«Вот, если я не ошибаюсь,— заключает он ,— истинные принципы решения уравнений и анализ, наиболее пригодный, чтобы привести к решению; как мы видели, все сводится к некоторому исчислению комбинаций, с помощью которого получают apriori результаты, которые следует ожидать» [2].

Почти одновременно с работой Лагранжа вышел и «Мемуар о решении уравнений» (Mémoire sur la résolution des équations. Mém. Ac. Paris, (1771)1774) Вандермонда, где были развиты примерно те же идеи и методы, что и у Лагранжа. Здесь также рассматривались рациональные функции корней уравнения, принимающие при подстановке корней меньше n различных значений, также вводились «резольвенты Лагранжа». Однако его работа уступает по общности и ясности трактовки мемуару Лагранжа. Исторически она не оказала влияния на дальнейшие исследования по теории уравнений. Между тем в ней содержалось интересное исследование уравнений деления круга $x^n - 1 = 0$. Сформулированные им результаты о разрешимости этих уравнений в радикалах Вандермонд проверил для $n \leqslant 11$. Эти результаты были в конце века переоткрыты, углублены и строго доказаны Гауссом.

Исследования Гаусса

Во всех рассмотренных нами алгебраических работах предполагалось, что корни n-й степени из единицы присоединены к основному полю. Если не считать утверждений Вандермонда, то вопрос о представлении их в радикалах даже не ставился. Гаусс в последней части своих «Арифметических исследованиях» (1801) предпринял полное исследование этого вопроса, выделив тем самым первый важный класс уравнений любой степени, разрешимых в радикалах. Решения уравнения $x^n - 1 = 0$, т. е. корни n-й степени из единицы, могут быть записаны в виде

$$\alpha^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

[1] *J. L. Lagrange.* Oeuvres, t. 3, p. 307.
[2] Там же, стр. 403.

Прежде всего Гаусс сводит задачу к случаю, когда n — простое число, и всюду в дальнейшем предполагает n простыми. Поскольку одним из корней уравнения $x^n - 1 = 0$ является единица, Гаусс ограничивается рассмотрением корней многочлена

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

Так как комплексные числа $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ изображаются на плоскости комплексного переменного вершинами правильного n-угольника, делящими окружность $|z| = 1$ на n равных дуг, уравнение $X = 0$ называют «уравнением деления круга».

Далее Гаусс доказывает, что в случае простого n многочлен X неприводим в поле рациональных чисел, т. е. его нельзя представить в виде произведения двух многочленов с рациональными коэффициентами. Гаусс показывает, что если число $n - 1$ разлагается на натуральные множители α, β, γ (которые являются простыми), то X разлагается на α множителей степени $(n - 1)/\alpha$, коэффициенты которых определяются решением уравнения степени $(n - 1)/\alpha$, каждый из этих множителей в свою очередь разлагается на β множителей степени $(n - 1)/\alpha\beta$, коэффициенты которых определяются решением уравнения степени β и т. д., так что если число множителей $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ равно ν, то нахождение корней многочлена X сводится к последовательному решению ν уравнений степеней $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Например, в случае $n = 17$, где $n - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, нахождение корней многочлена X сводится к решению четырех квадратных уравнений, а в случае $n = 7$, где $n - 1 = 2 \cdot 3$, нахождение корней многочлена X сводится к решению одного квадратного и одного кубического уравнений. Так как с помощью циркуля и линейки можно осуществить построение, равносильное решению квадратного уравнения, и нельзя осуществить построение, равносильное решению уравнения третьей и высших степеней, из этой теоремы Гаусса вытекает, что при простом n правильный n-угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки только в том случае, когда число n имеет вид $2^k + 1$; легко видеть, что в этом случае степень k также имеет вид 2^α, так как если $k = gh$, где g нечетно, то

$$2^{gh} + 1 = (2^h + 1)(2^{h(g-1)} - 2^{h(g-2)} + \ldots - 2^h + 1),$$

т. е. $2^k + 1$ — составное число. Таким образом, циркулем и линейкой можно построить правильные n-угольники, у которых n — простое число вида $2^{2^\alpha} + 1$ (это так называемые простые числа Ферма); в частности, при $\alpha = 0, 1, 2, 3$ имеем $n = 3, 5, 17, 257$. Здесь же Гаусс привел выражение

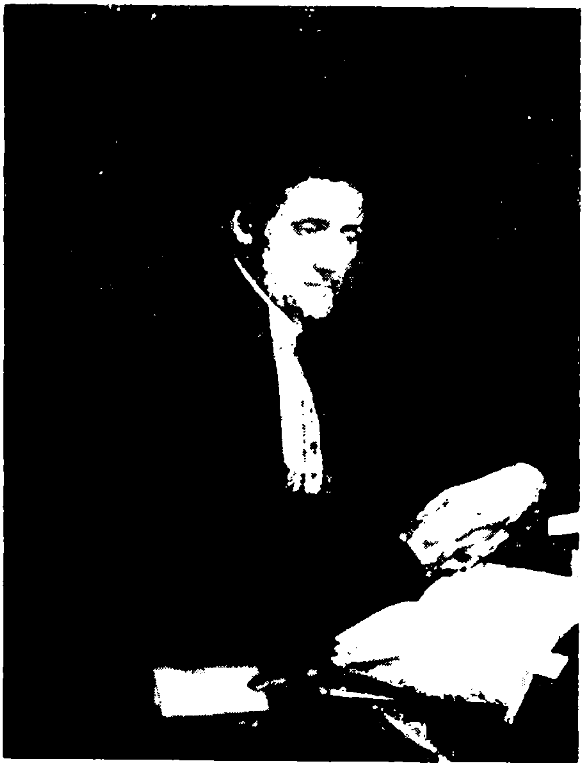
$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}},$$

позволяющее фактически построить правильный 17-угольник с помощью циркуля и линейки. Из теоремы, доказанной Гауссом для простых n, вытекает, что в общем случае можно построить циркулем и линейкой правильные n-угольники только тогда, когда число n имеет вид $2^{2^\alpha} p_1 p_2 \ldots p_m$, где p_i — различные простые числа вида $2^{2^\alpha} + 1$. Далее Гаусс показывает, что при любых n все корни всех полученных им промежуточных уравнений, кроме последнего, если оно квадратное, — действительные числа; с помощью резольвент Лагранжа он выясняет также, что все эти промежуточные уравнения разрешимы в радикалах, откуда и вытекает разрешимость в радикалах уравнения $x^n - 1 = 0$ при любых n. Анализ Гаусса был, по существу, основан на разложении группы Галуа уравнения деления круга (т. е. группы всех подстановок корней этого уравнения, не изменяющих справедливости рациональных соотношений между ними) в прямую сумму циклических подгрупп и на построении подполей, соответствующих каждой из подгрупп. В случае уравнения деления круга $X = 0$ группа Галуа — циклическая группа порядка $n - 1$. В 1826 г. Абель перенес методы Гаусса на случай уравнений, группа подстановок корней которых коммутативна, показав для этого, что любая коммутативная группа распадается в прямую сумму циклических подгрупп. Этим была построена теория Галуа для класса уравнений с коммутативной группой (так называемых абелевых уравнений).

Работа Руффини

Вопрос о невозможности разрешения в радикалах общих уравнений пятой и высших степеней снова поднимается в книге воспитанника и профессора анализа университета Модены Паоло Руффини (1765—1822). «Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени» (Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto. Bologna, 1798 — 1799). Излагаемое здесь доказательство невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени он пытался улучшить в последующих работах 1801, 1802, 1806 и 1813 гг. Упомянем, что в одной работе 1820 г. Руффини показал ошибочность метода решения любых буквенных алгебраических уравнений, предложенного в 1812 г. Вронским. Руффини не удалось дать строгого доказательства этой теоремы, но он сделал важный шаг вперед по пути к такому доказательству. Теория Руффини основана на предложении о том, что не существует функций пяти переменных, принимающих при перестановках этих переменных только три или четыре значения. Руффини, по существу, рассматривал и группы подстановок. Он обнаружил связь между приводимостью алгебраического уравнения и тем, что рассматриваемая им группа перестановок его корней не переводит любой корень в любой другой корень (в настоящее время это свойство группы называется интранзитивностью), а также связь между разрешимостью уравнения с помощью вспомогательных уравнений низшей степени и тем, что корни уравнения делятся на классы, переводящиеся один в другой всякой перестановкой рассматриваемой им группы (в настоящее время это свойство группы называется импримитивностью).

Теорема о неразрешимости в радикалах общих уравнений пятой и высших степеней была строго доказана Н. Х. Абелем в 1824—1826 гг. Уже в работах Абеля выделилось понятие области рациональности, а в 1830—1832 гг. французский математик Эварист Галуа ввел понятия группы, подгруппы и нормального делителя и развил аппарат теории групп. Оперируя новыми понятиями группы и поля, он нашел общее условие разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Теория Галуа, по существу, представляла собой обобщение теории Гаусса и Абеля, однако если они рассматривали уравнения с коммутативной группой Галуа, то Галуа рассмотрел общий случай, когда группа Галуа некоммутативна.



П. Руффини

Выделенный Галуа класс подгрупп некоммутативных групп — нормальные делители — обладает тем же свойством, что и любые подгруппы коммутативной группы: эти подгруппы вместе с их смежными классами составляют группы, называемые фактор-группами группы по нормальному делителю. Условие разрешимости Галуа состоит в том, что группа Галуа обладает цепочкой вложенных друг в друга нормальных делителей, обладающих тем свойством, что фактор-группа группы по первому из них и фактор-группа каждого из них по следующему, а также последний из этих нормальных делителей коммутативны,— такие группы получили название разрешимых групп; в случае коммутативных групп это свойство выполняется автоматически.

Теория Галуа завершила длинный ряд исследований крупнейших математиков XVIII—XIX вв. Основное значение этих исследований и самой теории состоит, как это часто бывает в математике, не столько в окончательном решении проблемы разрешимости уравнений в радикалах, сколько в аппарате теории групп и полей, которые были при этом введены и которым суждено было изменить всю структуру современной алгебры.

Комбинаторика

О развитии комбинаторики в XVII в. мы рассказали во втором томе, в главе, посвященной также теории вероятностей, которая в то время поставляла наиболее разнообразные задачи на соединения и в которой комбинаторные методы находили важнейшие приложения (если не считать задачи возведения в степень двучлена). Там же мы рассмотрели вклад, внесенный в теорию соединений Я. Бернулли, поскольку его классическое «Искусство предположений», изданное в 1713 г., было подготовлено еще в XVII в.

Комбинаторные методы и в дальнейшем сохраняли свое значение в решении многих вопросов теории вероятностей, но вместе с тем в их развитии все бо́льшую роль начинают играть проблемы алгебры, теории чисел, геометрии, теории рядов. Постепенно комбинаторика вырастает в отдельную отрасль математики, изучающую определенного рода операции над конечными множествами элементов любой природы, причем общей целью оказывается определение комбинаторных функций—численности множеств, образованных с помощью таких операций. К концу XVIII в. выделение комбинаторики в самостоятельную дисциплину вполне оформилось, и целая школа немецких математиков пыталась даже утвердить ее первенство в системе математических наук.

Несколько отступая от хронологического порядка, мы прежде всего упомянем решение Эйлером нескольких теоретико-числовых задач комбинаторного характера, именно задач на представление натурального числа n в виде суммы $m < n$ натуральных чисел. Эта задача заинтересовала еще Лейбница, затем в 1740 г. Ф. Ноде поставил ее перед Эйлером, который произвел подсчет числа возможных разбиений при различных условиях в ряде статей (Commentarii, (1741—1743)1751; Novi Commentarii, (1750—1751) 1753 и (1769)1770), а также в первом томе «Введения в анализ бесконечных» (1748). Характерно название первой из упомянутых статей: «Различные аналитические заметки о соединениях» (Observationes analyticae variae de combinationibus). Мы еще вернемся к этим задачам в третьей главе, а пока отметим два обстоятельства. Во-первых, здесь появились понятия сочетаний и размещений с определенной суммой, а во-вторых, в комбинаторику был введен метод производящих функций, позволяющий определять комбинаторные функции как коэффициенты разложений производящих функций в степенные ряды. До того единственным приемом комбинаторики служило индуктивное установление рекуррентных соотношений, далеко не всегда доказываемых с помощью полной математической индукции.

Комбинаторной является и геометрическая задача о числе P_n возможных способов разбиения n-угольника на треугольники посредством непересекающихся диагоналей. Эту задачу поставил Эйлер в письме к Гольдбаху от 4 сентября 1751 г., приведя в качестве решения формулу

$$P_n = \frac{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-10)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)} \qquad (n \geqslant 3),$$

опубликованную без доказательства в «Novi Commentarii», (1758—1759) 1761. Довольно сложное рекуррентное соотношение для P_n опубликовал там же уже упоминавшийся (стр. 12) профессор ряда немецких университетов, уроженец Венгрии Иоганн Андреас Зегнер (1704—1777), а затем этой задачей занимались С. К. Котельников (Novi Commentarii, (1764) 1766), Н. И. Фусс (в обобщенной постановке — о разбиении n-угольника на m-угольники, 1810; опубл. 1830) и еще многие математики.

Мы только упомянем задачу о числе способов, какими можно без повторений пройти все 64 клетки ходом коня (Эйлер — Mém. Ac. Berlin, (1759) 1766 и Вандермонд — Mém. Ac. Paris, (1771) 1774), а также топологическую задачу Эйлера о семи кенигсбергских мостах, о которой расскажем далее (см. стр. 204).

Большой цикл работ по комбинаторике вырос из исследований о возведении в степень многочлена, которые начались еще в XVII в. В 70-е годы этого столетия общий прием вычисления коэффициентов соответствующего разложения нашел Лейбниц, который, однако, лишь упомянул об открытом им правиле в одном из писем к И. Бернулли 1695 г. и затем в статье об аналогии между дифференцированием произведения многих функций и возведением в степень многочлена, напечатанной в 1710 г. (см. т. II, стр. 273). Рекуррентное правило образования коэффициентов разложения в бесконечный ряд выражения $(az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^n$ впервые опубликовал Муавр в «Philosophical Transactions» за 1697 г. Он привел соображения, подтверждающие правило для натуральных значений n, но вывод для дробных n отложил до другого случая, который ему не представился; в «Аналитических этюдах» (1730) он добавил лишь разложение для $n = -1$. Недостатком изложения Муавра и многих последующих авторов было обозначение всех коэффициентов различными буквами и отсутствие какой-либо комбинаторной символики. В этих условиях рекуррентные соотношения или же вид общих членов приходилось определять либо в чисто словесной (как это делал Муавр), либо в довольно громоздкой и недостаточно общей форме (как поступал, например, Эйлер).

Найденные результаты Муавр применил в «Philosophical Transactions» за следующий 1698 г. к вычислению корня «бесконечного уравнения»

$$az + bz^2 + cz^3 + \ldots = gy + hy^2 + iy^3 + \ldots$$

в виде ряда

$$z = \frac{g}{a}y + \frac{h - bA^2}{a}y^2 + \frac{i - 2bAB - cA^3}{a}y^3 + \ldots,$$

где прописные буквы A, B,. . . обозначают всякий раз коэффициент предыдущего члена. И в этом случае Муавр дал словесное правило вычисления коэффициента при степени y^{n+1} по n предыдущим. Доказательство предлагалось провести по методу неопределенных коэффициентов, подставив в данное уравнение выражение z в форме степенного ряда $z = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \ldots$. Формула обращения рядов Ньютона (см. т. II, стр. 232) получается из найденного для z значения при $h = i = \ldots = 0$.

Появление этой статьи Муавра и начавшийся спор о приоритете в открытии дифференциального исчисления (см. т. II, стр. 220) побудили Лейбница выступить в «Acta Eruditorum» за 1700 г. с изложением собственного приема вычисления корней «бесконечных уравнений». По существу оба ученых пришли к одинаково общим результатам. Замечательной особенностью статьи Лейбница явилось обозначение коэффициентов парами и тройками числовых индексов, правда, без букв,— обозначение, которое он применил и в набросках по теории определителей (см. т. II, стр. 52). Данное уравнение он писал в виде

$$0 = (01y + 02y^2 + 03y^3 + \text{и т. д.}) + (-10 + 11y + 12y^2 + \text{и т. д.})z^1 + \\ + (20 + 21y + 22y^2 + \text{и т. д.})z^2 + \text{и т. д.},$$

а его корень — в виде $z = 101y + 102y^2 + 103y^3 + 104y^4 + 105y^5 +$ и т. д. Эти обозначения в то время не нашли сторонников, а много позднее были улучшены путем индексирования букв.

После Муавра разложение степени многочлена выводили средствами алгебры или анализа различные математики, в том числе Маклорен (1742) и Эйлер (1748, 1755). При этом получали либо закон последовательного вычисления коэффициентов, либо рекуррентную формулу. Р. И. Бошкович, имя которого нам еще встретится (см. стр. 134), кажется, первый пришел к непосредственному представлению коэффициентов разложения в итальянском «Giornale de'Letterati d'Italia» за 1747 г. Новый подход к задаче предложен был в школе комбинаторного анализа, возникшей в Германии в последней четверти XVII в., особенно благодаря энергии К. Гинденбурга, который правильно понял назревшую потребность в объединении и обобщении методов теории соединений, хотя и сильно переоценил их реальное значение для того времени.

Карл Фридрих Гинденбург (1739—1808), воспитанник и профессор Лейпцигского университета, преподавал в нем философию и затем физику; он был одним из инициаторов и издателей немецких математических журналов, о которых говорилось в первой главе (см. стр. 16). Задаче возведения многочлена в произвольную рациональную степень Гинденбург посвятил целую серию работ, печатавшихся с 1778 г. и получивших известное завершение в одной из статей изданного им сборника, носившего громкое название «Полиномиальная теорема, важнейшее предложение всего анализа» (Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis. Leipzig, 1796). Для вывода общей формулы он применил развитые им приемы теории соединений и в конце концов показал, как коэффициент общего члена выражается через давно уже известные комбинаторные функции. Попутно Гинденбург создал целую систему обозначений и терминов, но они были слишком сложными и не сохранились, и мы приведем два его основных результата в более современной форме:

$$(a + b + c + \ldots)^n = \sum \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots}\, a_0^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \ldots,$$

где суммирование производится по значениям $n_1, n_2, n_3, \ldots$, сумма которых равна n, и

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^n = \sum \frac{n!}{n_0!\, n_1!\, n_2! \ldots}\, a_0^{n_0} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots x^m,$$

где $n_0 + n_1 + n_2 + \ldots = n$ и $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots = m$. Здесь число членов предполагается конечным и показатель — натуральным числом. Распространение на бесконечные многочлены и рациональные значения совершалось формально и не сопровождалось каким-либо исследованием сходимости.

Полиномиальная теорема послужила отправным пунктом работ школы комбинаторного анализа, к которой примкнули Гиероним Кристоф Эшенбах (1764—1797), молодым человеком покинувший Лейпциг для службы в одной ост-индийской компании; Кретьен Крамп (1760—1826), после ряда лет странствий и перемен профессий обосновавшийся профессором математики в Страсбурге; Иоганн Фридрих Пфафф (1765—1825), имя которого носит известная задача теории дифференциальных уравнений, профессор в Гельмштедте и Галле; Генрих Август Роте (1773—1842), профессор в Лейпциге и Эрлангене, и другие. То центральное место, которое Гинденбург присвоил полиномиальной теореме в системе комбинаторного анализа, на деле она не занимала. Комбинаторики построили обширную систему формул умножения и деления рядов, их возведения в степень и извлечения корней, обращения рядов, подстановки рядов в ряды, разложений различных трансцендентных функций и т. д. Упомянем в качестве одного из характерных примеров вывод общего члена ряда, возникающего при обращении рядов, данный в более частном случае Эшенбахом (1789) и в более общем — Гинденбургом (1793). Некоторые пробелы в исследовании Эшенбаха восполнил Роте (1793), вскоре затем (1795) доказавший при помощи своей формулы обращения известную формулу Лагранжа (см. стр. 83). Комбинаторики раскрыли связи некоторых своих формул с формулами исчисления бесконечно малых. Так, Пфафф (1795) вывел из теоремы Тейлора формулу обращения Лагранжа, а из нее — формулу Эшенбаха — Роте. Любопытно, что, увлеченные аналитическими приложениями, комбинаторики не оценили индексационной символики Лейбница и уделили мало внимания теории определителей, в которой теория соединений играет столь важную роль (ср. стр. 70).

Гинденбург полагал, что на основе комбинаторного анализа удастся построить весь математической анализ, основным аппаратом которого он, как и многие другие математики того времени, считал бесконечные и в первую очередь степенные ряды; можно усмотреть некоторое сходство этой последней концепции с теорией аналитических функций Лагранжа. В действительности формально-комбинаторная разработка инфинитезимальных методов не соответствовала актуальным задачам математики конца XVIII и начала XIX в. Довольно ограниченная проблематика школы вскоре была исчерпана и влияние ее в целом оказалось незначительным. Все же плодом ее деятельности явились не только отдельные изящные общие формулы, но и осознание специфики задач и методов комбинаторного анализа в целом. Одной из ближайших задач явилось создание более удобной и оперативной символики, о чем со всей определенностью писал, например, в 1808 г. Крамп. Мы приведем некоторые обозначения, предложенные в рассматриваемое или близкое к нему время. Для произведения $a(a+r)\ldots(a+nr-r)$ Крамп предложил запись $a^{n/r}$, а в частном случае $1\cdot2\cdot3\ldots n$, вместо $1^{n/1}$,— более простой знак $n!$, который и укоренился. Произведения такого вида он называл facultés (факультетами), а его коллега по Страсбургскому университету Л. Арбогаст (1800) factorielles (факториалами). Обозначение числа сочетаний $\left(\frac{n}{m}\right)$ ввел в 1827 г. венский математик А. фон Эттингсгаузен, которому принадлежит одно из первых доказательств теоремы Штурма (1830; см. стр. 83); это обозначение восходит к применявшимся Эйлером символам $\left(\frac{m}{n}\right)$ (1778; опубл. Nova Acta (1799—1802)1806) и $\left[\frac{m}{n}\right]$ (Acta (1781 : I) 1784). Другое принятое теперь обозначение C_n^m возникло, вероятно, из сходного знака М. Ома (1829), так же как знак перестановки P_n.