ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

От Я. Бернулли до Муавра

Начало XVIII в. ознаменовалось посмертной публикацией «Искусства предположений» Я. Бернулли (1713 г.: см. т. II, гл. 5). Доказанный в ней закон больших чисел оказал сильнейшее влияние на последующее развитие теории вероятностей. Обычно закон больших чисел Я. Бернулли записывают в виде

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{\nu}-p\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

где p — вероятность осуществления события при каждом испытании, μ — количество появлений события при ν испытаниях. Но сам Бернулли сформулировал свой закон в виде, который является прообразом локальной предельной теоремы. Именно, он оценил отношение суммы $2n$ членов ряда $(r+s)^{(r+s)n}$, симметрично расположенных относительно максимального члена, к сумме остальных членов ряда и соответственно получил при $(r+s)\,n \geqslant 8226+5758\ \lg c$

$$P\left\{-\frac{1}{r+s}\leqslant\frac{\mu}{(r+s)\,n}-\frac{r}{r+s}\leqslant\frac{1}{r+s}\right\}\geqslant\frac{c}{1+c}.$$

Здесь $c>0$ — любое наперед заданное число, $(r+s)\,n$ — число испытаний (ν) и $r:(r+s)$ — вероятность (p), причем $(r+s)$ может быть сделано сколь угодно большим.

Хотя Я. Бернулли и предполагал применить вероятностные рассуждения «к гражданским, моральным и экономическим вопросам», но он этого не сделал, оставив свою книгу незавершенной по сравнению с первоначальным планом. Книга обрывается после доказательства «теоремы Бернулли». В этом направлении работа была продолжена племянником Якова и Иоганна Бернулли, Николаем I Бернулли (1687—1759), который посвятил этим вопросам свой «Опыт применения искусства предположений к правовым вопросам» (Specimina artis conjectandis ad quaestiones juris applicatae, 1709; краткое изложение также в Actorum erud. suppl., 1711). Здесь теоретико-вероятностные идеи и методы применялись к оценке свидетельских показаний, к объявлению безвестно-отсутствующих умершими, подсчетам пожизненных рент, вопросам смертности, страхования жизни и товаров, а также к так называемому генуэзскому лото, на основе которого впоследствии возникло нумерное лото. Таким образом, уже в начале XVIII в. было положено начало и различным «моральным» приложениям теории вероятностей, которым впоследствии уделяли внимание крупнейшие математики, включая Лапласа.

Но роль Н. Бернулли отнюдь не ограничивается указанным выше. Он был редактором посмертного издания «Искусства предположений» Я. Бернулли, опубликовал несколько статей по теории вероятностей, состоял в переписке с рядом математиков. Заслуживает упоминания, что в «Опыте применения искусства предположений» Н. Бернулли вывел формулу для математического ожидания длины случайного интервала AB, образованного фиксированной точкой A и самой правой из случайных точек B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, равномерно распределенных на заданном отрезке AB $(B_i \leqslant C)$. Эта задача, сформулированная в терминах смертности n человек и решенная при условии $n \to \infty$, была первой, в которой вводились непрерывное равномерное распределение и, одновременно, порядковая статистика (наибольший элемент из выборки).

Другой специальный результат Н. Бернулли относится к классической задаче о соотношении количеств рождений мальчиков и девочек. Приняв биномиальное распределение с параметром $m : f$ для вероятности новорожденному оказаться мальчиком, Бернулли определил вероятность ежегодному числу рождений мальчиков μ находиться в заданных пределах (n — общее ежегодное количество рождений, $r = n : (m + f)$):

$$P\{|\mu - rm| \leqslant l\} \approx \frac{t-1}{t}, \qquad t \approx \left[1 + \frac{l(m+f)^2}{m/n}\right]^{l^2} \approx \exp\left[\frac{l^2(m+f)^2}{2m/n}\right]$$

и (чего уже нет у Н. Бернулли) при $m : (m + f) = p$, $f : (m + f) = q$

$$P\{|\mu - rm| \leqslant l\} \approx 1 - \exp\left(\frac{-l^2}{2pqn}\right). \tag{1}$$

Как и Я. Бернулли, Н. Бернулли в своем выводе опирался на алгебраическое изучение сумм отрезков биномиального ряда и отношений этих сумм к сумме «среднего» отрезка ряда. В рассуждении Н. Бернулли, хотя и в косвенной форме, впервые фактически участвовала показательная функция вида e^{-x^2}, а само рассуждение, как и у Я. Бернулли, является прообразом локальной предельной теоремы.

Отметим, что $pqn = D\mu$, где D — символ дисперсии, и что формула (1), исправленная числовым множителем $\sqrt{2/\pi} \approx 0{,}80$, могла бы служить для подсчетов в соответствии с интегральной предельной теоремой.

Изложенные результаты Н. Бернулли сообщил 23 января 1713 г., т. е. еще до выхода в свет «Искусства предположений», в письме к любителю математики П. Р. де Монмору (1678—1719). Монмор опубликовал это письмо во втором издании своего «Опыта анализа азартных игр» (Essai d'analyse sur les jeux de hazard, 1708 и 1713, р. 388—393) и впоследствии на это письмо сослался Муавр.

В «Опыте» содержался теоретико-вероятностный разбор ряда азартных игр, а во втором издании в качестве приложений приведена переписка автора с Н. Бернулли и И. Бернулли. Одна из игр (le her) приводила к затруднениям, которые были решены лишь в современной теории игр на основе принципа минимакса.

Предельные теоремы А. де Муавра

Француз по национальности и гугенот по религиозной принадлежности, Абрахам де Муавр [1] (1667—1754) вынужден был покинуть Францию, где, после отмены Нантского эдикта (1685), гарантировавшего гугенотам, т. е. протестантам, свободу вероисповедания, от него ни насилием, ни угрозами не смогли добиться перехода в католичество. Примерно в 1688 г. ему удалось переселиться в Лондон, где он и прожил всю остальную жизнь. Здесь он самостоятельно восполнил свое математическое образование и вскоре выдвинулся как талантливый математик; в 1697 г. он был избран членом Королевского общества. Он пользовался благожелательным отношением и уважением Ньютона, латинское издание «Оптики» которого вышло в свет при большом редакционном участии Муавра. В поздние годы своей жизни Ньютон имел обыкновение отсылать к Муавру всех, обращавшихся к нему, Ньютону, с вопросами математического характера. Однако новая родина Муавра не обеспечила ему какого-нибудь официального положения и материального обеспечения и зарабатывал он на жизнь частными уроками да платными консультациями. В 1735 г. Муавр был избран членом Берлинской академии наук, а незадолго до смерти (1754) — иностранным членом Парижской академии.

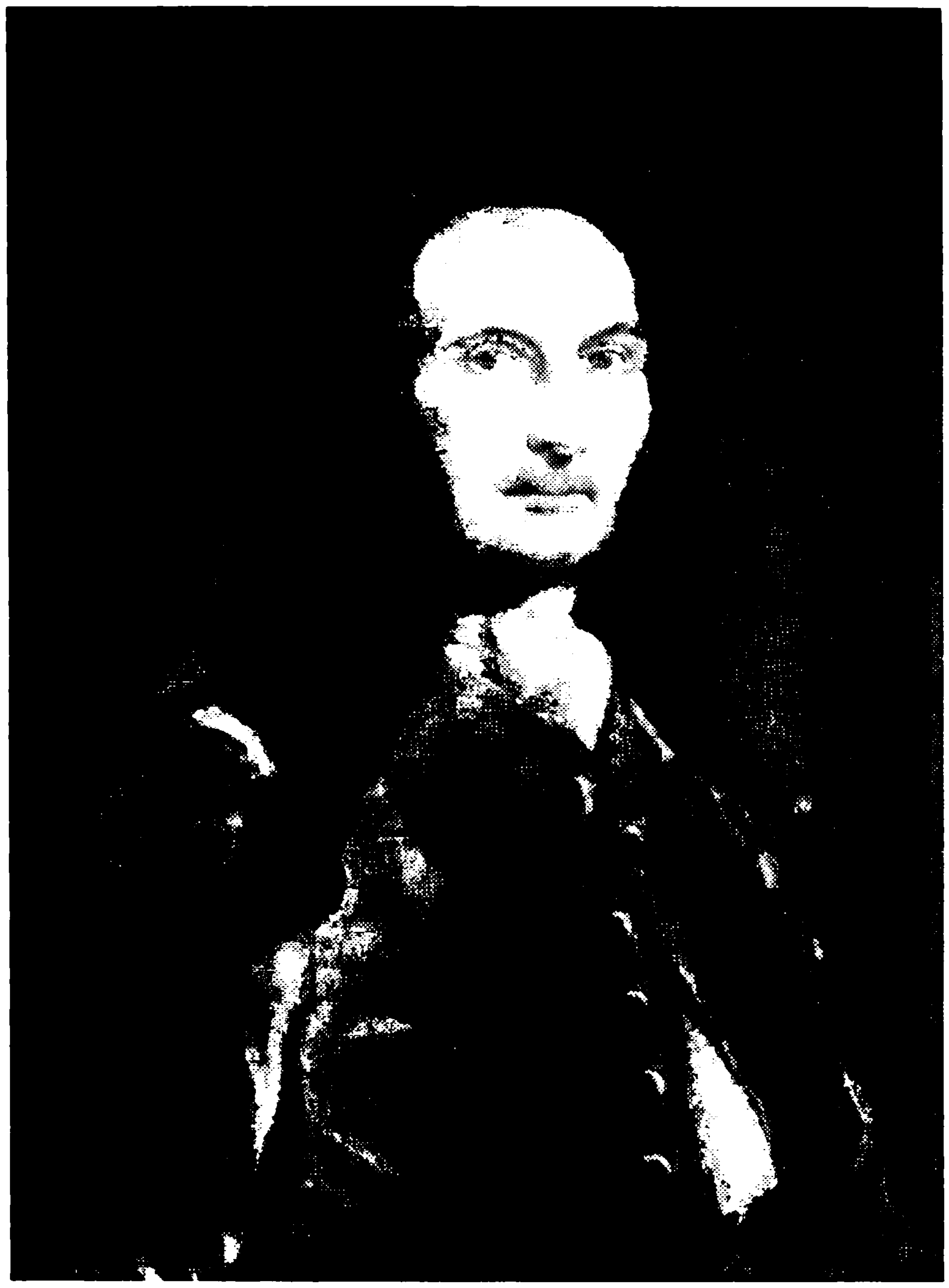
Основные теоретико-вероятностные сочинения Муавра таковы: «Учение о случаях, или метод вычисления вероятности событий при игре» (The doctrine of chances: or, a method of calculating the probability of events in play. London, 1718, 1738, 1756), развернутое из объемистой статьи «О мере случая» (De mensura sortis, 1711. Philos. Trans., 1712) и «Аналитические этюды о рядах и квадратурах» (Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Londini, 1730) с двумя, очевидно, позднее приплетенными дополнениями. Второе дополнение, датированное 1733 г., имеется лишь у нескольких экземпляров книги, но в переводе на английский язык оно включено в позднейшие издания «Учения о случаях». Именно в этом дополнении — «Метод аппроксимации суммы членов разложенного в ряд бинома $(a+b)^n$ с выводом некоторых практических правил для оценки степени согласия, которую следует придать экспериментам» (A method of approximating the sum of the terms of the binomial $(a+b)^n$ expanded into a series, from whence are deduced some practical rules to estimate the degree of assent which is to be given to experiments) — Муавр доказал теоремы, которые сейчас называются локальной и интегральной предельными теоремами Муавра — Лапласа. Не владея, разумеется, введенным позднее понятием равномерной сходимости, Муавр доказал (например, в случае интегральной теоремы). что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \leqslant \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \tag{2}$$

где μ — число наступлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность этого события равна $p = 1 - q$. При выводе своих теорем Муавр широко использовал разложения функций в степенные ряды, а также так называемую формулу Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

[1] Первоначальная фамилия А. де Муавра была просто Муавр; он был сыном врача. Частицу «де» он добавил к своей фамилии сам.



А. Муавр
(с портрета Хаймора, хранящегося в Лондонском
королевском обществе)

которая, однако, была известна и самому Муавру (лишь значение константы, $\sqrt{2\pi}$, Муавру сообщил Стирлинг) и которую следовало бы называть формулой Муавра — Стирлинга. Это тем более справедливо, что Муавр, в первом дополнении к «Аналитическим этюдам», опубликовал первую таблицу $\lg n!$ для $n = 10, 20, 30, \ldots, 900$.

Схема вывода Муавра была такова. Подсчитывалось: 1) отношение среднего члена бинома $(1 + 1)^{2m}$ к сумме всех членов разложения; 2) отношение среднего члена этого бинома к члену, удаленному от этого последнего на произвольное расстояние l; 3) отношение произвольного члена бинома к сумме всех членов разложения (т. е. к 2^{2m}) и 4) отношение суммы членов между средним и удаленным от него на l к сумме всех членов разложения. В дальнейшем изложении Муавр распространил ход рассуждений на бином $(a + b)$ и тем самым доказал в общем случае локальную (в пункте 3)) и интегральную (в пункте 4)) предельные теоремы.

И с точки зрения Муавра и с современной точки зрения, «предельные теоремы Муавра — Лапласа» являются непосредственным развитием закона больших чисел Я. Бернулли. Эти теоремы были заново доказаны Лапласом, который вообще почти не указывал своих предшественников, и по этой причине упомянутая выше основная заслуга Муавра в теории вероятностей оставалась неизвестной до конца XIX в.

Непосредственный повод к составлению «Метода аппроксимации» дала упомянутая выше задача о рождаемости мальчиков и девочек. Но фактически цели Муавра были очень широкими: исходя из философских взглядов Ньютона, которому он посвятил первое издание своего «Учения о случаях», Муавр хотел установить вероятностный критерий для отличия необходимого (предначертанного провидением) и случайного, особенно если результаты опыта (статистическая частота осуществления ряда событий) значительно отличаются от ожидаемого (по априорной вероятности) результата. Аналогичные цели ставили себе ученые и в более позднее время. Так, Лаплас систематически применял теоретико-вероятностные методы и рассуждения для выявления детерминированных законов небесной механики.

Заслуги Муавра не ограничиваются выводом нормального закона распределения и доказательством предельных теорем. В связи с вопросами смертности и подсчетом пожизненных рент он систематически употреблял непрерывное равномерное распределение; он исследовал целый ряд азартных игр и для этой цели разработал новый аналитический аппарат — теорию возвратных последовательностей, продолженную далее Эйлером, Лагранжем и Лапласом. Его влияние на Лапласа и Лагранжа было исключительно велико, но уже после первых работ Лапласа Муавра почти забыли. Этому способствовал ряд причин: частично работы Муавра были опубликованы на малораспространенном на континенте Европы английском языке, его символика быстро устарела, а форма изложения — решение бесконечного числа отдельных задач, притом, в ряде случаев, без доказательства, — отпугивала читателей.

Статистика народонаселения

Основные проблемы статистики народонаселения (или, как было принято говорить, политической арифметики), т. е. проблемы рождаемости, смертности и т. д., а также связанные с ними проблемы подсчетов для страхования жизни и вычислений стоимости пожизненных рент оказались важнейшими приложениями теории вероятностей XVIII в.

Таблицы смертности появились еще в XVII в. после основополагающей для политической арифметики книги Дж. Граунта (см. т. II, гл. 5). Определенные предположения о смертности, основанные, видимо, на фактическом материале, привел политический деятель и математик Ян де Витт (1625—1672) в объяснительной записке членам правительства Генеральных штатов (Голландии) «Стоимость пожизненных рент в отношении к обычным рентам» (Waerdije van lijf-renten near proportie van los-renten, 1671). Но наиболее значительной оказалась упомянутая в пятой главе второго тома статья 1694 г. Э. Галлея, который составил эмпирическую таблицу одновременно живущих людей по возрастным группам для стационарного населения, определил вероятность дожития до каждого возраста и вычислил соответствующую стоимость пожизненной ренты. Вычисления Галлея легли в основу работы вдовьей и сиротской касс, учрежденных в Лондоне в 1699 г.

Галлея высоко ценил Муавр, который именно на основе эмпирических данных Галлея пришел к непрерывному равномерному распределению как к единому закону смертности (исключая детскую смертность). Этот закон не удержался в специальной литературе, которая к середине XVIII в. стала носить узкорецептурный характер. Но в руках настоящих мастеров, каким был, например, Муавр, проблемы политической арифметики приводили к постановке и решению важных теоретико-вероятностных проблем, а также и к зарождению математической статистики.

Самое слово статистика (от итальянских stato — государство, statista — политик, страновед) появилось в немецкой школе государствоведения XVIII в. и сперва означало общее описание стран, включавшее и некоторые числовые данные. Эта школа распалась ввиду разнородного содержания своего предмета, и, хотя некоторые ученые XVIII в. занимали промежуточную позицию между государствоведением и политической арифметикой, именно в рамках последней возникла собственно математическая статистика. Впрочем, в сочинениях XVIII в. и, пожалуй, первой половины XIX в. подчас трудно разделить теорию вероятностей и математическую статистику.

Историческую близость теории вероятностей и математической статистики можно иллюстрировать тем, что «классическая» вероятность события (отношение числа благоприятных случаев к общему числу всех равновозможных случаев) применялась наравне с частотной, статистической вероятностью события (т. е. с наблюдаемой относительной частотой события). Хотя формальным определением служило только первое, практически применялись, повторяем, оба определения вероятности. Более того, именно сочетание этих определений вероятности, попытки установить классическую вероятность по наблюденной частоте и оценить возможные уклонения последней от предсказанной на основе классической вероятности частоты служили основой для развития теории вероятностей, пожалуй, до середины XIX в. (закон больших чисел Я. Бернулли, предельные теоремы Муавра — Лапласа).

Современники Я. Бернулли понимали его закон больших чисел как теорему, позволившую обосновать проводившиеся с XVII в. вероятностные расчеты в демографии. Тем самым теория вероятностей получила важное поле приложений и поистине стала отдельной научной дисциплиной. Что же касается названия этой дисциплины, то впервые оно было предложено Паскалем, который намеревался написать книгу «Математика случая» (Aleae geometria; см. т. II, стр. 88). Но этот термин остался неизвестным, и в употребление вошло название «Учение о случаях», как назвал свою книгу 1718 г. Муавр. Лишь в XIX в. стало применяться современное название, которое окончательно закрепилось в результате работ Лапласа.

Первой политико-арифметической работой XVIII в. оказалось сочинение врача, математика и сатирика Дж. Арбутнота (1667—1735) «Довод в пользу божественного провидения, взятый из постоянной закономерности, наблюдаемой в рождении (младенцев) обоих полов» (An argument for divine Providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes. Philos. Trans., v. 27, (1710) 1712). Заметив, что 82 года подряд в Лондоне рождалось больше мальчиков, чем девочек, Арбутнот заявил, что этот факт не может соответствовать равной вероятности рождений обоих полов, а потому выражает волю провидения, заботящегося о постоянном преобладании рождений мальчиков. Иными словами, он отверг гипотезу биномиального распределения рождений с $p = q = 1/2$ и принял $p > q$.

Рассуждения Арбутнота о «воле провидения» оказались характерными для ряда последующих авторов. В научном отношении мы имеем здесь дело с одной из первых, если не первой, проверкой статистической гипотезы о значении параметра функции распределения; впрочем, вопрос о критериях проверки в то время не ставился.

После Арбутнота и Н. Бернулли следует упомянуть Муавра, Симпсона и Зюссмильха. Но если работы первого были в основном теоретико-вероятностными, второго — частично также теоретико-вероятностными, частично узко прикладными, то с сочинением пастора Иоганна Петера Зюссмильха (1707—1767) «Божественный порядок в изменениях человеческого рода, доказываемый рождениями, смертью и размножением» (Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen, 1741), фактически возникла статистика народонаселения как научная дисциплина.

Статистические закономерности были подмечены и использованы еще Граунтом, но Зюссмильху принадлежит заслуга фундаментального исследования статистики народонаселения. Во всех закономерностях этой статистики Зюссмильх видел проявление воли провидения, «божественный порядок». Такой подход естественно обусловил тенденциозность многих положений Зюссмильха. Вместе с тем Зюссмильх в каждом удобном случае утверждал, что от количества и «качества» населения зависит могущество государства и что поэтому правители, в соответствии со своими собственными интересами, а также в соответствии с волей провидения, должны заботиться о населении своих государств. Осуждая те факторы общественной жизни, которые нарушают «божественный порядок», Зюссмильх выступил против войн, нищеты, чрезмерной роскоши и т. п. Во втором двухтомном издании своего труда (1761—1762) он высказался за освобождение крестьян.

Следует сказать, что первое издание сочинения Зюссмильха менее известно, чем второе, расширенное примерно в 3—4 раза. Восьмая глава этого второго издания «О скорости умножения и периоде удвоения человеческого рода» (а возможно, и все издание в целом) была написана при деятельном участии Эйлера, которого Зюссмильх называет своим «высокочтимым другом» и «академическим коллегой».

Заслуги Эйлера в самой теории вероятностей не очень велики. Гораздо более значительны его работы в области статистики народонаселения и математических основ страхования жизни. Помимо соавторства с Зюссмильхом Эйлеру принадлежит ряд статей по указанной теме, собранных в седьмом томе первой серии его «Opera omnia», 1923. В одной из этих статей — «Общие исследования о смертности и умножении человеческого рода» (Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. Mém. Ac. Berlin, (1760) 1767) — Эйлер поставил и решил ряд задач о вероятностях выживания отдельных лиц одного и того же возраста, вычислил соответствующую стоимость пожизненной ренты и привел приближенную формулу для возрастания населения во времени.

Ни в этой, ни в других работах аналогичного направления Эйлер не вводит предположений о законах смертности, а предлагает пользоваться статистическими данными. Его рассуждения, как всегда, изящны и убедительны и действительно представляют собой методическую разработку принципов вычислений, интересную и в наше время.

Несколько работ Эйлера по теории вероятностей были вызваны широким распространением различных лотерей, которые должны были пополнить казну Прусского королевства. Он решал задачи о вероятностях различных исходов, появления подряд нескольких номеров, о цене лотерейных билетов и т. п. Эйлер занимался также вопросами демографии и создал законченную теорию повозрастной смертности. Наконец, ему пришлось рассмотреть и ряд задач страхового дела, касающихся организации пенсионных касс и обеспечения лиц, уходящих в отставку. Свои решения Эйлер дополнял подробно составленными таблицами. Не затрагивая основных проблем теории вероятностей и ограничиваясь разбором отдельных конкретных задач, Эйлер все же оставил заметный след в указанных приложениях этой науки.

Теория ошибок

Элементы теории ошибок были сформулированы Галилеем (см. т. II, гл. 5) в связи с требованиями астрономии. После Ньютона фундаментальной научной задачей явилась задача определения фигуры Земли по астрономо-геодезическим измерениям. Эта задача, связанная и с более непосредственными нуждами картографирования обширных территорий, привела к дальнейшим работам в области математической обработки измерений.

Здесь прежде всего следует назвать опубликованную вместе с «Гармонией мер», т. е. посмертно (см. стр. 61), статью Р. Коутса «Оценка погрешностей в прикладной математике с помощью изменений[1] элементов плоского и сферического треугольника» (Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici, 1722). В самом конце сочинения Коутс рекомендовал употреблять при обработке непосредственных измерений среднее арифметическое, дав определенное правило для учета весов измерений и сравнив общее среднее арифметическое с центром тяжести системы точек — результатов измерений.

Рассуждение Коутса носило качественный характер. Но уже через несколько десятилетий, в основном в работах Т. Симпсона и И. Г. Ламберта, были заложены основы теории ошибок. Симпсон принял для погрешностей измерений дискретное треугольное распределение вероятностей, симметричное относительно оси ординат, с максимумом на этой оси, и доказал, что при этом распределении среднее арифметическое в вероятностном смысле предпочтительнее отдельного измерения. Тем самым Симпсон дал первое обоснование широко применявшемуся в астрономии среднему арифметическому. Свою статью «О преимуществе выбора среднего из некоторого числа наблюдений в практической астрономии» (On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. Philos. Trans., (1755) 1756) в расширенном виде Симпсон включил в «Сборник трактатов по некоторым изящным и весьма интересным темам из механики, физической астрономии и спекулятивной математики» (Miscellaneous tracts on some curious, and very interesting subjects in mechanics, physical astronomy and speculative mathematics. London, 1757), и здесь мы находим у него непрерывное треугольное распределение.

Ламберт описал вероятностные свойства ошибок наблюдений, дал правила оценки их точности и подбора параметров эмпирических прямых и кривых по точкам — наблюдениям, отягощенным случайными погрешностями. Он также сформулировал цели теории ошибок (этот термин,

[1] Именно — весьма малых приращений.

кажется, предложен им самим) и впервые предложил (1760) принцип максимального правдоподобия для определения параметра сдвига одновершинной кривой распределения по результатам наблюдений.

Соответствующие сочинения Ламберта: «Фотометрия» (Photometria, 1760, §§ 271—306) и «Очерки о математике и ее применении» (т. I, Берлин, 1765; ср. стр. 111)[1].

Работы по теории ошибок продолжались на протяжении последующих десятилетий. Ж. Л. Лагранж в 1775 или 1776 г. опубликовал мемуар «О применении метода составления среднего из результатов большого числа наблюдений» (Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, Misc. Taur., том V, за 1770—1773 гг., датировка произведена по переписке Лагранжа), в котором решил ряд задач о вероятности погрешности в среднем арифметическом при различных законах распределения погрешностей наблюдений (дискретных и непрерывных). При этом Лагранж фактически пользовался производящими функциями (что, впрочем, делал еще Муавр) и, без должного обоснования, ввел в математику первые интегральные преобразования. Будучи, однако, не естествоиспытателем, а математиком, Лагранж остановился на этом и уступил дорогу Лапласу, важнейшие работы которого относятся уже к XIX в.

До конца века были еще опубликованы сочинения Р. Бошковича, Л. Эйлера, Д. Бернулли и П. С. Лапласа.

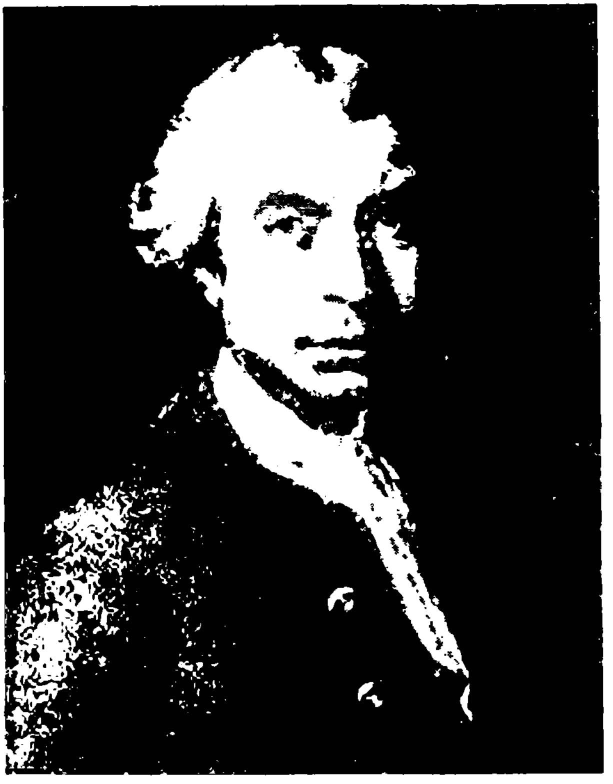
Ружер Иосип Бошкович (1711—1787), уроженец Дубровника в Далмации, получил научную подготовку и работал главным образом в Италии, с которой Дубровник имел тесные культурные связи. Автор оригинальной системы динамической атомистики (1758), Бошкович приобрел большие заслуги в области физики и особенно астрономии; он был иностранным членом Лондонского королевского общества и с 1760 г. Петербургской академии наук. Занятия Бошковича астрономией соединялись с разработкой тригонометрии; они же привели его к работе по градусному измерению между Римом и Римини (1750—1753), которую он выполнил совместно с английским иезуитом Христофером Мейром (1697—1767), автором ряда сочинений по астрономии.

Это градусное измерение было описано Мейром и Бошковичем в «Научной экспедиции в Папскую область для измерения двух градусов меридиана и исправления географических карт» ([C.] Maire, [R.] Boscovich. De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam. Roma, 1755). Но лишь во французском переводе этого сочинения «Астрономическое и географическое путешествие в Папскую область» (Voyage astronomique et géographique dans l'Etat de l'Eglise. Paris, 1770), в приложении к пятой книге, написанной Бошковичем, описана интересующая нас математическая обработка их градусного измерения и вывод параметров (x, y) земного эллипсоида по результатам ряда градусных измерений.

Фактически Бошкович решал переопределенную систему линейных алгебраических уравнений

$$a_i x + b_i y + l_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

[1] Следует указать, что подбор эмпирических кривых с учетом погрешностей наблюдений произвел еще в XVI в. Николай Коперник. Хотя его работы в этом направлении не изучены, заслуга его здесь несомненна.



Р. И. Бошкович
(с портрета Р. Пайна 1760 г., хранящегося в Музее Мале Браче, Дубровник)

Указанная задача являлась классической и решалась рядом современников Бошковича, включая Эйлера.

Системы вида (3) были, естественно, несовместными и потому решались при некоторых дополнительных условиях, накладываемых на неизбежно остававшиеся остаточные свободные члены (v_i). В описанной задаче следует полагать, что v_i подчинены некоторому закону распределения, независимы и не смещены. Дополнительные условия Бошковича, в которых он видел теоретико-вероятностный смысл, оказались весьма целесообразными и были приняты впоследствии Лапласом. Лишь в XIX в. от них отказались в пользу получившего универсальное применение условия наименьших квадратов. В настоящее время подобного рода задачи (но детерминированные, а не вероятностные) решаются также в рамках математического программирования.

Д. Бернулли в мемуаре «Наиболее вероятное определение по нескольким расходящимся между собою наблюдениям и устанавливаемое отсюда наиболее правдоподобное заключение» (Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda. Novi Commentarii, (1777) 1778) вторично (после Ламберта) применил принцип максимального правдоподобия к отысканию абсциссы $\bar{x}$ вершины кривой распределения погрешностей наблюдений.

Д. Бернулли начинает свой мемуар с сомнений в целесообразности применения «всеобще принятой» арифметической средины, которая соответствует лишь случаю равной вероятности всех ошибок, т. е. «стрельбе вслепую». Для плотности распределения («шкалы вероятности») Д. Бернулли принимает ряд условий и в качестве кривой плотности предлагает полуокружность вида

$$y = \sqrt{r^2 - (x - \bar{x})^2}, \qquad y \geqslant 0, \qquad \bar{x} > 0. \tag{4}$$

Обозначив результаты наблюдений через 0, a, b, ... ($a > 0$, $b > 0$, ...)

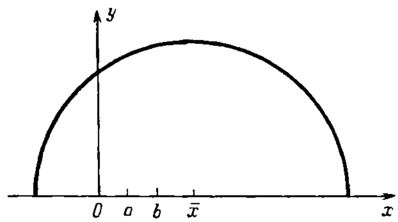


Рис. 2

(рис. 2), он составляет функцию правдоподобия

$$(r^2 - \bar{x}^2)\,[r^2 - (\bar{x} - a)^2]\,[r^2 - (\bar{x} - b)^2]\ldots$$

и отыскивает параметр $\bar{x}$ из условия ее максимума. Поскольку для удобства вычислений функция правдоподобия была составлена им для квадратов плотности (4), то фактически следует считать, что за кривую плотности Д. Бернулли принял дугу параболы $y = r^2 - (\bar{x} - x)^2$.

Решение уравнения правдоподобия оказалось исключительно громоздким: даже для случая трех наблюдений этого уравнение есть алгебраическое уравнение пятой степени с 20 членами. Впрочем, рабочие формулы могут быть также записаны в виде

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \qquad p_i = \frac{1}{r^2 - (\bar{x} - x_i)^2}, \tag{5}$$

где $x_i = 0$, a, b, ...— результаты наблюдений, числом n. Эти формулы, которые Д. Бернулли не привел, предполагают применение метода последовательных приближений и показывают, что «веса» тем больше, чем дальше находятся соответствующие наблюдения от средней группы и, вообще говоря, от среднего арифметического. Этот результат должен был казаться неожиданным, и лишь в последние годы он получил подтверждение в работах Ллойда (наилучшие линейные оценки Ллойда).

Быть может, ввиду этой неожиданности Д. Бернулли и не отметил прямо, что оценка $\bar{x}$ в его формулах зависит больше от крайних, а не от средних наблюдений. И объективно получилось так, что современники Д. Бернулли, прочитав его исходные соображения о нецелесообразности применения среднего арифметического, могли ошибочно считать, что автор предлагает усилить роль средних наблюдений. Именно такую ошибку совершил Эйлер в комментарии, приложенном к мемуару Д. Бернулли. Эйлер высказался против оценки максимального правдоподобия, предложив взамен оценку (5) с весами

$$p_i = r^2 - (\bar{x} - x_i)^2.$$

Впрочем, его оценка также соответствовала максимуму некоторой функции правдоподобия

$$(r^2 - \bar{x}^2)^2 + [r^2 - (\bar{x} - a)^2]^2 + [r^2 - (\bar{x} - b)^2]^2 + \ldots$$

И работа Д. Бернулли, и комментарий Эйлера, кажется, оставались плохо известными.

Кроме того, в связи со своими астрономо-геодезическими вычислениями Эйлер неоднократно решал системы (3) и предложил для этого первый из нескольких применявшихся в XVIII в. методов — метод минимакса $|v_{\max}| = \min$, где минимум берется относительно всех возможных решений системы (3). Строго говоря, система (3) несовместна. Под ее решением мы здесь понимаем любой «разумный» набор $\{x, y, \ldots\}$.

Классическая теория ошибок была завершена в XIX в. в работах Лапласа и Гаусса, а также ближайших предшественников последнего — А. М. Лежандра и Р. Эдрейна. Что же касается ранних мемуаров Лапласа, то к теории ошибок имеет отношение его «Мемуар о вероятностях причин по событиям» (Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 1774). Лаплас, исходя из аналитического предположения, основанного лишь на «отсутствии причин» (!) для противоположного предположения, принял для плотности распределения погрешностей наблюдений функцию

$$\varphi(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|} \quad (m > 0)$$

и предложил определить m, исходя, по существу, из байесовской концепции, используя результаты опыта (астрономических наблюдений).

Теорема Байеса

Томас Байес (1702—1761) [1], священник и член Королевского общества, в посмертно изданной статье «Опыт решения одной задачи учения о случаях» (An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. Philos. Trans., (1763—1764), 1764—1765) исследовал воображаемый опыт — падение материальной точки (у Байеса — мяча) на квадрат $ABCD$ со стороной $a = 1$ (рис. 3). Опыт проводится $p + q = n$ раз. Если p раз падение произошло правее случайной прямой so и q раз левее этой прямой (положение точки o на AB равновероятно), то, полагая, что вероятность падения в любую точку квадрата одна и та же,

$$P\{o \in [bc]\} = \frac{\int_b^c x^p (a - x)^q \, dx}{\int_0^a x^p (a - x)^q \, dx} \quad (a = 1). \tag{6}$$

[1] Правильное произношение: Бэйз.

Таким образом, по результатам опыта (соотношения $p : q$) фактически определялась классическая, априорная вероятность падения материальной точки правее so в единичном испытании.

Полученный результат широко использовался, пожалуй, всеми последующими учеными, в том числе и Лапласом. Но часто допускалось и ошибочное применение формулы Байеса, при котором не учитывалось, что отысканию подлежит апостериорный закон распределения случайной величины с известным априорным законом распределения. У Байеса априорное распределение точки o на AB принималось равномерным (прямая so определялась падением специальной «пробной» материальной точки),

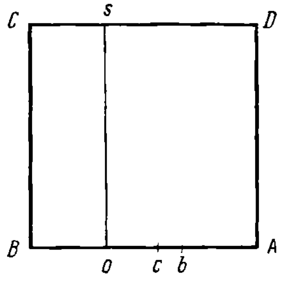


Рис. 3

что, впрочем, не является существенным ограничением общности: его формулу можно обобщить на случай других априорных распределений. Но при практическом использовании априорное равномерное распределение подчас постулировалось ввиду «полного незнания» и, более того, применяли формулу Байеса для отыскания значения неизвестной константы, которая, естественно, вообще не является случайной величиной.

По указанной причине в недалеком прошлом (Р. Фишер, Ю. Нейман) делались попытки вообще полностью отказаться от всяких априорных оценок в математической статистике и руководствоваться только результатами опыта. Но, начиная, пожалуй, с А. Вальда, старая байесовская точка зрения в более совершенной форме снова получила признание в математической статистике.

Некоторые примеры применения формулы Байеса привел Р. Прайс (1723—1791), публицист, экономист и философ-моралист, горячий защитник североамериканских колоний и Французской буржуазной революции, опубликовавший статью Байеса. В частности, он отметил, что при «полном незнании» законов природы можно было бы по формуле Байеса определять вероятность последующих восходов Солнца. Этот пример неоднократно приводился в последующей литературе (например, Бюффоном и Лапласом). Прайс подчеркнул, что формула Байеса в некотором смысле обратна результатам Муавра (т. е. интегральной предельной теореме Муавра — Лапласа), более непосредственно применима к отделению воли провидения от случайного и, в отличие от этих результатов, применима также к малым p (или q).

Формула (6) может быть выписана сразу, на основе определения плотности распределения. Байесу, который этим понятием не владел, пришлось специально обосновывать формулу (6) и, конечно же, его рассуждения могут быть применены для любого распределения (не обязательно биномиального).

Но основная часть мемуара посвящена вычислению интегралов, входящих в формулу (6), при больших p и q при помощи несложных, но громоздких выкладок и привлечения специальной «осредняющей» кривой вида

$$y = a^p b^q \left(1 - \frac{n^2 x^2}{pq}\right)^{\frac{p+q}{2}}.$$

Байес нигде не использует предельного перехода, видимо, полагая его не нужным для практических приложений. Если все же перейти к пределу, то из результатов Байеса получится, что

$$\lim_{p+q=n\to\infty} P\left\{-x \leqslant \frac{\bar{p}-a}{\frac{\sqrt{pq}}{n\sqrt{n}}} \leqslant x\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz.$$

Здесь $\bar{p}$ — статистическая оценка фактически определяемого Байесом параметра p, $a = E\bar{p}$ — математическое ожидание этой оценки,

$$\frac{pq}{n^{3/2}} = D\bar{p},$$

где D — символ дисперсии. Равенство параметров a и $pq/(n\sqrt{n})$ соответственно математическому ожиданию и корню из дисперсии $\bar{p}$ имеет место до членов порядка $1/n$.

Полученный результат с указанной точностью совпадает с результатом Муавра (2), так как в (2) $npq = D\mu$.

Но примечательно, что Байес, видимо, понимал, что формула Муавра (2) непригодна для его схемы, в которой по известным частотам p и q определялось $\bar{p}$.

Так называемой «формулы Байеса» (дискретного аналога формулы (6))

$$P\{A_i/B\} = \frac{P(B/A_i)\,P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B/A_j)\,P(A_j)}$$

апостериорной вероятности события A_i не содержится в мемуаре Байеса. (Здесь $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — несовместимые и априорно равновероятные события, а событие B может осуществиться с одним и только с одним из событий A_i.) Эта формула (в словесном виде) была причислена Лапласом в «Опыте философии теории вероятностей» (см. далее стр. 148) к основным принципам теории вероятностей (принцип VI) и притом обобщена на случай неравных априорных вероятностей событий A_i.

Следующий, VII принцип у Лапласа есть формула полной вероятности $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)$, также записанный им в словесной форме.

У Байеса в начале мемуара имеется только формула

$$P(B) = P(A)\,P(B/A).$$

Название «формула Байеса» появилось, как можно думать, в середине XIX в.

Работы Д. Бернулли

В середине и во второй половине XVIII в., до Лапласа, в теории вероятностей работал целый ряд ученых, среди которых первое по значению место принадлежит Д. Бернулли.

С 1738 по 1778 г. он опубликовал семь мемуаров, содержащих решение важных вероятностных проблем статистики народонаселения и астрономии. Д. Бернулли принадлежат первенство в систематическом употреблении дифференциальных уравнений для вывода целого ряда формул, в публикации таблицы нормального распределения, во введении в литературу «морального ожидания». Вторым после Муавра он вывел нормальный закон распределения и доказал «предельные теоремы Муавра — Лапласа» и вторым после Ламберта применил принцип наибольшего правдоподобия (см. выше).

Непосредственной целью мемуара Д. Бернулли «Опыт новой теории меры случая» (Specimen theoriae novae de mensura sortis. Commentarii, (1730—1731) 1738) было решение парадокса одной придуманной Николаем I Бернулли азартной игры, которая получила название *петербургской* именно ввиду появления этого мемуара Бернулли в «Записках» Петербургской академии наук. К слову сказать, из семи мемуаров по теории вероятностей Д. Бернулли опубликовал в Петербурге шесть.

Игра состояла в том, что один игрок (Павел) бросает монету до первого выпадения герба. Если это событие происходит при k-м броске ($k = 1, 2, 3, \ldots$), то второй игрок (Петр) выплачивает первому 2^{k-1} дукатов. Для безобидности игры Павел должен уплатить Петру сумму, равную математическому ожиданию своего выигрыша. Но математическое ожидание выигрыша Павла равно

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots,$$

т. е. бесконечно, что делает игру невозможной. Этот результат привел к попыткам видоизменить условия игры и, что более важно, к попыткам исследовать основы приложений теории вероятностей.

Одна такая попытка (правда, более поздняя) была сделана крупнейшим естествоиспытателем Ж. Л. Бюффоном (1707—1788), которому не были чужды теоретико-вероятностные идеи. Бюффон предложил принимать, что в практических задачах малые вероятности $p < 1/10\,000$ просто равны нулю или, иначе, что редкие события при единичном испытании практически неосуществимы. Мы еще вернемся к Бюффону, а пока отметим, что этот принцип, основанный на законе больших чисел Я. Бернулли, используется и сейчас, причем соответствующая вероятность выбирается в каждом отдельном случае независимо и, кроме того, этот выбор осуществляется вне рамок теории вероятностей.

Бюффон также утверждал (1730), что с возрастанием имущества игрока падает ценность выигрыша заданной величины. Из аналогичных соображений исходил в своем мемуаре Д. Бернулли, который, однако, облек эти соображения в математическую форму: приняв, что произвольному (малому) выигрышу dx соответствует выгода y, обратно пропорциональная имуществу x игрока, Д. Бернулли записал это предположение в виде:

$$dy=\frac{bdx}{x}, \qquad b>0, \qquad x>0, \qquad y\equiv f(x)=b\ln\frac{x}{\alpha},$$

где α — исходный капитал (имущество) игрока.

Тем самым он впервые в теории вероятностей применил дифференциальное уравнение, а логарифмическую функцию выгоды $f(x)$ он предложил ввести в выражение для математического ожидания взамен x. Получающееся при этом «моральное ожидание»

$$\frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}, \tag{7}$$

по мнению Д. Бернулли, следовало использовать для анализа выгодности азартных игр, а также и в коммерческих операциях, связанных с риском.

Азартные игры, при которых математическое ожидание выигрыша равно нулю, при употреблении морального ожидания с логарифмической функцией $f(x)$ оказываются невыгодными,— моральное ожидание проигрыша превышает моральное ожидание выигрыша,— и в этом Д. Бернулли усматривал «отчетливое указание природы» на необходимость уклоняться от азартных игр.

По формуле (7) моральное ожидание выгоды Павла от участия в петербургской игре оказывается равным

$$z = b\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha+1}{\alpha} + \frac{1}{4}\ln\frac{\alpha+2}{\alpha} + \frac{1}{8}\ln\frac{\alpha+4}{\alpha} + \dots}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots} =$$

$$= b\left[\ln\left(\sqrt{\alpha+1}\,\sqrt[4]{\alpha+2}\,\sqrt[8]{\alpha+4}\,\dots\right) - \ln\alpha\right],$$

соответствующее ожидание капитала Павла

$$x = \sqrt{\alpha+1}\,\sqrt[4]{\alpha+2}\,\sqrt[8]{\alpha+4}\,\dots,$$

а ожидаемое приращение капитала

$$\Delta x = \sqrt{\alpha+1}\,\sqrt[4]{\alpha+2}\,\sqrt[8]{\alpha+4}\,\dots - \alpha.$$

Поэтому плата (s) за право участия в игре должна быть такой, чтобы для имущества ($\alpha - s$) выполнялось равенство

$$\sqrt{\alpha-s+1}\,\sqrt[4]{\alpha-s+2}\,\sqrt[8]{\alpha-s+4}\,\dots - \alpha = 0.$$

Приближенно, при больших α, $s \approx \Delta x$, т. е. конечно.

Отметим, что по так называемому неравенству Иенсена для математического ожидания выпуклой функции $f(x)$, т. е. функции, расположенной «ниже» своей хорды, $Ef(x) \geqslant f(Ex)$. В рассматриваемом случае $E(-\ln x) \geqslant -\ln Ex$ или $E\ln x \leqslant \ln Ex$, а потому при $x > 0$ заведомо $E\ln x < Ex$, т. е. моральное ожидание выигрыша меньше математического ожидания. Хотя в данном случае это несущественно,— математическое ожидание выигрыша было бесконечным,— но выпуклые функции в настоящее время играют важную роль в теории вероятностей и математической статистике (случайные процессы, теория статистических решений).

Добавим еще, что логарифмическая функция оказалась удобной для применения в теории информации.

Термин «моральное ожидание» (которого не применял Д. Бернулли) и формула (7) в частных случаях

$$f(x) = \min(x; 2^{24}) \quad \text{и} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

принадлежат Г. Крамеру (см. его письмо 1728 г., адресованное Николаю I Бернулли и опубликованное Д. Бернулли в конце рассматриваемого мемуара). Свои формулы Крамер предложил для решения парадокса той же петербургской игры, однако именно логарифмическая функция Д. Бернулли оказалась в ходу у последующих авторов, пожалуй, до второй половины XIX в. Хотя моральное ожидание так и не получило тогда практического применения, современные математико-статистические функции ущерба по своему духу близки к нему.

Не рассматривая всех мемуаров Д. Бернулли, мы теперь остановимся на «Аналитических исследованиях новой проблемы предположений» (Disquisitiones analyticae de novo problemate conjecturali. Novi Commentarii, (1769) 1770). Здесь он рассматривает урновые схемы, решая, например, следующую задачу: в первой урне содержится n белых шаров, во второй урне — n черных и в третьей урне — n красных шаров. Каково ожидаемое количество шаров каждого цвета в урнах после r циклических перекладок из одной урны в другую? Не отличая количества шаров от математического ожидания этого количества (ошибка, встречающаяся во всех мемуарах Д. Бернулли), он получает комбинаторным методом и методом дифференциальных уравнений, например, для количества белых шаров в первой урне при больших n и r

$$A \approx ne^{-r/n}\left[\alpha e^{r/n} + \beta e^{-r/2n}\sin\frac{r\sqrt{3}}{2n} + \gamma e^{-r/2n}\cos\frac{r\sqrt{3}}{2n}\right], \tag{8}$$
$$\alpha = {}^1/_3, \quad \beta = 0, \quad \gamma = {}^2/_3.$$

Интересно, что $A = f(r/n)$, т. е. что математическое ожидание оказалось зависящим от дискретного параметра, что характерно для нестационарных случайных процессов. Еще интереснее, что Д. Бернулли отметил существование предельного состояния шаров в урнах (равное количество шаров каждого цвета в каждой урне), точнее, предельных значений математического ожидания количества шаров.

Этот факт, учитывая соображения симметрии, легче всего доказывается и притом обобщается на случай любого конечного числа урн теоремой о существовании предельной матрицы перехода в однородных цепях Маркова. Физики могли бы увидеть в этой урновой схеме прообраз некогда популярной вероятностной модели тепловой смерти конечной Вселенной.

Следует отметить, что использование дифференциальных уравнений является характерной чертой мемуаров Д. Бернулли. В рассматриваемом мемуаре метод дифференциальных уравнений для вывода формулы (8) носил вероятностный характер. Обозначив через x, y и $[n - (x + y)]$ количества белых шаров в урнах после некоторого числа перекладок, он исходил из дифференциальных уравнений:

$$dx = -\frac{x}{n}dr + \frac{n-(x+y)}{n}dr, \qquad dy = -\frac{ydr}{n} + \frac{xdr}{n}.$$

Например, первое из этих уравнений выражает изменение количества, точнее, математического ожидания количества белых шаров в первой урне: первый член учитывает вероятность перекладки белого шара из этой урны в третью, второй член — вероятность перекладки белого шара из третьей урны в первую, причем введение dr означает замену дискретного процесса, поскольку r принимает только натуральные значения, непрерывным.

Подсчеты, аналогичные последним, Д. Бернулли применил еще ранее, в «Применении алгоритма бесконечных в искусстве предположений» (De usu algorithmi infinitesimalis in arte conjectandi specimen. Novi Commentarii, (1766—1767) 1768), но для случая извлечения карточек разных цветов из урны наугад без возвращения. Если в урне первоначально находилось $2n$ карточек, из которых n белого и n черного цветов, перенумерованных от 1 до n, то каждые две карточки разных цветов, но с одинаковыми номерами составляют пару. Изучение количества парных карточек, остающихся в урне после заданного числа извлечений, равносильно изучению законов вымирания браков. И эта последняя задача — одна из важнейших в статистике народонаселения — действительно рассматривалась Д. Бернулли в мемуаре «О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и о других смежных вопросах» (De duratione media matrimoniorum pro quacunque conjugum aetate, aliisque quaestionibus affinibus. Novi Commentarii, (1768) 1769). Соответственно со случаем, когда карточки одного цвета по какой-то причине извлекаются более часто, Д. Бернулли изучил и случай неравной смертности мужчин и женщин, а также рассмотрел ряд дополнительных вопросов.

Другой важнейшей проблеме статистики народонаселения был посвящен мемуар Д. Бернулли «Опыт нового анализа смертности, вызванной оспой, и преимуществ предотвращающей ее инокуляции» (Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. Hist. Acad. Roy. Sci. avec les Mém. Math. et Phys., (1760) 1766). В середине XVIII в. эпидемии оспы уносили весьма большое число жертв,— по оценке Д. Бернулли, правда весьма приближенной, $^1/_{64}$ часть населения ежегодно. Истории этих эпидемий и борьбы с ними при помощи инокуляции, т. е. прививки оспы от больного человека здоровому, посвящены, в частности, два мемуара Ш. М. Кондамина (1701—1774), опубликованных в том же издании в 1759 и 1763 гг.

Д. Бернулли составил и решил дифференциальное уравнение между статистически средними величинами, получив формулу для подсчета относительного количества лиц, не болевших оспой. Аналогичную формулу он получил для инокулированного населения, предположив, что инокуляция исключает оспу, но с малой вероятностью приводит к смертельному исходу. Окончательный результат мемуара заключался в построении таблицы смертности инокулированного населения, для которого средний срок жизни оказывался увеличенным на 3 года 2 месяца.

Наиболее интересным является все же мемуар Д. Бернулли «Приложение меры случая к случайным последовательностям естественных событий» (Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata. Novi Commentarii (1769—1770), 1770—1771), в котором ставился классический вопрос о соотношении рождаемости мальчиков и девочек. С точки зрения математической статистики это была проверка статистической гипотезы о значении параметра биномиального распределения. Этот вопрос Д. Бернулли так и не решил, но в процессе решения он, вторым после Муавра, вывел «предельные теоремы Муавра — Лапласа».

Д. Бернулли вначале отыскивает математическое ожидание (M) количества мальчиков из общего числа ежегодных рождений $2N$ при относительной частоте рождений мальчиков и девочек, равной $a:b$. Предположив фактически, что имеет место биномиальный закон рождений с параметром $a:b$, и соответственно вычислив максимальный член разложения $(a+b)^{2N}$, он получил

$$M = \frac{2Na}{a+b}.$$

Далее, для μ порядка $\sqrt{N}$, снова используя бином $(a+b)^{2N}$, Д. Бернулли вычисляет приращение вероятности

$$P\{m = M+\mu+1\} - P\{m = M+\mu\} \equiv d\pi = \pi - \frac{2N-M-\mu}{M+\mu+1}\,\frac{a}{b}\,\pi d\mu,$$

где m — количество рождений мальчиков. Выведя таким образом дифференциальное уравнение для интересующей его вероятности, Д. Бернулли интегрирует его, получая

$$P\{m = M \pm \mu\} \equiv \pi = Q\exp\left(-\frac{a+b}{2b}\,\frac{\mu^2}{M}\right),$$
$$Q \equiv P\{m = M\}$$

и, наконец, отыскивает суммы вида

$$\sum_{k=0}^{\mu} P\{m = M \pm k\},$$

но не интегрированием, а непосредственным суммированием. Иначе говоря, он применял аналог интегральной предельной теоремы с суммированием взамен интегрирования. Интересно, что в мемуаре содержится и первая опубликованная таблица нормального распределения для $e^{-\mu^2/100}$ при $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ (с четырьмя значащими цифрами).

Д. Бернулли не приводит ссылок на Муавра, быть может, потому, что в свое время просто не обратил должного внимания на мемуар последнего.

Критические выступления Даламбера

Целый ряд статей по теории вероятностей опубликовал Даламбер. В них по преимуществу выражаются сомнения в правильности основополагающих идей классической теории вероятностей и, кроме того, критикуются отдельные теоретико-вероятностные мемуары. Будучи иногда совершенно ошибочной, критика Даламбера, кажется, не оказала существенного влияния на современников и последующих ученых. Вместе с тем эта критика свидетельствовала о недостаточно четкой формулировке некоторых положений теории вероятностей и, особенно, принципов приложения последней.

Ошибка Даламбера в подсчете вероятностей при игре в орлянку, содержащаяся в статье «Герб и решетка» (Croix et pile) 4-го тома «Энциклопедии» (Encyclopédie, v. 4, 1754), стала печально знаменитой. По его мнению, вероятность выпадения *герба* два раза подряд при двух бросках монеты равна $1/3$ (а не $1/4$): если при первом броске выпала *решетка*, то второй бросок делать незачем, кроме того, возможны броски *герб*, *герб* и *герб*, *решетка*, так что всех возможных случаев оказывается не четыре, а только три. На деле равновозможны случаи: *решетка*, *герб*; *решетка*, *решетка*; *герб*, *герб*; *герб*, *решетка*.

Также ошибочны рассуждения Даламбера о «математической» и «физической» вероятностях в статьях, помещенных в его «Математических работах» (Opuscules mathémathiques, v. 4, 1768; v. 7, 1780). Если два взаимоисключающихся события *математически* равновероятны и одно из них произошло несколько раз подряд, то *физически* более вероятным становится появление другого события; последовательности 100 гербов или 100 решеток при игре в орлянку менее вероятны, чем любая другая последовательность из 100 бросков; вероятность выпадения герба m раз подряд при бросках одной монеты меньше вероятности выпадения m гербов при однократном броске m монет. Первое из этих рассуждений к тому же противоречит одновременно высказываемому утверждению о желательности вычисления вероятностей событий по эксперименту.

Гораздо интереснее мысли Даламбера о практической неосуществимости редких событий в одиночном испытании, о связанной с этим непригодности подсчетов математического ожидания выигрыша в играх и о качественном отличии «абсолютной уверенности» от «самой большой вероятности». Первая мысль восходит к Бюффону (см. выше), и Даламбер ссылается на него. Вторая мысль, как сначала представляется, противоречит первой; однако обе они, взятые совместно, означают осторожный подход к использованию теории вероятностей: в одиночном испытании нельзя рассчитывать на осуществление маловероятных событий, а при большом числе испытаний нельзя рассчитывать на неосуществление маловероятных событий. При дальнейшем развитии теории вероятностей подобные рассуждения были формализованы (например, в усиленном законе больших чисел).

Даламбер не замечает порочного круга в классическом определении вероятности: вероятность определяется из равновозможности, а последняя, молчаливо,— из вероятности. На этот факт обратили внимание, кажется, лишь во второй половине XIX в. Даламбер, несмотря на его общее критическое отношение к теории вероятностей, которую он не относил к «точным и верным исчислениям ни по принципам, ни по результатам» [1], этого не заметил.

Особо следует остановиться на приложениях теории вероятностей к статистике народонаселения у Даламбера. И здесь Даламбер допустил неточность. Его почему-то смущает различие между вероятным и средним сроком жизни, которое прекрасно понимал еще Х. Гюйгенс, он видит в этом различии дополнительный недостаток теории вероятностей. Он делает ошибки и при комментировании «Опыта нового анализа смертности» Д. Бернулли, однако высказывает при этом и дельные соображения («Математические работы», т. 4, стр. 310—341).

Прежде всего Даламбер замечает, что исходные предпосылки Д. Бернулли об эпидемиях оспы слишком упрощены и что необходимы подробные статистические данные. Затем он справедливо утверждает, что окончательный вывод о пользе инокуляции не может быть сделан только на основании удлинения среднего срока жизни: не каждый согласится инокулироваться и, следовательно, подвергнуться риску, хотя и малому, не-

[1] *J. D'Alembert.* Opuscules mathématiques, v. 4. Paris, 1768, p. 309—310.

медленной смерти в обмен на отдаленную перспективу прожить несколько дополнительных лет. Кроме того, в этом вопросе существует моральная сторона, например при инокулировании детей, так что полный математический анализ невозможен и т. д. Тем не менее Даламбер поддерживал инокуляцию, предлагая даже выдавать компенсацию или «Знаки отличия» семьям погибших от нее.

Собственный метод сравнения рисков смерти от оспы и от инокуляции Даламбера громоздок и, пожалуй, не продуман до конца, но в его основе лежит, как бы сейчас сказали, мысль о функции ущерба, т. е. фактически мысль самого Д. Бернулли.

В сочинениях Д. Бернулли и Даламбера таким образом наметился осуществленный в XX в., в рамках математической статистики, путь сравнения двух рисков с соответствующим выбором той или иной гипотезы.

Даламбер неоднократно ссылается на Бюффона. Полагая, например, что вероятности, меньшие 1/10 000, следует считать равными нулю, Даламбер следует за Бюффоном, который заметил, что $p = 1/10\,000$ есть вероятность здоровому человеку в возрасте 56 лет умереть в течение ближайших 24 часов. Это и другие вероятностные рассуждения Бюффона содержатся в его «Естественной истории» (Histoire naturelle, Suppl., v. 4, Paris, 1777).

Здесь мы находим также задачу о вероятности восхода Солнца, выражение «средний человек» (l'homme moyen, § 8), понятие о котором в XIX в. легло в основу статистических теорий А. Кетле, замечание о невыгодности азартных игр с нулевым математическим ожиданием выигрыша и разбор петербургской игры, включая опыт,— 2048 партий игры, причем максимальная длительность в девять бросков монеты оказалась только у шести партий.

Но более всего известен опыт с «бюффоновой иглой», из которого, как заметил впоследствии Лаплас, может быть экспериментально подсчитано число π. Менее известно, что Бюффон придумал эту игру с целью доказать преимущество «анализа» перед «геометрией» в теории вероятностей, которая до сего времени занималась исследованием дискретных азартных игр. Иначе говоря, Бюффон хотел ввести в теорию вероятностей непрерывные величины, но, конечно, намного опоздал. Впрочем, следует оговориться: отчет об этом опыте Бюффона был опубликован еще в издании Парижской академии наук 1735 г. (Hist. Acad. Roy. Sci. avec les Mém. Math. et Phys., (1733) 1735).

Лаплас

Выдающийся вклад в теорию вероятностей внес Пьер Симон Лаплас (1749—1827), родившийся в небогатой крестьянской семье в нормандском городке Бомон-ан-Ож. Юношей Лаплас переехал в Париж, где обратил на себя внимание Даламбера и по его рекомендации стал преподавателем математики в Военном училище. Уже первые работы Лапласа в области исчисления конечных разностей (см. стр. 236) и по небесной механике показали силу его дарования. В 1773 г. он был избран адъюнктом и в 1783 г. членом Парижской академии наук; добавим, что с 1802 г. он был почетным членом Петербургской академии.

В революционные годы Лаплас принял руководящее участие в работах комиссии по введению метрической системы, а также Бюро долгот, и,

П. С. Лаплас
(с портрета, хранящегося в Институте Франции, Париж)

подобно Лагранжу, читал лекции в Нормальной школе. На всех этапах бурной политической жизни тогдашней Франции Лаплас не вступал в конфликты с властями, которые почти неизменно осыпали его почестями. Наполеон в бытность первым консулом назначил Лапласа министром внутренних дел, но этот пост он занимал недолго, так как внес в управление, как выразился позднее Наполеон, «дух бесконечно малых», т. е. мелочность. Титул графа, данный ему в годы империи, Лаплас сменил вскоре после реставрации Бурбонов на маркиза. Вообще же делом жизни его было научное творчество, охватившее широкий круг проблем теоретической и особенно прикладной математики, а также физики.

Большую известность в широких кругах читателей принесло Лапласу популярное «Изложение системы мира» (Exposition du système du monde. Paris, 1796, и многие переиздания). Здесь была разработана гипотеза о происхождении Солнечной системы из постепенно охлаждающейся туманности под действием ее вращения — гипотеза, близкая к космогонической гипотезе, гораздо менее удовлетворительно развитой ранее Кантом (1755). Лаплас дал первое научно аргументированное объяснение загадки, волновавшей людей тысячелетиями, но ранее порождавшей только произвольные мифологические толкования или метафизические догадки. Впоследствии были обнаружены слабые стороны гипотезы и в нее вносились уточнения, а наряду с ней были построены другие модели. Это не умаляет исторического значения гипотезы Лапласа.

В гигантской пятитомной «Небесной механике», которую он опубликовал на протяжении четверти века (Traité de mécanique céleste, v. 1—5. Paris, 1799—1825), Лаплас подвел итоги как собственным исследованиям в этой области, так и трудам своих предшественников, начиная с Ньютона. Он дал глубокий анализ всех известных движений тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения и доказал ее устойчивость в смысле практической неизменности средних расстояний планет от Солнца и незначительности колебаний остальных элементов их орбит. Наряду с массой специальных результатов, касающихся движений отдельных планет, спутников и комет, фигуры планет, теории приливов и т. д., важнейшее значение имело общее заключение, опровергавшее мнение (которое разделял и Ньютон), что поддержание настоящего вида Солнечной системы требует вмешательства каких-то посторонних сверхъестественных сил.

Ранее говорилось о работах Лапласа по теории определителей, а далее будут рассмотрены его исследования по уравнениям в конечных разностях, математической физике и по другим вопросам анализа, здесь же мы, естественно, ограничиваемся теорией вероятностей.

Работы Лапласа по теории вероятностей в XVIII в. охватывают 1774—1786 гг. Намного позже он подготовил сжатое изложение теории вероятностей в рамках «Лекций по математике для Нормальной школы» (Leçons de mathématiques données à l'Ecole Normale en 1795, 1812), послужившее основой для будущего «Опыта философии теории вероятностей» (Essai philosophique sur les probabilités. Paris, 1814). Опубликовав к 1805 г. четыре из пяти томов «Небесной механики», Лаплас еще раз вернулся к теории вероятностей и издал свою грандиозную «Аналитическую теорию вероятностей» (Théorie analytique des probabilités. Paris, 1812), подытожив в ней все свои предыдущие результаты, равно как и результаты своих предшественников. Об этом сочинении будет сказано ниже, а сейчас мы кратко опишем мемуары Лапласа XVIII в.

В упомянутом выше (см. стр. 137) «Мемуаре о вероятности причин по событиям» 1774 г. Лаплас, не ссылаясь на Байеса, повторил его результаты, причем записал их в современных обозначениях типа (6), а за исходную модель принял более естественную урновую задачу: в урне имеется бесконечное количество белых и черных полосок в неизвестном соотношении друг к другу. Если из $p + q$ полосок, извлеченных из урны наугад, p полосок оказались белыми и q полосок — черными, какова вероятность того, что при следующем опыте из урны будет извлечена белая полоска? Что при следующих $m + n$ опытах будут извлечены m белых полосок и n черных?... В первом случае искомая вероятность равна

$$P = \frac{\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q\,dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx} = \frac{p+1}{p+q+2}.$$

Именно такого рода подсчеты при $q = 0$ Лаплас использовал (уже в XIX в.) для решения задачи Прайса о вероятности восхода Солнца. Мы не будем входить в подробности дискуссий, которые вызвало предложенное Лапласом решение этой задачи.

Описанная байесовская концепция неоднократно применялась Лапласом и в дальнейшем. Так, в «Мемуаре о вероятностях» (Mémoire sur les probabilités. Mém. Ac. Paris, (1778) 1781) он применил ее к исследованиям демографического характера и к астрономии.

В мемуаре «О рождениях, женитьбах и смертности в Париже с 1771 по 1784 г. и во всей Франции в 1781 и 1782 гг.» (Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'étendue de la France, pendant les années 1781 et 1782. Mém. Ac. Paris, (1783) 1786) Лаплас применил формулы типа байесовских к вычислению населения Франции (p') по известным из частичных переписей данным о населении (p) и о рождаемости (q) и данным о рождаемости во Франции в целом (q'): положив, что $p/q = p'/q'$, он определил p' и его погрешность, полагая p и q выборкой шаров двух цветов из урны с шарами этих цветов при известном общем соотношении их в урне (p'/q').

При отсутствии статистических данных другого выхода, возможно, не было, однако вряд ли исходные предположения были выполнены и, следовательно, вычисленная погрешность p' должна была оказаться заниженной.

Специальную задачу, которую поставил себе Лаплас в «Мемуаре о вероятностях»,— оценить влияние климата на соотношение $(m : f)$ рождаемости мальчиков и девочек,— он, естественно, смог решить только в узком смысле, придя к выводу о статистической значимости расхождений значений $m : f$ в Лондоне и Париже. Аналогичное расхождение для Парижа и всей Франции в целом он объяснил в «Лекциях по математике» искажением статистических данных: в парижский приют для подкидышей попадали подкидыши из окрестных деревень с иным соотношением $m : f$, так как крестьяне часто подкидывали девочек.

Следует подчеркнуть, что установление статистической значимости расхождений между эмпирическими данными, а также задача о влиянии того или иного фактора на исследуемый признак явились важнейшими задачами математической статистики со второй половины XIX в.

В этом же «Мемуаре о вероятностях» у Лапласа впервые появляется задача о вероятности сумме независимых случайных величин с заданным законом распределения находиться в заданных пределах (но еще без предельного перехода). Эта задача, к которой Лаплас вернулся в «Аналитической теории вероятностей», стала центральной задачей теории вероятностей XIX в.

В «Исследованиях об интегрировании дифференциальных уравнений в конечных разностях и об их применении к теории случаев» (Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la théorie des hasards. Mém. Ac. Paris, (1773) 1776) Лаплас по существу дал сборник решения теоретико-вероятностных задач при помощи уравнений в конечных разностях. В этом же мемуаре, а также в «Мемуаре о возвратно-возвратных последовательностях и об их применениях в теории случаев» (Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards. Mém. Ac. Paris, 1774) он ввел уравнения в конечных разностях с двумя переменными и применил их к решению ряда теоретико-вероятностных задач. Эти решения оказались исключительно громоздкими и, пожалуй, имели лишь теоретический интерес.

В «Мемуаре о последовательностях» (Mémoire sur les suites. Mém. Ac. Paris, (1779) 1782) Лаплас опубликовал цельную теорию производящих функций, которую он впоследствии применял в теории вероятностей для решения конечно-разностных уравнений[1].

В мемуаре «О приближениях для формул, которые являются функциями весьма больших чисел» (Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. Mém. Ac. Paris, (1782—1783) 1785—1786) ему пришлось вычислять определенные интегралы — решения конечно-разностных уравнений. В связи с этим Лаплас рассмотрел общую задачу о вычислении интегралов типа

$$\int_a^b u_1^{s_1}(x)\, u_2^{s_2}(x) \ldots \varphi(x)\, dx \equiv \int_a^b y\, dx, \tag{9}$$

приняв

$$x = a + t\dot{x} + \frac{t^2}{2}\ddot{x} + \ldots, \qquad y = y_0 e^{-t^{\mu+1}}.$$

Это привело его к необходимости вывести рекуррентные формулы для четных моментов нормального распределения. Впрочем эти моменты, как и сама экспоненциальная функция отрицательного квадрата, как и моменты функции e^{-t^4} в «Мемуаре о вероятностях», еще не имели у него непосредственного вероятностного смысла.

Таким образом, уже в XVIII в. наметились многие направления теоретико-вероятностных работ Лапласа. Но, кроме того, отчетливо проявилась и связь этих работ с общематематическими результатами Лапласа, способность разработки нового математического аппарата и его использования в математике в целом.

«Аналитическая теория вероятностей» переиздавалась в 1814 и 1820 гг., а в 1886 г. была опубликована в качестве тома седьмого полного собрания сочинений Лапласа. Начиная со второго издания, книге предшествует, в качестве введения, «Опыт философии», а собственно «Аналитическая теория» состоит из двух отделов («книг») и четырех дополнений, появившихся в издании 1820 г., причем последнее дополнение имеется не во всех экземплярах этого издания.

«Опыт философии» является как бы расширенным рефератом всего сочинения и дает хорошее представление о содержании последнего и о философских взглядах Лапласа. Вместе с тем в «Опыте философии» Лаплас почему-то счел нужным полностью отказаться от математичских формул и добился только того, что его математические рассуждения оказались крайне сложны.

Лаплас полагал, что движение молекул воздуха в принципе может быть столь же точно определено, как и движение небесных тел, и что нынешнее состояние природы есть следствие — по контексту детерминированное — ее предыдущего состояния и вместе с тем есть причина ее последующего состояния. Примеры вероятностных процессов у Лапласа

[1] Производящей функцией $A(s)$ числовой последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется сумма ряда $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$, причем область определения $A(s)$ совпадает с интервалом сходимости ряда. В частности, если $a_0, a_1, a_2, \ldots$ суть вероятности значений $x_0, x_1, x_2 \ldots$ дискретной случайной величины ξ, то $A(s)$ будет производящей функцией распределения ξ. Производящие функции облегчают вычисление моментов закона распределения, могут применяться при изучении композиций этих законов и т. д.

являются, кажется, лишь методическими и не относятся к естествознанию непосредственно. Так, вслед за Д. Бернулли (см. стр. 142) он отметил существование предельного состояния при обмене шаров между урнами. Лишь во второй половине XIX в. в связи с запросами естествознания возникла проблема реализации маловероятных состояний при неограниченном течении времени.

Следует, однако, добавить, что отмеченные детерминистические взгляды не помешали Лапласу, основываясь на астрономических наблюдениях ряда эпох и народов, каждый раз исследуя, как бы сейчас сказали, статистическую значимость этих наблюдений и отвергая маловероятные состояния, теоретически обосновывать результаты наблюдений. Именно таким образом он пришел ко всем своим астрономическим открытиям, подытоженным, как было сказано выше, в «Небесной механике».

Первая книга «Аналитической теории» посвящена теории производящих функций одной и двух переменных, вычислению интегралов типа (9) и решению конечно-разностных уравнений. Во второй книге даются основы собственно теории вероятностей в применении к дискретным случайным величинам, доказательство предельных теорем Муавра — Лапласа и приложения теории вероятностей к математической обработке наблюдений, статистике народонаселения и «нравственным наукам». Математической обработке наблюдений в основном посвящены и все четыре дополнения.

Работами Лапласа завершился «классический» этап развития теории вероятностей. Были доказаны первые предельные теоремы, широко применялись конечно-разностные уравнения и способы приближенного вычисления определенных интегралов. В качестве вспомогательного средства начало допускаться интегрирование функций комплексного переменного. Теория вероятностей ответила на естественнонаучные запросы своего времени и, в частности, была создана классическая теория ошибок[1]. Новым запросам,— из области физики и биологии, а также социологии и экономики,— настал черед не раньше, чем во второй половине XIX в., и теория вероятностей после Лапласа в основном устремилась в «нравственные науки» — в вопросы вероятностного обоснования свидетельских показаний, решений судов и результатов голосования и, конечно же, не добилась в этом направлении никаких успехов.

С другой стороны, изложение теории вероятностей у Лапласа было основано на рассмотрении конкретных задач. Не только не было достаточно формализовано понятие о функциях распределения и об их моментах, но не было введено понятие о случайной величине, пусть даже на интуитивном, «классическом» уровне. И после Лапласа введение этого понятия частично тормозилось некорректным применением теоремы Байеса (стр. 137), но главным образом самой философией Лапласа, его «лапласовым детерминизмом».

Ввиду того что предметом теории вероятностей являются случайные события и случайные величины, многие математики не воспринимали ее как математическую дисциплину; так было даже в XIX и XX вв. Лишь постепенно «искусство предположений» приобретало равноправие с остальными математическими науками. В целом теория вероятностей занимала в XVIII в. довольно скромное место и в системе этих наук и в умах математиков, несмотря на такие выдающиеся достижения, как закон

---

[1] Эту теорию в основном создали Лаплас и К. Ф. Гаусс, соответствующие сочинения которого были опубликованы в 1809 и 1821 гг.

больших чисел Я. Бернулли, предельные теоремы Муавра, различные результаты Д. Бернулли, Лапласа и еще нескольких ученых. Ограниченным было и поле приложений вероятностных методов. Успешное применение они получили только в страховом деле и отдельных вопросах демографии; в математическом естествознании почти безраздельно господствовали дифференциальные уравнения, и в то время трудно было думать, что вероятностные методы когда-либо получат распространение в физике и тем более в механике. Попытки теоретико-вероятностного анализа ошибок наблюдений были, пожалуй, единственным примером его употребления в науках о природе. Более того, недостаточно ясными оставались представления об условиях применимости методов изучения случайных явлений, ибо самые исходные понятия теории не получили еще точного и недвусмысленного определения. С этим связаны были неосмотрительные приложения к различным «моральным» вопросам: оценке достоверности свидетельских показаний, надежности преданий и легенд, к судоустройству и т. п. В вопросах такого рода допускал ошибки даже Лаплас, труды которого явились основой дальнейшего развития теории вероятностей в XIX в.