ПЯТАЯ ГЛАВА

# ГЕОМЕТРИЯ

## Аналитическая геометрия на плоскости в начале XVIII в.

Г. Ф. Лопиталь в 1696 г., издавший первый учебник дифференциального исчисления (см. т. II, стр 284), явился автором и одного из первых систематических руководств по аналитической геометрии — «Аналитического трактата о конических сечениях и об их применении для решения уравнений как в определенных, так и в неопределенных задачах» (Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez. Paris, 1707). Лопиталь вывел уравнения конических сечений в форме:

$$y^2 = px, \;\; y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{t^2} = \frac{1}{2}pt - \frac{px^2}{2t},$$

$$y^2 = \frac{c^2x^2}{t^2} \mp C^2 =, \frac{px^2}{2t} \mp \frac{1}{2}pt,$$

где $t$ — большая, а $c$ — малая полуоси. Основные свойства конических сечений он вывел частью с помощью этих уравнений и алгебры, частью элементарно-геометрическими методами. Он в принципе правильно трактовал вопрос о знаках координат, подробно разобрав его на примере прямой $y = bx/a$ и окружности $y^2 = a^2 - x^2$; однако в дальнейшем он, следуя своим предшественникам, ограничивался положительными значениями $x$ и $y$. Поэтому и у него отсутствовало уравнение прямой вида $y = -\frac{b}{a}x - c$.

Лопиталь рассмотрел ряд интересных задач и, в частности, показал, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек постоянно, является окружностью (это — «окружности Аполлония»; см. т. I, стр. 130) и что геометрические места точек, отношение расстояний которых до данной точки и до данной прямой постоянно, являются коническими сечениями. Он доказал тот же частный случай теоремы Штейнера, что и Ньютон (см. т. II, стр. 128).

Существенный вклад в аналитическую геометрию внес Яков Герман (1678—1733), ученик Я. Бернулли по Базельскому университету. Один из первых петербургских академиков,— он работал в Петербурге с 1725 по 1731 г.,— Герман сыграл большую роль в создании здесь крупнейшего европейского научного центра. Наиболее значительным произведением Я. Германа была «Форономия, или о силах и движениях твердых тел и жидкостей» (Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum solidorum et

Я. Герман
(с портрета кисти Николая I Бернулли (?). Собственность г-жи Ла Рош, Рейнфельден, Швейцария)

fluidorum. Amstelodami, 1716). В том же 1716 г. Я. Герман высказал простое, но весьма важное предположение о том, что уравнение кривой $n$-го порядка с коэффициентом 1 при $y^n$ имеет $n(n+3)/2$ коэффициентов.

В первых шести томах «Записок» Петербургской академии напечатано 15 работ Германа, из них 12 математических. В частности, в первом томе «Записок», (1726) 1728, он поместил статьи о задаче Кеплера разделить полукруг в данном отношении (которую решил двумя способами — с помощью специальной кривой и аналитически, с помощью быстро сходящегося ряда) и о сферических эпициклоидах, т. е. кривых, описываемых фиксированной точкой окружности радиуса $b$, катящейся по неподвижной окружности радиуса $a$ на сфере; Герман нашел, что длина этой линии $l$ выражается через радиусы обеих окружностей и косинус угла между их плоскостями по формуле $l = \frac{4b}{a}\sqrt{a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2}$.

В четвертом томе «Записок», (1729) 1735, Герман дал более полное, по сравнению с прежними, аналитическое рассмотрение кривых второго порядка. Исходя из уравнения $\alpha y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\varepsilon x + \varphi = 0$, разрешенного относительно $y$, он показал, что кривая будет эллипсом, параболой или гиперболой, в зависимости от того, будет ли величина $\beta^2 - \alpha\gamma$ меньше нуля, равна ему или больше его. Герман знал также, что в случае, когда в выражении для $y$ корень извлекается, уравнение может представить пару прямых.

В том же томе «Записок» Герман распространил метод полярных координат, впервые примененных Я. Бернулли к спиралям (1691), на любые плоские кривые, подчеркнув, что с его помощью можно исследовать свойства кривых столь же удобно, как и с помощью декартовых координат. Формулы перехода от полярных координат к декартовым он записал в виде $x = nz$, $y = mz$, где $z$ — «радиус проекции», а $n$ и $m$ — косинус и синус «угла проекции». Среди кривых, уравнения которых Герман привел в полярных координатах, были парабола — это был первый случай применения полярных координат к коническим сечениям — и декартов лист.

В применении полярных координат за Германом последовали многие, в частности, другой петербургский академик Георг Вольфганг Крафт (1701—1754), впервые, по-видимому, введший термин «полярное уравнение», aequatio polaris (Commentarii, (1732—1733) 1738).

Герман одним из первых приступил к систематической разработке аналитической геометрии в пространстве, о чем мы будем говорить ниже.

## Кривые высших порядков

В основе изучения алгебраических кривых высших порядков в XVIII в. лежало опубликованное в 1704 г. «Перечисление кривых третьего порядка» Ньютона, которое, как мы уже указывали (см. т. II, стр. 117), не содержало доказательств. Многие, хотя и не все, теоремы Ньютона были доказаны в книге Джемса Стирлинга «Ньютоновы кривые третьего порядка» (Lineae tertii ordinis Newtonianae. Oxford, 1717). Здесь Стирлинг, почти одновременно с Я. Германом, высказал предположение о числе коэффициентов уравнения алгебраической кривой $n$-го порядка, из чего он сделал вывод, что кривая $n$-го порядка определяется $n(n+3)/2$ точками. Далее Стирлинг определил возможное число бесконечных ветвей кривых четного и нечетного порядков, а также асимптоты кривых и точки пересечения с кривыми и отметил, что порядок уравнения относительно $y$ понижается в случае, когда ось ординат параллельна асимптоте кривой; он изучал также криволинейные асимптоты и диаметры кривых высших порядков, т. е. такие прямые, что если принять их за ось абцисс некоторой, вообще говоря, косоугольной системы координат, то сумма всех кординат точек кривой с одной и той же абсциссой равна нулю; Стирлинг показал, что уравнение кривой в такой системе координат не содержит $(n - 1)$-й степени ординаты. К 72 видам кривых третьего порядка, найденным Ньютоном, Стирлинг добавил четыре новых вида.

Стирлинг всячески подчеркивал аналогии между теорией кривых второго и третьего порядков и, например, приводя аналитическое доказательство теоремы Ньютона о том, что если через точку $O$ проведены две прямые, пересекающие кривую третьего порядка соответственно в точках $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $B_1$, $B_2$, $B_3$, то отношение $OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 / OB_1 \cdot OB_2 \cdot OB_3$ произведений отрезков обеих секущих не зависит от положения точки при неизменных направлениях обеих секущих, он предварительно доказал аналогичную теорему для кривых второго порядка. В качестве средства изучения кривых третьего порядка Стирлинг пользовался представлением ординаты $y$ в виде ряда по $x$ с помощью метода параллелограмма Ньютона (см. т. II, стр. 49). Стирлинг дал чрезвычайно ценный комментарий к труду Ньютона, но не смог доказать одной из важнейших его теорем — о получении всех кривых третьего порядка центральным проектированием из пяти расходящихся парабол — это сделал Клеро (см. стр. 162).

Применявшийся Ньютоном органический способ образования кривых получил значительное развитие в книге Колина Маклорена «Органическая геометрия или универсальное описание кривых линий» (Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis. Londini, 1720). Маклорен также доказал многие построения Ньютона и предложил много новых построений. Например, вращая один из двух углов вокруг некоторого

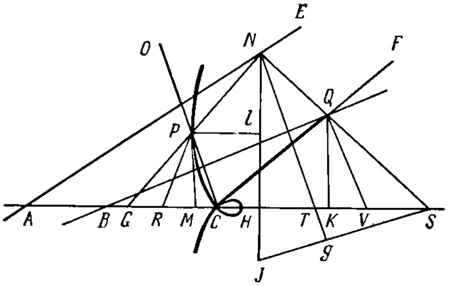



Рис. 4

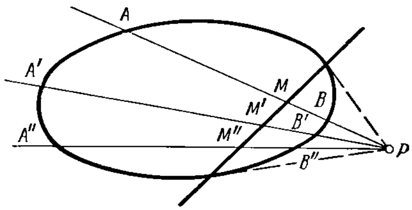



Рис. 5

полюса $C$ и сдвигая вершину другого угла $N$ вдоль прямой $AE$ таким образом, что одна из его сторон проходит через фиксированную точку $S$ (рис. 4), Маклорен находит, что в случае, когда одна из точек пересечения сторон углов $Q$ описывает прямую, другая из таких точек $P$ описывает кривую третьего порядка с двойной точкой в $C$. Аналогичным образом Маклорен строит общие кривые третьего порядка и кривые четвертого порядка с двумя двойными точками. Далее рассматривалось образование кривых с помощью углов данной величины, вершины которых движутся по прямым и кривым различных порядков. В этой связи Маклорен сформулировал теорему о том, что кривые $m$-го и $n$-го порядков пересекаются самое большее в $mn$ точках (современный вид этой теореме придал в 1748 г. Эйлер, привлекая мнимые и бесконечно удаленные точки пересечения кривых; см. стр. 168)[1]. Определяя кривые, проходящие через данные точки, Маклорен столкнулся с так называемым парадоксом Крамера, о котором мы будем говорить ниже (см. стр. 172). Отметим еще теорему о том, что наибольшее число двойных точек кривой $m$-го порядка равно $(n-1)(n-2)/2$, так как если бы существовала еще одна двойная точка, то через двойные точки и $n-3$ других точек кривой можно было бы провести кривую $(n-2)$-го порядка, которая имела бы с данной кривой на одну точку пересечения больше, чем возможно для кривых $n$-го и $(n-2)$-го порядков.

В другом сочинении Маклорена «Об общих свойствах геометрических линий» (De linearum geometricarum proprietatibus generalibus, 1748), изданном посмертно вместе с «Трактатом по алгебре» (см. стр. 39), имелось большое число новых теорем о пересечении кривых третьего порядка с

---

[1] Эта теорема имеется в черновых записях Ньютона, относящихся, вероятно, к 1667 г. См. The mathematical papers of Isaac Newton, v. II, Cambridge, 1968, p. 177.

прямыми и о касательных к кривым в их точках пересечения с прямыми. Здесь же доказано, что если провести из некоторой точки $P$ плоскости несколько прямых, пересекающих алгебраическую кривую,— такие прямые называются трансверсалями,— то сумма обратных величин расстояний от точки $P$ до точек пересечения одной из трансверсалей с кривой равна сумме обратных величин расстояний от той же точки до точек пересечения той же трансверсали с касательными к кривой, проведенными в точках ее пересечения с другой трансверсалью. Маклорен доказал также высказанную Р. Коутсом теорему о том, что гармонический центр $M$ точек $A$, $B$, $C$,..., пересечения трансверсали $PA$ с кривой, т. е. такая точка $M$, для которой $\frac{1}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} + \ldots$, при вращении трансверсали вокруг точки $P$ движется по прямой; эта прямая в настоящее время называется полярой точки $P$ (см. т. I, стр. 135). На рис. 5 изображена поляра точки $P$ относительно кривой второго порядка.

Член Лондонского королевского общества, священник по профессии Вильям Брейкенридж (ум. 1769) в «Геометрическом этюде об описании кривых линий» (Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum. Londini, 1733) также применял органический способ образования кривых, в котором он, в отличие от Маклорена, пользовался не углами, а прямыми, вращающимися вокруг неподвижных точек $A$, $B$, $C$,..., причем одни точки пересечения $N$, $S$,... этих прямых движутся вдоль данных кривых, а другие их точки пересечения $O$,... описывают определяемые кривые. Когда даны три основные точки и точки $N$, $S$ движутся вдоль прямых, точка $O$ описывает кривую второго порядка; когда точка $N$ движется вдоль прямой, а точка $S$ — вдоль кривой $n$-го порядка, точка $O$ описывает кривую порядка $2n$; в общем случае, когда точка $N$ движется вдоль кривой $m$-го порядка, а точка $S$ — вдоль кривой $n$-го порядка, точка $O$ описывает кривую порядка $2mn$. Если число основных точек равно $n$ и из $^1/_2 n\ (n-1)$ точек пересечения всех $n$ прямых $n-1$ точек движутся вдоль прямых, остальные $^1/_2\ (n-1)\ (n-2)$ точек описывают кривые второго порядка. Эти исследования были обобщены Маклореном: если вокруг $n$ основных точек вращаются стороны $n$-угольника, $n-1$ вершин которого движутся вдоль кривых $k$-го, $l$-го, $m$-го,... порядков, то $n$-я вершина $n$-угольника описывает кривую порядка $2klm$ (Philos. Trans., 1735/36).

## Особые точки плоских кривых

Изучение кривых высших порядков естественно привлекло внимание к особым точкам, простейшие случаи которых были известны и ранее. Интересная работа по этому вопросу принадлежит Пьеру Луи де Мопертюи (1698—1759). Член Парижской академии с 1723 г., Мопертюи в 1736—1737 гг. возглавил экспедицию этой академии в Лапландию с целью выяснения, является ли Земля вытянутым или сплющенным сфероидом, т. е. эллипсоидом вращения. Ньютон, исходя из своей теории всемирного тяготения и допущения, что Земля произошла в результате охлаждения жидкой однородной массы, вращающейся с небольшой постоянной угловой скоростью, вывел, что она — сфероид сплющенный. По его расчету полярная ось Земли относится к диаметру экватора, как 229 к 230, т. е. коэффициент сжатия сфероида равен $^1/_{230}$. Другое значение коэффициента сжатия $^1/_{577}$ следовало из представлений о тяготении Гюйгенса, отличных от теории Ньютона. К принципиально иному выводу, исходя из некоторых градусных измерений, пришли астрономы Парижской обсерватории Жан Доминик Кассини (1625—1712) и затем его сын Жак Кассини (1677—1756): они считали, что Земля — сфероид, вытянутый к полюсам. В этом же были твердо уверены большинство последователей Декарта. Такие разногласия ставили под вопрос состоятельность системы Ньютона, и Парижская академия предприняла новые градусные измерения, сначала в 1735 г. в Перу, близ экватора, а затем упомянутую экспедицию Мопертюи под 66° северной широты. Результаты наблюдений этих экспедиций дали результаты, близкие к вычисленным Ньютоном, и триумф

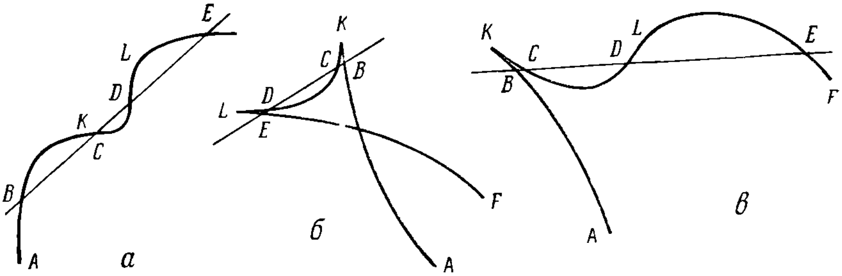



Рис. 6

этих экспедиций стал триумфом как теории Ньютона, так и самого Мопертюи, прозванного «Великим сплющивателем».

В истории механики имя Мопертюи известно благодаря выдвинутому им принципу наименьшего действия (1744), который он пытался толковать расширительно, как универсальный закон природы, и которому придал более совершенную форму Л. Эйлер (см. стр. 460). С Эйлером Мопертюи был тесно связан по работе в Берлинской академии, президентом которой Мопертюи был назначен королем Фридрихом II в 1745 г.

Мопертюи принадлежит также несколько работ по анализу и геометрии и, в частности, статья «О некоторых особенностях кривых» (Sur quelques affections des courbes. Mém. Ac. Paris, (1729) 1731). Исходя из общих геометрических представлений и без всяких вычислений Мопертюи пришел к заключению, что точки перегиба и точки заострения алгебраических кривых высшего порядка могут следовать друг за другом в различных комбинациях. На рис. 6, *а* изображен случай, когда друг за другом следуют две точки $K$, $L$ перегиба, на рис. 6, *б* — случай, когда друг за другом следуют две точки $K$, $L$ заострения, а на рис. 6, *в* — случай, когда точка перегиба $L$ следует за точкой заострения $K$. Во всех этих случаях имеется прямая, пересекающая кривую в четырех точках $B$, $C$, $D$, $E$, т. е. порядок кривой не ниже четвертого. При слиянии этих четырех точек секущая переходит в касательную соответственно в точке извива (point de serpentement), точке двойного острия (point de double pointe) и точке возврата второго рода (point de rebroussement de la seconde sorte); последняя из этих точек была открыта еще И. Бернулли и описана в «Анализе бесконечно малых» Лопиталя.

Парижский академик аббат Кристоф Бернар де Бражелонь (1688—1744) опубликовал в «Mém. Ac. Paris» ((1730) 1732, (1731) 1734) обширную работу, которая должна была предшествовать классификации кривых четвертого порядка по образцу Ньютона. Бражелонь специально исследовал особенности, которые могут встретиться у кривых четвертого порядка; его перечисление таких особенностей было неполным, но им впервые была рассмотрена изолированная точка самоприкосновения, которую он называл «бесконечно малой лемнискатой»; Бражелонь рассмотрел $k$-кратные точки и точки извива и перегиба высших порядков.

Другой французский ученый, с 1741 г. член Парижской академии, Жан Поль де Гюа де Мальв (1712—1785) в «Применениях анализа Декарта для нахождения, без помощи дифференциального исчисления, главных свойств или особенностей геометрических линий всех порядков» (Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris, 1740) также изучал особые точки алгебраических кривых. Как видно из названия книги Гюа, он стремился показать преимущества методов аналитической геометрии над методами дифференциального исчисления при решении задач теории алгебраических кривых и считал, что дифференциальным исчислением следует пользоваться только при изучении трансцендентных («механических») кривых. Впрочем, иногда для сокращения вычислений Гюа пользовался дифференцированием и при изучении алгебраических кривых. Например, уравнение для определения координат центра конического сечения

$$nyy + rxy + mxx + ay + bx + cc = 0,$$

где $m$, $n$, $r$ — числа, а $a$, $b$, $c$ — отрезки, он привел в виде

$$\overline{2ny + rx + a}\cdot dy + \overline{2mx + ry + b}\cdot dx = 0.$$

Главным в работе Гюа было изучение особых точек алгебраических кривых, здесь же был введен и термин «особая точка» (point singulier). Для изучения этих точек Гюа переносил начало координат в особую точку $(p, q)$ с помощью преобразования

$$x = p + z + nu, \qquad y = q + mu,$$

затем, сохраняя ось абсцисс, вращал, изменяя $m$ и $n$, ось ординат и находил, что особая точка в начале координат принадлежит одной или нескольким кривым с уравнениями вида $y^m = Ax^{\pm n}$. Полагая, что уже первый член разложения во всех случаях полностью характеризует ветви кривой, Гюа делал ошибку, считая, что точки возврата второго рода, о которых писал Мопертюи, у алгебраических кривых не могут существовать; эта ошибка была раскрыта Эйлером (см. стр. 165).

Гюа трактовал бесконечно удаленные точки как особые точки, которые можно перевести в обычные особые точки проектированием. Для перевода этих точек в начало координат Гюа пользовался преобразованием:

$$x = \pm\frac{pq}{z}, \qquad y = \pm\frac{pu}{z},$$

где $p$, $q$ — постоянные, представляющим по существу преобразование проективных координат проективной плоскости. В связи с этим Гюа преобразовал «параллелограмм Ньютона» (см. т. II, стр. 49), в клетках которого записываются коэффициенты при различных произведениях степеней $x$ и $y$ и две стороны которого соответствуют степеням $x$ и $y$, в «алгебраический треугольник», все три вершины и все три стороны которого равноправны. Проективная точка зрения Гюа привела его к открытию теоремы о том, что если кривая третьего порядка имеет три точки перегиба, они обязательно лежат на одной прямой (эта теорема имелась, впрочем, и в упоминавшемся посмертно изданном сочинении Маклорена «Об общих свойствах геометрических линий», см. стр. 156).

Гюа детально исследовал кривые четвертого порядка, открытые упоминавшимся выше астрономом Д. Кассини и называемые в настоящее время «овалами Кассини». Эти кривые представляют собой места точек, произведения расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянны; Кассини считал, что Солнце движется по такому овалу, в одном из фокусов которого находится Земля. Предельным случаем овала Кассини, как показал в 1782 г. итальянец Пьетро Феррони (1744—1825), является открытая Я. Бернулли лемниската, имеющая вид восьмерки, узловая точка которой представляет собой точку перегиба. Заметим, что Гюа рассматривал уравнения вида $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = 0$ как уравнения пары мнимых прямых $y = \pm i(x + b)$.

## Клеро

Существенный вклад в геометрию и, в частности, в аналитическую геометрию сделал Алексис Клод Клеро (1713—1768). Клеро, сын парижского преподавателя математики, проявил свои дарования необычайно рано. Когда ему было всего двенадцать с половиной лет, он поразил парижских академиков своей работой о некоторых кривых четвертого порядка, и они поверили в его авторство только после того, как он успешно ответил на все поставленные ими вопросы. В 1729 г. он представил Парижской академии «Исследования о кривых двоякой кривизны». Эта книга, посвященная аналитической и дифференциальной геометрии в пространстве, сыграла исключительную роль в развитии обеих этих дисциплин (см. стр. 175). Два года спустя, восемнадцатилетним юношей, Клеро был избран членом академии — случай, беспрецедентный в ее истории.

Об учебниках алгебры и геометрии Клеро уже шла речь ранее и нам не раз придется говорить о его выдающихся открытиях в области анализа. Здесь мы отметим еще заслуги его в механике и специально в утверждении системы Ньютона, которая, как мы знаем, находила на континенте Европы немало противников. Это прежде всего относится к вопросу о том, является ли фигура Земли сплющенным или вытянутым сфероидом, который, как мы видели (см. стр. 158), был решен французскими экспедициями 1735—1737 гг. в Перу и Лапландию. Клеро был членом лапландской экспедиции Мопертюи. Но молодой ученый не ограничился участием в практических измерениях формы Земли и занялся глубоким теоретическим исследованием проблемы. В классической «Теории фигуры Земли, извлеченной из принципов гидростатики» (Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique. Paris, 1743), Клеро далеко развил вслед за Ньютоном и Маклореном (1742) теорию фигур равновесия жидкой массы. В частности, Клеро впервые рассмотрел случай неоднородной массы, вначале представляющей собой сферу, плотность которой меняется с расстоянием от центра, и выразил условие равновесия эллипсоида некоторым интегро-дифференциальным уравнением. Исследования Маклорена и Клеро были продолжены Даламбером, поставившим проблему устой-

А. Клеро
(с портрета Катлена)

чивости фигур равновесия, а затем Лапласом, Якоби и многими другими первоклассными учеными вплоть до А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова, которому и принадлежит наиболее полное и глубокое исследование проблемы в громадной серии работ, продолжавшихся с 1882 по 1918 г.

Другая трудность небесной механики Ньютона лежала в теории движения Луны. Расхождение между видимым движением лунного апогея и вычисленным по закону всемирного тяготения оказывалось столь значительным, что многие ученые, как Эйлер, Даламбер и Клеро, высказали сомнения в точности этого закона. По предложению Эйлера Петербургская академия наук, объявляя в 1749 г. свой первый научный конкурс, выдвинула тему: «Согласуются или же нет все неравенства, наблюдаемые в движении Луны, с теорией Ньютона? И какова истинная теория всех этих неравенств, которая позволила бы точно определить местоположение Луны для любого времени?». В это время Клеро уже пересмотрел свои прежние вычисления, обнаружив источник их расхождений с наблюдениями и с помощью усовершенствованного метода приближения привел гравитационную теорию к согласию с последними. В 1751 г. на основании отзыва Эйлера книга Клеро «Теория Луны, выведенная из единственного начала притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний» (Théorie de la Lune, déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionelle aux carrés des distances. СПб., 1752), получила премию и вскоре была напечатана нашей академией. И еще один раз Клеро содействовал триумфу механики Ньютона, предсказав с достаточной по тому времени точностью время возвращения в 1759 г. кометы Галлея, наблюдавшейся перед тем в 1682 и 1607 гг. Появления этой кометы ожидали только в 1761 г., но Клеро, учтя возмущающее действие Юпитера и Сатурна, показал, что оборот ее замедлится на 618 дней; расхождение в 31 день вычисленного им дня перигелия с действительным было по тем временам весьма незначительным. За еще более точное исследование ее орбиты (при котором расхождение было снижено до 19 дней) Клеро в 1762 г. получил еще одну премию Петербургской академии, иностранным членом которой был избран еще в 1754 г.

Остановимся более подробно на геометрической работе Клеро «О кривых, которые получают, пересекая какую-либо кривую поверхность плоскостью, известной по положению» (Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position. Mém. Ac. Paris, (1731) 1733), написанной им в возрасте 18 лет. В этой работе Клеро доказал теорему о том, что все кривые третьего порядка можно получить центральным проектированием из пяти расходящихся парабол, которая была сформулирована Ньютоном в «Перечислении линий третьего порядка» и которую, как мы указали, не смог доказать Стирлинг. Клеро основывался на рассмотрении кубического конуса

$$xy^2 = ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3,$$

сечения которого плоскостями $x = \text{const}$ являются расходящимися параболами, а другие плоские сечения которого дают все прочие виды кривых третьего порядка. В этой же работе, наряду с изучением плоских сечений поверхностей, рассматривается важный класс преобразований плоскости, называемых в настоящее время аффинными. Аффинные преобразования общего вида рассматривались в работах Ибрахима ибн Синана (см. т. I, стр. 240), а важнейшие случаи этих преобразований — сжатие и гомотетия — в трактате «О коноидах и сфероидах» еще Архимедом и Аполлонием (см. т. I, стр. 130). В Европе систематически пользовались сжатием Симон Стевин и Григорий Сен-Венсан. Клеро в указанной работе называет две кривые, полученные одна из другой аффинным преобразованием общего вида, «кривыми такого же вида» (courbes du même espèce): «Здесь в качестве кривых такого же вида рассматриваются две кривые, отличающиеся только тем, что их координаты не образуют одного и того же угла, или тем, что абсциссы и ординаты одной из них всегда являются одинаковыми частями соответственно абсцисс и ординат другой из них, подобно тому, как один эллипс по отношению к другому эллипсу, если их оси не находятся между собой в одном и том же отношении»[1]. Клеро записывает рассматриваемое им преобразование кривых в виде:

$$x = \frac{c}{d}u, \qquad y = \frac{b}{e}s.$$

Название Клеро, несомненно, связано с названием Ньютона, «фигуры такого же рода» для фигур, полученных друг из друга проективными преобразованиями (см. т. II, стр. 127). Так как группа аффинных преоб-

[1] «Mém. Ac. Paris», (1731) 1733, p. 486.

разований является подгруппой группы проективных преобразований, всякие кривые «такого же вида» являются кривыми «такого же рода», но кривые одного «рода» могут принадлежать к разным «видам», например, конические сечения могут быть эллипсами, гиперболами и параболами.

## Второй том «Введения в анализ бесконечных» Эйлера

Оригинальное изложение аналитической геометрии дал во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлер. Это изложение послужило отправным пунктом авторов последующих курсов аналитической геометрии. В отличие от Ньютона, предпочитавшего в геометрии синтетические методы древних, Эйлер стремился решать все геометрические вопросы средствами алгебры и анализа.

Основная часть второго тома «Введения в анализ бесконечных» посвящена аналитической геометрии на плоскости, о содержавшемся в нем «Приложении о поверхностях» мы расскажем далее (см. стр. 176 и след.). В первой главе Эйлер определяет прямоугольные и косоугольные координаты и кривые линии и, в частности, непрерывные кривые; под непрерывной кривой Эйлер понимает кривую, заданную единым аналитическим выражением: «Непрерывная линия строится так, что ее природа выражается с помощью одной определенной функции от $x$»[1]. Кривые, рассматриваемые Эйлером, определяются алгебраическими функциями и поэтому непрерывны в нашем смысле слова или претерпевают разрывы только в случае обращения в бесконечность (как, например, гипербола $y = 1/x$). Мы еще вернемся к трактовке Эйлером понятия функции (см. стр. 250 и след.).

Во II главе Эйлер рассматривает преобразование прямоугольных и косоугольных координат. В первом случае Эйлер записывает преобразование координат в виде:

$$x = u \sin q + t \cos q - f,$$
$$y = u \cos q - t \sin q - g,$$

где $q$ — угол поворота координат осей.

В III главе изложено подразделение алгебраических кривых на порядки, в IV рассмотрены общие свойства этих кривых — число точек пересечения кривой $n$-го порядка с прямой, число точек, определяющих такую кривую, и т. д.

В V и VI главах впервые Эйлер дает в весьма широком объеме общее аналитическое исследование кривых второго порядка, отправляясь от уравнения $y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$, впрочем, геометрические построения используются здесь в большей мере, чем в руководствах XIX и XX вв. В V главе изучаются общие свойства этих кривых, а в VI главе общее уравнение второй степени приводится к каноническим формам с помощью преобразований координат и рассмотрены специальные свойства эллипса, параболы и гиперболы. Любопытно, что от эллипса Эйлер переходит сперва к параболе, трактуя последнюю как бесконечно растянутый

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. II. Перевод В. С. Гохмана под ред. И. Б. Погребысского. М., 1961. стр. 21.

эллипс. К теории кривых второго порядка относится и один из параграфов IV главы, в котором дается чисто аналитическое решение задачи о проведении такой кривой через пять заданных точек, и три параграфа VII главы, где излагается новый метод расчленения кривых второго порядка на три вида, основанный на рассмотрении бесконечных ветвей, причем используется дискриминант уравнения (ср. стр.154—155).

Главы VII и VIII посвящены исследованию ветвей алгебраических кривых, уходящих в бесконечность, здесь определяются прямолинейные и криволинейные асимптоты кривых $n$-го порядка, уравнения которых записаны в форме $P + Q + R + \ldots = 0$, где $P$ — совокупность членов измерения $n$ относительно координат, $Q$ — совокупность членов измерения $n - 1$ и т. д. Бесконечные ветви и асимптоты кривой определяются линейными действительными множителями многочлена $P$: кривая не имеет бесконечных ветвей, если $P$ не имеет таких множителей, что возможно только при четном $n$ (как в случае эллипса). У кривой имеются две бесконечные ветви, приближающиеся в двух противоположных направлениях к одной прямолинейной асимптоте, если $P$ обладает одним простым линейным множителем, что возможно только при нечетном $n$. Если же $P$ обладает двумя простыми линейными множителями, то прямолинейных асимптот две и бесконечных ветвей четыре (как в случае гиперболы), а если линейный множитель двукратный и выполнены некоторые дополнительные условия, относящиеся к членам меньшей степени, то имеется параболическая асимптота и т. д. В отличие от английских математиков при исследовании бесконечных ветвей алгебраических кривых Эйлер не пользуется параллелограммом Ньютона, а оперирует порядками малости или бесконечности.

Главы IX и X посвящены специальному изучению кривых третьего порядка. В IX главе проводится классификация этих кривых, в основу которой положено изучение бесконечных ветвей и асимптот этих линий. Эйлер распределил кривые третьего порядка на 16 родов и указал каноническое уравнение каждого рода и виды классификации Ньютона, относящиеся к каждому роду. На основе этой классификации в X главе изучены геометрические свойства различных видов кривых третьего порядка. В XI главе проведена аналогичная классификация кривых четвертого порядка, подразделенных на 146 родов (на самом деле их 125). Эйлер нашел также уравнения касательных к кривым в их простых и кратных точках.

От поведения кривых в бесконечности Эйлер в XII главе переходит к изучению их формы в конечной части плоскости. Не располагая общими методами, он рассматривает только некоторые кривые третьего порядка, но указывает, что его выводы обобщаются на кривые с уравнениями $Qy^2 + 2Py + R = 0$, где $Q$, $P$, $R$ — многочлены от $x$. Дается сжатая характеристика $n$-кратных точек. В заключение главы строится кривая

$$2y = \pm \sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2},$$

состоящая из двух восьмерок, каждая из которых обладает острием, лежащим на другой, и, кроме того, эти восьмерки касаются друг друга в двух точках (рис. 7).

В XIII и XIV главах изучается локальное поведение алгебраической кривой в окрестности одной точки, обыкновенной или особой: в XIII главе изучение связано с определением касательной, а в XIV главе — с определением соприкасающегося круга, радиус которого называется радиусом кривизны кривой в данной точке. Здесь же производится классификация особых точек. Все исследование ведется с помощью алгебры и оценок порядка малости тех или иных членов уравнения кривой. В основном тексте этой главы Эйлер повторяет ошибку Гюа де Мальва, считавшего, что алгебраические кривые не могут обладать точками возврата второго рода — остриями, имеющими вид птичьего клюва. Однако уже вскоре после отсылки рукописи издателю Эйлер нашел, что такой особенностью обладает кривая четвертого порядка $y^4 - 2y^2x - 4yx^2 - x^3 + x^2 = 0$, уравнение которой можно переписать в виде $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ (рис. 8). Посланная Эйлером в 1744 г. поправка, которую он хотел поместить в виде подстрочного

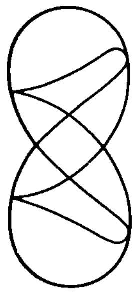


Рис. 7

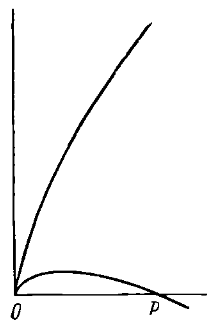



Рис. 8

примечания, была напечатана издателем в конце соответственного параграфа. Этому же вопросу посвящена статья Эйлера «О точке возврата второго рода г-на маркиза де Лопиталя» (Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hospital. Mém. Ac. Berlin, (1749) 1751).

Чрезвычайно интересна XV глава «О кривых, имеющих один или несколько диаметров». Здесь под «диаметром кривой», точнее, под «ортогональным диаметром кривой» Эйлер понимает прямую, секущую пополам все ортогональные ей хорды, т. е. ось симметрии кривой. Целью главы является выяснение условий, при которых кривая обладает одной или несколькими осями симметрии. Фактически Эйлер ставит здесь более общую задачу — выяснение условий, при которых кривая может быть «подобна и равна», т. е. конгруэнтна самой себе. Тот факт, что Эйлер рассматривает только алгебраические кривые, позволяет ему ставить вопрос не о конгруэнтности кривых в целом, а о наличии у кривой двух «подобных и равных частей». Говоря о различных случаях взаимного расположения двух «подобных и равных частей» кривой, Эйлер по существу классифицирует движения плоскости. Он указывает все виды этих движений — перенос (рис. 9, *а*), поворот вокруг точки (рис. 9, *б*), отражение от прямой (рис. 9, *в*) и скользящее отражение (рис. 9, *г*), т. е. отражение от прямой, сопровождаемое переносом вдоль этой прямой. Согласно Эйлеру, алгебраическую кривую нельзя перевести в себя переносом, так как в этом случае кривая переводилась бы в себя и всеми переносами в том же направлении на кратные расстояния, но кривая, обладающая таким свойством, пересекалась бы с прямыми, имеющими то же направление, в бесконечном множестве точек, что невозможно для алгебраических кривых. Так как двукратное повторение скользящего отражения является переносом, отсюда же следует, что алгебраическую кривую нельзя перевести в себя и скользящим отражением. Далее показано, что, за исключением окружности, переводящейся в себя поворотом вокруг ее центра на любой угол, алгебраическую кривую можно перевести в себя только поворотом на угол, соизмеримый с прямым. В самом деле, если кривая переводится в себя поворотом на некоторый угол, она переводится в себя и всеми поворотами вокруг той же точки на кратные углы, но если данный угол несоизмерим с прямым, линия переводится в себя

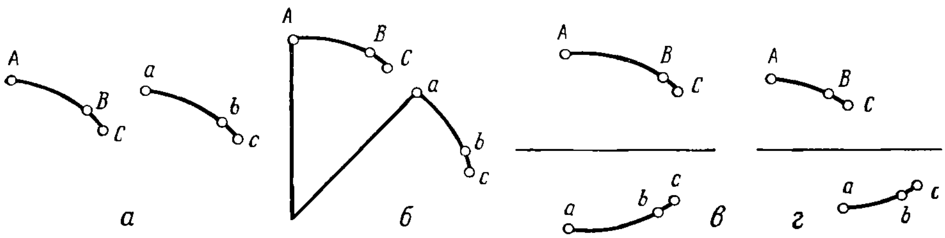



Рис. 9

поворотом на бесконечное множество углов, что невозможно для алгебраических кривых, отличных от окружности. Поэтому, если алгебраическая кривая, отличная от окружности, переводится в себя поворотом на некоторый угол, она переводится в себя поворотом на угол $2\pi/n$, где $n$ — целое число. Далее, если алгебраическая кривая переходит в себя при отражении от двух прямых («имеет два диаметра»), она переходит в себя и при движении, состоящем из двух отражений, т. е. если эти прямые параллельны, при переносе на удвоенное расстояние между этими прямыми, а если эти прямые пересекаются, при повороте вокруг точки пересечения этих прямых на угол, равный удвоенному углу между этими прямыми. Поэтому если алгебраическая кривая имеет две оси симметрии, они обязательно пересекаются и притом под углом, соизмеримым с прямым углом. Если этот угол отличен от прямого угла и кратен углу $\pi/n$, где $n$ — целое число, линия обладает $n$ осями симметрии, пересекающимися в одной точке и составляющими между собой углы $\pi/n$. Отсюда следует, что если алгебраическая кривая обладает $n$ осями симметрии, все они пересекаются в одной точке и составляют между собой углы $\pi/n$. На рис. 10 изображены кривые с тремя и четырьмя осями симметрии.

Приведенное Эйлером условие, при котором алгебраическая линия $F(x, y) = 0$ обладает $n$ осями симметрии, состоит в том, что $F(x, y)$ является рациональной функцией выражений

$$x^2 + y^2 \text{ и } x^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^{n-4}y^4 + \ldots$$

Это можно легко доказать, заметив, что $x^2 + y^2$ переходит в себя при повороте на любой угол, а выражение $(x + iy)^n$, действительной частью которого является многочлен

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}y^2 + \ldots,$$

переходит в себя только при повороте на угол $2\pi/n$ и кратные ему углы, так как при повороте на угол $2\pi/n$ выражение $x + iy$ умножается на величину $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ и, следовательно, $(x+iy)^n$ умножается на $\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = 1$. Однако у Эйлера здесь комплексные числа явно не участвуют и из других его сочинений, как мы указывали выше, также не видно, что ему был ясен геометрический смысл умножения на комплексное число вида $\cos\varphi + i\sin\varphi$.

В XVI главе находятся уравнения кривых по данным геометрическим свойствам, по большей части обобщающим свойства конических сечений;

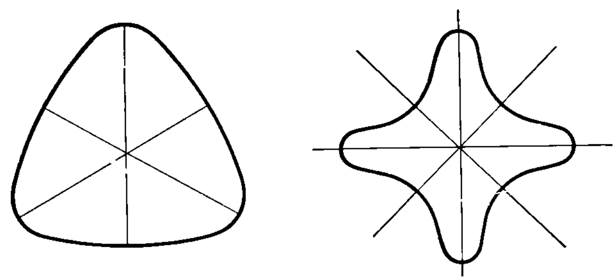


Рис. 10

например, ищутся кривые, сумма трех, четырех и пятых степеней расстояний точек которых от двух данных точек постоянна. Сходные задачи в полярных координатах решаются в XVII главе (ср. стр. 155).

В XVIII главе Эйлер изучает преобразования подобия и аффинные преобразования, которые ранее рассматривал Клеро (см. стр. 162). Прежде всего речь идет об уравнениях линий, зависящих от одного или нескольких параметров, и специально об алгебраических уравнениях, зависящих от одного параметра $a$, так что сумма степеней координат $x$, $y$ и параметра $a$ одна и та же во всех членах. В этом случае при изменении параметра $a$ линия переходит в подобную линию. Поэтому, в частности, все окружности вида $y^2 = 2ax - x^2$ или параболы вида $y^2 = ax$ подобны между собой. Эйлер показывает, что переход от линии, соответствующей одному значению параметра, к линии, соответствующей другому значению этого параметра, выражается формулами $x = X/n$, $y = Y/n$. Далее говорится: «В соответствии с тем, что у подобных кривых гомологичные абсциссы и ординаты либо увеличиваются, либо уменьшаются в одном и том же отношении, в том случае, когда абсциссы следуют одному отношению, а ординаты другому, кривые уже не будут подобными. Но так как возникающие при этом кривые находятся между собой в некоторой связи, то мы назовем эти кривые *аффинными*. Таким образом, аффинность содержит в себе подобие в качестве особого вида» [1].

Определенное им аффинное преобразование Эйлер выражает формулами:

$$x = \frac{X}{m}, \quad y = \frac{Y}{n}.$$

---

1 *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. II, стр. 230.

Окружность переводится аффинным преобразованием в эллипс, эллипсы — в эллипсы, гиперболы — в гиперболы, а параболы — в параболы.

Термин affinitas буквально означает родство по жене, «свойство̀». Ясно, что он навеян терминами Ньютона и Клеро «фигуры такого же рода» и «кривые такого же вида». Вводя термин affinitas, Эйлер подчеркивал, что между «аффинными кривыми» родство значительно меньше, чем между подобными и тем более между «подобными и равными» (конгруэнтными) линиями. Эйлер выводит также формулы для подобия и аффинного преобразования общего вида, состоящего из подобия и аффинного преобразования, определенного выше, и поворота вокруг произвольной точки. Заметим, что в работе «О некоторых свойствах конических сечений, которыми обладает бесконечно много других кривых линий» (Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes. Mém. Ac. Berlin, (1745) 1746), Эйлер исследовал алгебраические кривые, обладающие произвольными «диаметрами», под которыми здесь понимались прямые, секущие пополам все хорды, параллельные между собой и составляющие с этими прямыми произвольный угол. Указанные прямые являются осями косой симметрии, т. е. исследуемые кривые переходят в себя при косом отражении от диаметра, являющемся аффинным преобразованием. В отличие от случая, рассмотренного в XV главе, алгебраические кривые могут обладать параллельными неортогональными диаметрами, что видно на примере диаметров параболы. Эйлер показывает, что если алгебраическая кривая переходит в себя при косых отражениях от двух прямых, она переходит в себя и при аффинном преобразовании, состоящем из этих косых отражений. Подробно разобран случай, когда при двух диаметрах линии косое отражение от одного из этих диаметров не переводит второго диаметра в себя — в этом случае это отражение переводит второй диаметр в третий диаметр. В этой работе используются такие свойства аффинных преобразований, как то, что эти преобразования переводят прямые линии в прямые, параллельные прямые — в параллельные, а середины отрезков — в середины соответственных отрезков.

К вопросам, рассматриваемым в XVIII главе, Эйлер возвращался и позже. В частности, в работе «О центре подобия», представленной в 1777 г. (De centro similitudinis. Nova Acta, (1791) 1795), он доказал, что для любых двух подобных фигур на плоскости существует такая точка Г плоскости, что если $a$, $b$ и $A$, $B$ — соответственные точки меньшей и большей фигур, фигуры $\Gamma AB$ и $\Gamma ab$ подобны. Точка Г, построение которой указывается Эйлером, называется центром подобия. По существу в этой теореме доказано, что преобразование подобия всегда обладает единственной неподвижной точкой.

В XIX главе говорится о пересечении алгебраических кривых (ср. стр. 67), а в XX главе — о его применении к решению — «построению» алгебраических уравнений, которое у Эйлера занимает уже гораздо более скромное место, чем у Декарта и даже чем у Ньютона (см. т. II, стр. 43 и 45).

Предметом XXI главы являются некоторые трансцендентные линии: тригонометрические и логарифмические кривые, циклоида, эпициклоида и гипоциклоиды, кривая $x^y = y^x$ и спирали (последние рассматриваются в полярных координатах). Наконец, XXII глава второго тома «Введения в анализ бесконечных» посвящена решению трансцендентных уравнений, содержащих тригонометрические функции, по правилу двух ложных положений.

## Конформные преобразования

Помимо движений, преобразований подобия и аффинных, Эйлер исследовал еще один весьма важный класс преобразований — конформные преобразования плоскости. Простейшие виды конформных преобразований плоскости на себя или сферы на плоскость, т. е. непрерывных преобразований, при которых сохраняются углы между кривыми и, следовательно, бесконечно малые треугольники переходят в подобные им бесконечно малые треугольники, появились еще в древности у Аполлония (инверсия плоскости относительно окружности; см. т. I, стр. 130) и Птолемея (стереографическая проекция; см. т. I, стр. 143). Последнее преобразование широко применялось в средние века при конструировании астролябий, на неподвижных и подвижных дисках которых изображались в стереографической проекции горизонт и его параллели на небесной сфере, соответствующие широте данной местности, а также небесный экватор, тропики, эклиптика и наиболее яркие звезды. Более общие конформные преобразования плоскости на себя и сферы на плоскость стали возможны после появления аналитических функций комплексного переменного, так как всякая аналитическая функция $w = f(z)$ и сопряженная с ней функция $w = \overline{f(z)}$ определяют конформное отображение плоскости комплексного переменного $z$ на плоскость комплексного переменного $w$, а комбинация этого отображения со стереографической проекцией позволяет определить аналогичные отображения сферы на плоскость.

В «Опыте новой теории сопротивления жидкостей» (Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides. Paris, 1752) Даламбер показал, что координаты $P$, $Q$ скорости движущейся жидкости в точке с координатами $x$, $y$ пропорциональны выражениям, которые Даламбер записывал в виде:

$$\Delta\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)+\Delta\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\Delta\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)-\Delta\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)\right].$$

Эти выражения представляют собой действительную и мнимую части функции $\Delta(z)$ комплексного переменного $z = x+\frac{y}{\sqrt{-1}}$, причем функция $\Delta(z)$ предполагается аналитической в том смысле, что разлагается в ряд по $z$ с действительными коэффициентами. Функция $\Delta(z)$ осуществляет конформное отображение плоскости комплексного переменного $x+\frac{y}{\sqrt{-1}}$ на плоскость комплексного переменного $P+Q\sqrt{-1}$. В этом труде Даламбера впервые появились так называемые условия Коши — Римана (см. стр. 365) аналитичности функции комплексного переменного. Вскоре затем Эйлер в «Продолжении исследований по теории движения жидкостей» (Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides. Mém. Ac. Berlin, (1755) 1757) применил те же конформные отображения, что и Даламбер.

В «Рассуждениях об ортогональных траекториях» (Considerationes de trajectoriis orthogonalibus. Novi Commentarii, (1769) 1770) Эйлер нашел, что семейства линий, пересекающих друг друга под прямым углом, можно получить с помощью функций, записываемых им в виде:

$$x+y\sqrt{-1} = \text{funct}\,(T+V\sqrt{-1}), \qquad x-y\sqrt{-1} = \text{funct}\,(T-V\sqrt{-1}).$$

а именно аналитических функций в указанном только что смысле. Эти преобразования плоскости комплексного переменного являются конформными отображениями и ортогональные семейства линий могут быть получены этими преобразованиями из ортогональных семейств прямых $T = \text{const}$ и $V = \text{const}$.

Эйлер особо останавливается на случае, когда функция funct является многочленом, а линии, в которые переводятся прямые ортогональных семейств,— алгебраические. В частности, рассмотрен случай квадратичного многочлена, определяющего семейство конфокальных эллипсов и гипербол.

Эйлер останавливается также на функции

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{f + g(t + u\sqrt{-1})}{h + k(t + u\sqrt{-1})},$$

т. е. на дробно-линейном преобразовании. Он показывает, что это преобразование переводит окружности (или прямые) в окружности (или прямые), т. е. эти преобразования являются круговыми преобразованиями плоскости, при которых ось абсцисс переводится в себя.

Конформные преобразования Эйлер применил также в картографии. В работах «Об изображении поверхности шара на плоскости» (De repraesentatione superficiei sphaericae super plano. Acta, (1777) 1778) и «О географической проекции поверхности шара» (De projectione geographica superficiei sphaericae. Acta, (1777) 1778) он рассмотрел вопрос о наиболее общем конформном отображении сферы на плоскость, или, как он выражался, о таком отображении, при котором малые области Земли представляются подобными фигурами на плоскости. Для решения этой задачи Эйлер сначала производит стереографическую проекцию сферы на плоскость, при которой точке сферы с широтой $v$ и долготой $t$ ставится в соответствие точка плоскости, определяемая комплексным числом

$$z = \operatorname{tg}\frac{v}{2}(\cos t + i\sin t),$$

а затем в плоскости комплексного переменного $z$ производится конформное преобразование. Для того чтобы меридианы и параллели при этом изображались кругами, конформное преобразование должно быть дробно-линейным.

Преобразования, выражаемые функциями:

$$x + iy = f(u + it), \qquad x - iy = \varphi(u - it),$$

также предполагаемые аналитическими в смысле разложимости в ряд, но уже не с действительными, а, вообще говоря, с комплексными коэффициентами, применил Лагранж в работе «О построении географических карт» (Sur la construction des cartes géographiques. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1779) 1881). Лагранж выбирал функции $f$ и $\varphi$, требуя, чтобы меридианы и параллели сферы перешли в заданную ортогональную систему кривых на плоскости. Здесь же Лагранж показал, что если квадрат дифференциала длины дуги на сфере равен $ds^2 = du^2 + q^2dt^2$, то масштаб $m$ карты определяется по формуле

$$\frac{1}{m^2} = q^2 f'(u + it)\,\varphi'(u - it).$$

Отметим также работу Ф. И. Шуберта «О географической проекции эллиптического сфероида» (De projectione sphaeroidis ellipticae geographica. Nova Acta, (1787)1789), где для отображения поверхности на плоскость с сохранением углов впервые был применен термин «конформная проекция» (projectio conformis), а также доказано, что при стереографическом проектировании эллипсоида вращения из точки экватора на плоскость, перпендикулярную к радиус-вектору этой точки, как меридианы, так и параллели переходят в эллипсы, подобные меридиану эллипсоида.

Общая теория круговых преобразований была построена А. Ф. Мёбиусом (1855) после того, как Ж. Лиувилль (1850) рассмотрел конформные преобразования в пространстве и доказал, что они являются аналогами не общих конформных, а круговых преобразований плоскости, т. е. переводят сферы в сферы.

## Аналитическая геометрия на плоскости во второй половине XVIII в.

Мы лишь упомянем вышедшие одновременно с «Введением в анализ бесконечных» Эйлера двухтомные «Основания анализа для употребления итальянского юношества» (Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana. Milano, 1748) Марии Гаэтаны Аньези (1718—1799) как первый большой труд по математике, написанный женщиной в Новое время. Первый том «Оснований» содержал, среди прочего, обстоятельное и ясное изложение доэйлеровской аналитической геометрии; в нем была вновь рассмотрена и кривая третьего порядка, нередко называемая версьерой Аньези, но встретившаяся еще Ферма (см. т. II, стр. 186) [1]. Гораздо больший интерес представляет объемистое (почти 700 страниц) «Введение в анализ алгебраических кривых» (Introduction à l'analyse des lignes courbes. Genève, 1750) швейцарца Г. Крамера, в основном подготовленное, судя по его письму к Эйлеру от 30 сентября 1744 г., еще около 1740 г. В этом труде, нам уже встречавшемся (см. стр. 66), получили дальнейшее развитие и методы Ньютона, Стирлинга, Гюа де Мальва и Эйлера, с которым Крамер регулярно переписывался в 1743—1752 гг. Алгебраические кривые Крамер исследовал алгебраическими же средствами. Используя метод параллелограмма Ньютона, при изучении особых точек он избег ошибки Гюа де Мальва в вопросе о точках возврата второго рода, учитывая более чем один первый член разложения в бесконечный ряд; упомянем, что об этой ошибке Эйлер писал Крамеру еще 15 декабря 1744 г. (ср. стр. 165). Обратив особое внимание на разветвление рядов в особых точках алгебраических кривых, встретившееся еще Ньютону, Крамер не мог все же при тогдашнем уровне математики далеко продвинуться в изучении этого явления. Только В. Пюизё (1840), применяя теорию функций комплексного переменного Коши, положил начало современной теории циклов разложений в окрестности критических алгебраических функций и, в частности, впервые исследовал сходимость разложений, получаемых с помощью параллелограмма Ньютона.

---

[1] Версьерой назвал эту кривую другой итальянский математик Гвидо Гранди; термин этот, вероятно, происходит от латинского versare — обращать, поворачивать. Эту кривую называют также локоном Аньези. После выхода «Оснований» Аньези почти всецело отдалась благотворительной деятельности.

В книге Крамера содержится также классификация кривых до пятого порядка включительно, в основу которой положено их различение по виду бесконечных ветвей, и подробный разбор кратных точек кривых до восьмого порядка включительно. Отметим, что его имя получил парадокс, встретившийся еще Маклорену (см. стр. 156) и сообщенный Крамером Эйлеру в письме от 30 сентября 1744 г., после чего они оба долго обсуждали его в своей переписке. Парадокс состоит в том, что, с одной стороны, число точек, однозначно определяющих кривую порядка $n$, как показал еще Стирлинг, равно $n(n+3)/2$, а, с другой стороны, две кривые порядка $n$ пересекаются в $n^2$ точках, т. е. $n^2$ общих точек могут принадлежать к различным кривым порядка $n$, между тем $n^2 > \frac{n(n+3)}{2}$ при $n > 3$.

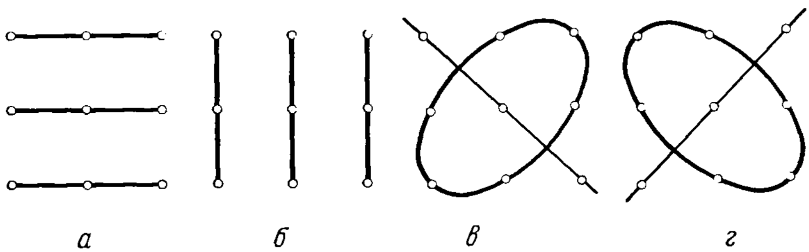


Рис. 11

Для $n = 3$ Эйлер (Mém. Ac. Berlin, (1748) 1750) показал, что девять точек однозначно определяют кривую третьего порядка (т. е. линейная система уравнений, служащая для определения девяти коэффициентов, не может оказаться неопределенной). Например, если взять точки с координатами $(-a, a)$, $(0, a)$, $(a, a)$, $(-a, 0)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(-a, -a)$, $(0, -a)$, $(a, -a)$, то при любом отношении $m : n$ уравнение

$$m \cdot y\,(y^2 - a^2) = n \cdot x\,(x^2 - a^2)$$

выражает линию третьего порядка, проходящую через эти точки; при $m = 0$ или $n = 0$ эта кривая распадается на три параллельные прямые (рис. 11, *а*, *б*), а при $m = \pm n$ — на прямую и эллипс (рис. 11, *в*, *г*).

Общая теория всех вопросов, связанных с парадоксом Крамера, была разработана Ю. Плюккером (1828).

Во второй половине XVIII в. исследования по общей теории плоских алгебраических кривых в значительной степени исчерпали себя. Из результатов этого времени следует упомянуть теоремы А. П. Диониса де Сежура (1734—1794) и М. Б. Гудена (1734—1817) о том, что кривая порядка $n$ имеет не более $n^2 - n$ точек, в которых касательные параллельны данному направлению, и не более $n$ асимптот; соответствующий «Трактат об алгебраических кривых» (Traité de courbes algébriques. Paris, 1756) вышел без указания авторов. Число $n^2 - n$ было открыто вновь В. Понселе (1818) и получило у него применение как характеристика класса кривой.

Отметим также «Аналитические этюды об алгебраических уравнениях и свойствах кривых» (1762) и «Свойства алгебраических кривых» (1772) Э. Варинга (ср. стр. 81). В первой из этих книг дано аналитическое выражение проективных преобразований (коллинеаций; см. стр. 197) на плоскости в виде:

$$x = \frac{pz + qv + r}{Az + Bv + C}, \qquad y = \frac{Pz + Qv + R}{Az + Bv + C}.$$

Среди различных метрических теорем второй книги любопытна следующая: если кривая $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$ пересекается с осью абсцисс в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и имеет экстремумы $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, то

$$\frac{y_1 y_2 \ldots y_{n-1}}{(x_1 - x_2)^2 \ldots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_2 - x_n)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2} = \frac{a^n}{b^n}.$$

## Аналитическая геометрия в пространстве

Первые подходы к распространению метода координат на трехмерную геометрию сделаны были еще в XVII в. Декарт мимоходом коснулся вопроса об изучении пространственных кривых с помощью ее ортогональных проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости и отнесения этих проекций к прямой, по которой эти плоскости пересекаются; Ферма показал примеры исследования формы тел,— мы бы сказали поверхностей второго порядка,— с помощью их плоских сечений и, также мимоходом, заметил, что уравнение с тремя переменными выражает поверхность; Дезарг высказал мысль об определении положения точек в пространстве с помощью трех ортогональных координатных отрезков. Все эти идеи долгое время оставались неразвитыми, хотя у Лагира уже появилось первое уравнение поверхности (см. т. II, стр. 113).

Аналитическая геометрия в пространстве явилась по существу созданием XVIII в. Летом 1700 г. Антуан Паран (1666—1716) представил Парижской академии наук, членом которой являлся, работу о свойствах поверхностей, вошедшую в состав его «Опытов и исследований по математике и физике» (Essais et recherches de mathématique et de physique. Paris, 1705). Здесь была решена задача об определении касательной плоскости к поверхности сферы с «поверхностным уравнением» — équation superficielle [1]

$$c^2 + y^2 - 2cy + b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + z^2 - 2az = r^2,$$

а кроме того, частично исследованы с помощью сечений, параллельных координатным плоскостям, поверхности:

$$y = (b + x)\sqrt{\frac{z - x}{z}} \quad \text{и} \quad y = \frac{z^3}{x^2 + az}.$$

В начале XVIII, а может быть, и в конце XVII в. методом координат в пространстве овладел Иоганн Бернулли, применивший его к поставленной им в 1697 г. проблеме геодезических линий. 24 декабря 1697 г. И. Бернулли письменно сообщил Лопиталю, что нашел дифференциальное уравнение геодезических, которое, правда, не умеет пока решить, а 6 февраля 1715 г. в письме к Лейбницу охарактеризовал понятие о координатах и

---

[1] Уравнения касательной плоскости Паран не дал; он ограничился отысканием с помощью дифференциального исчисления некоторых двух прямых, лежащих в этой плоскости.

уравнении поверхности в следующих словах: «Под данной кривой поверхностью я разумею такую, отдельные точки которой (подобно точкам данной кривой линии) определяются тремя ординатами $x$, $y$, $z$, отношение между которыми выражается данным уравнением; эти же три координаты суть не что иное, как три перпендикулярных отрезка, проведенных из какой-либо точки поверхности к трем плоскостям, данным по положению и взаимно пересекающимся под прямыми углами» [1]. Лейбниц на это ответил 9 апреля, что и он некогда пришел к таким же идеям, но не имел времени развить их подробнее. Позднее в 1728 г. И. Бернулли поставил задачу о геодезических перед Эйлером и, получив от него зимой 1729 г. дифференциальное уравнение геодезических, в ответном письме привел найденное им самим уравнение, по форме отличное от уравнения Эйлера (ср. стр. 188).

Однако подготовленное им в то время изложение своего метода и результатов И. Бернулли опубликовал лишь в 1742 г., десятью годами позднее, чем появилась в печати соответствующая статья Эйлера, равно важная в истории как аналитической, так и особенно дифференциальной геометрии.

В работе «О кратчайшей линии на произвольной поверхности, соединяющей две произвольные точки» (De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente. Commentarii, (1728) 1732), Эйлер, введя систему взаимно перпендикулярных координат $t$, $x$, $y$, указал общим образом, что поверхность выражается уравнением с тремя координатами, а линия — двумя такими уравнениями, и привел уравнения трех классов поверхностей — цилиндрических, конических и поверхностей вращения, которые в современных обозначениях можно соответственно записать:

$$z = f(y), \qquad \frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z = f(x^2 + y^2).$$

О найденном им дифференциальном уравнении геодезических будет сказано далее (см. стр. 188). Следует добавить, что Эйлер здесь еще не применяет все три координатные плоскости, как во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748), но пользуется лишь одной исходной плоскостью $t$, $x$ и в ней осью $t$, после чего из точки данной поверхности опускался перпендикуляр $y$ на плоскость $t$, $x$ и из основания этого перпендикуляра — перпендикуляр $x$ на ось $t$. Самые уравнения упомянутых классов поверхностей он записывал частью словесно, частью аналитически. Так, в случае конической поверхности с вершиной в начале $y/x$ есть однородная функция $x$ и $y$ нулевого измерения, а уравнение поверхности вращения вокруг оси $t$ имеет вид $x^2 + y^2 = T$, где $T$ — какая-либо функция $t$.

Разработкой аналитической геометрии в пространстве занимался в Петербурге и Я. Герман. В «Записках» Петербургской академии за 1732—1733 гг. (1738) он исследовал, отправляясь от их уравнений, плоскость

$$az + by + cx - e^2 = 0$$

и некоторые поверхности второго порядка: параболический цилиндр («параболически-цилиндрический клин»)

$$z^2 - ax - by = 0,$$

конусы

$$z^2 = xy \text{ и } az^2 - bxz - cyz + cy^2 = 0,$$

[1] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften. Bd. III. Halle, 1858, S. 938.

«коноидальные поверхности»

$$z^2 - ax^2 - bxy - cy^2 - ex - fy = 0$$

и

$$az^2 + byz + cy^2 - exz + fx^2 + gz - bx = 0$$

и, наконец, «круглые тела»

$$u^2 - x^2 - y^2 = 0,$$

где $u$ — функция $z$, в частности, $u^2 = a^2 - \frac{a^2 z}{b}$ и $u^2 = a^2 - \frac{a^2 r^2}{b^2}$ (т. е. параболоид вращения и сфероид). Из высших поверхностей Герман рассмотрел поверхность

$$(b - r)\sqrt{a^2 - y^2} = bx,$$

изучавшуюся Валлисом без записи уравнения под названием «конусоклин». Исследование не было систематическим, но на различных примерах Герман показывал, как можно определить касательную плоскость и экстремальные точки поверхности, а также различные плоские сечения, позволяющие выявить ее форму. Общая трактовка пространственных координат и поверхностей у Германа была такой же, как в только что разобранной работе Эйлера, и он удовлетворялся рассмотрением «тел» в четырех верхних октантах ($z \geqslant 0$) или даже только в первом октанте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$).

Еще до публикации статьи Эйлера в Париже в 1731 г. вышла упоминавшаяся нами книга А. К. Клеро «Исследования о кривых двоякой кривизны» (Recherches sur les courbes à double courbure), представленная Парижской академии в 1729 г. Термин «кривые двоякой кривизны», применяемый и в настоящее время, объясняется тем, что пространственная кривая определялась, как это предложил Декарт, своими ортогональными проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости; этот термин был предложен парижским академиком Анри Пито (1695—1771) (Mém. Ac. Paris, (1724) 1726), с тем чтобы подчеркнуть существенное отличие винтовой линии на цилиндре от спирали на плоскости, с которой винтовая линия имеет некоторое сходство.

Книга Клеро по существу положила начало трем геометрическим дисциплинам: аналитической геометрии в пространстве, дифференциальной геометрии и начертательной геометрии, основанной на изображении пространственных фигур с помощью их ортогональных проекций на две перпендикулярные плоскости. Свободно и в полном объеме оперируя пространственными координатами, Клеро, помимо уравнений (сферы, круглого конуса и параболоида вращения), вывел уравнения нескольких более сложных поверхностей вращения — эллипсоида и однополостного гиперболоида вращения, а также поверхности

$$x^4 - a^2y^2 + a^2z^2$$

вращения параболы $x^2 = ay$ вокруг ее касательной в вершине. Клеро нашел также уравнение конуса с заданной вершиной и плоской направляющей (в качестве примеров взяты параболы, эллипсы и гиперболы высших порядков) и отметил, что в случае, когда вершина — начало координат, уравнение конуса — однородное. Далее он изучал пространственные кривые по данным уравнениям. На примере поверхности $z = a^3$ Клеро показал, как следует изучать форму поверхности с помощью ее плоских сечений. Упомянем, что в «Исследованиях» Клеро впервые, по-видимому, была явно выписана — в связи с выводом уравнения сферической поверхности — общая формула расстояния между двумя точками на плоскости и в пространстве, последняя в форме

$$f = \sqrt{\overline{x \mp a}^2 + \overline{y \mp b}^2 + \overline{z \mp c}^2},$$

буквы $a$, $b$, $c$ обозначают у него неотрицательные числа, хотя Гудде еще в 1659 г. предложил отказаться от такого ограничения. Разумеется, аналитическим выражением теоремы Пифагора фактически пользовались и ранее, например Лагир и Паран. Все изложенное, кроме последней формулы, вошло в первый отдел книги Клеро; о задачах дифференциальной геометрии, решенных в «Исследованиях», мы расскажем ниже.

В том же 1731 г. в одной статье, появившейся в «Записках» Парижской академии наук, Клеро впервые записал уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{ax}{c} + \frac{ay}{b} + z = a.$$

## «Приложение о поверхностях» Эйлера

Первым систематическим изложением аналитической геометрии в пространстве явилось «Приложение о поверхностях» во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлера. Подобно тому как основной текст этого тома был непосредственно связан с изучением функций одного переменного, это приложение находилось в тесной связи с анализом функций двух переменных.

В I главе «Приложения» Эйлер вводит прямоугольные декартовы координаты в пространстве и высказывает некоторые общие соображения об уравнениях поверхностей, в частности об условиях симметрии относительно плоскостей координат. Во II и III главах разъясняется метод изучения поверхностей и, в частности, цилиндра, конуса и сферы с помощью их плоских сечений. В IV главе рассматривается преобразование прямоугольных координат, которое записывается в виде:

$$x = p(\cos\xi\cos\theta - \sin\xi\cos\eta\sin\theta) + q(\cos\xi\sin\theta + \sin\xi\cos\eta\cos\theta) - r\sin\xi\sin\eta + f,$$

$$y = -p(\sin\xi\cos\theta + \cos\xi\cos\eta\sin\theta) - q(\sin\xi\cos\theta - \cos\xi\cos\eta\cos\theta) - r\cos\xi\sin\eta + g,$$

$$z = -p\sin\eta\sin\theta + q\sin\eta\cos\theta + r\cos\eta + h.$$

Углы $\xi$, $\eta$, $\theta$, определяющие поворот осей, в настоящее время называются углами Эйлера: угол $\theta$ — «угол прецессии»— является углом вращения вокруг координатной оси $Or$ (рис. 12), при котором ось $Op$ переходит в прямую $On$ —«линию узлов» — линию пересечения координатных плоскостей $pOq$ и $xOy$; угол $\eta$ —«угол нутации»— является углом вращения вокруг прямой $On$, при котором координатная ось $Or$ переходит в ось $Oz$; угол $\xi$ —«угол собственного вращения» вокруг прямой $Oz$, при котором прямая $On$ переходит в ось $Ox$.

В V главе изучается общее уравнение поверхностей второго порядка, которое записывается в следующем виде:

$$\alpha z^2 - \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \xi x^2 + \eta z + \theta y + ix + \tau = 0,$$

и прежде всего по членам второго измерения изучается поведение поверхности в бесконечности, причем впервые применяется асимптотический конус. Заложив тем самым основы классификации, Эйлер с помощью преобразования координат приводит уравнения поверхностей второго порядка к простейшим формам. Канонические уравнения невырожденных

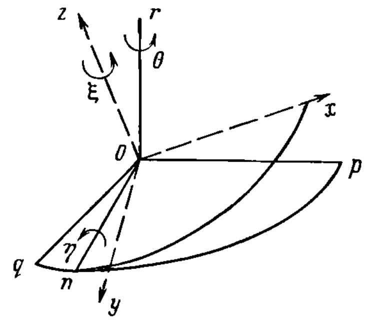



Рис. 12

поверхностей второго порядка у Эйлера имеют вид:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2; \quad Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = a^2, \quad Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 = a^2,$$
$$Ap^2 + Bq^2 = ar, \quad Ap^2 - Bq^2 = ar, \quad Ap^2 = aq.$$

Первую из этих поверхностей Эйлер называет «эллиптоидом», вторую (однополостной гиперболоид) —«эллиптико-гиперболической поверхностью», третью (двухполостной гиперболоид) —«гиперболико-гиперболической поверхностью», четвертую (эллиптический параболоид) —«эллиптико-параболической поверхностью», пятую (гиперболический параболоид) —«гиперболико-параболической поверхностью» и шестую — «параболическим цилиндром». Эйлер формулирует и основные критерии для определения класса поверхности: «Если мы получаем здесь, что $4\,\alpha\zeta$ больше, чем $\gamma^2$, $4\alpha\delta$ больше, чем $\beta^2$, $4\delta\zeta$ больше, чем $\varepsilon^2$, и $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ меньше, чем $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, то поверхность будет замкнутой и будет принадлежать к первому роду, который мы назвали эллиптоидальным... Если нет одного или нескольких из этих условий и если, вместе с тем, нет [равенства] $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \pm \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, то поверхность будет относиться либо ко второму, либо к третьему роду, и она будет гиперболическим телом, обладающим асимптотическим конусом, причем в случае второго рода этот конус описан вокруг нее, в случае третьего рода — вписан в нее. Если же будем иметь $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, а в этом случае выражение $\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2$ может быть разложено на два простых множителя, либо мнимых, либо действительных, то в первом случае поверхность будет принадлежать четвертому роду, во втором случае — пятому. Если же, наконец, это выражение имеет два равных множителя, т. е. является квадратом, то получается шестой род. Так что легко сразу определить, к какому роду относится любое предложенное уравнение; трудно только различить второй и третий роды, так как они оба могут слиться в один»[1].

Условие невырожденности поверхности, состоящее в неравенстве нулю некоторого определителя четвертого порядка, Эйлер не формулирует.

Пересекая гиперболический параболоид $Ap^2 - Bq^2 = ar$ координатной плоскостью $r = 0$, Эйлер находит, что это сечение является парой прямых, но о других прямолинейных образующих этой поверхности не упоминает. Приведем чертеж Эйлера сечений этой поверхности тремя координатными плоскостями (рис. 13, *а*) и перспективное изображение той же поверхности (рис. 13, *б*).

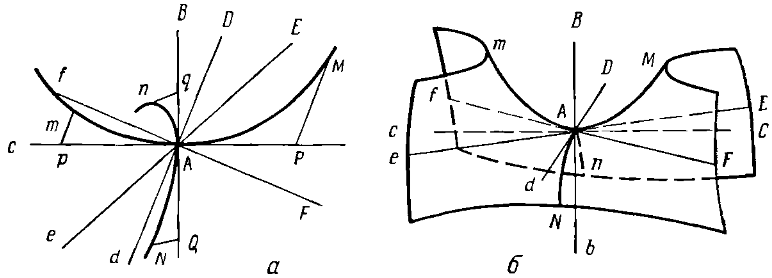



Рис. 13

В V главе Эйлер впервые изучил все виды невырожденных поверхностей второго порядка. Античные математики рассматривали только эллипсоид вращения —«сфероид», двуполостной гиперболоид вращения — «тупоугольный коноид» и параболоид вращения —«прямоугольный коноид» (ср. т. I, стр. 118). Однополостной гиперболоид вращения рассмотрел Кавальери; Валлис в своей «Механике» (1670) называл эту поверхность «гиперболическим цилиндроидом». Двуполостной гиперболоид и эллиптический параболоид общего вида впервые рассмотрел Ферма, называвший их «косыми коноидами». Гиперболический параболоид общего вида рассмотрен впервые Эйлером. Современные названия этих поверхностей, носящие явные следы названий Эйлера, были установлены Монжем (см. стр. 181).

В конце главы Эйлер кратко формулирует принципы классификации поверхностей третьего и высших порядков.

В последней VI главе приложения Эйлер коротко остановился на отдельных вопросах теории пространственных кривых, рассматриваемых как пересечения двух поверхностей.

Отметим здесь же, что в общей теории поверхностей высших порядков XVIII в. не принес существенных результатов. Упоминания заслуживает отдел, посвященный поверхностям в «Аналитических этюдах» Варинга (1762), содержащий некоторые теоремы о диаметральных плоскостях и указание, что число независимых коэффициентов в общем уравнении поверхности порядка $n$ равно $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 1$ (ср. стр. 172).

[1] *Л. Эйлер*. Введение в анализ бесконечных, т. II, стр. 359. В русском переводе В. С. Гохмана термины Эйлера «эллиптоид» и «эллиптоидальный» переведены словами «эллипсоид» и «эллипсоидный» (см. там же, стр. 389).

## Движения в пространстве

Наряду с изучением движений на плоскости в XVIII в. начали изучаться и движения в пространстве, что было необходимо для создавшейся в это время механики твердого тела. Эта теория снова приводит нас к Эйлеру, который в «Общих формулах для произвольного перемещения жестких тел» (Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. Novi Commentarii, (1775) 1776), впоследствии включенных в посмертное издание его «Теории движения твердых или жестких тел» (Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Rostochii et Gryphiswaldiae, 1790). приводит аналитическую запись движения в пространстве в виде:

$$
\begin{aligned}
x &= Fp + F'q + F''r + f,\\
y &= Gp + G'q + G''r + q,\\
z &= Hp + H'q + H''r + h,
\end{aligned}
$$

и находит, что коэффициенты $F$, $G$, $H$ и т. д. связаны соотношениями:

$$
\begin{aligned}
F^2 + G^2 + H^2 &= 1, \qquad & FF' + GG' + HH' &= 0,\\
F'^2 + G'^2 + H'^2 &= 1, \qquad & F'F'' + G'G'' + H'H'' &= 0,\\
F''^2 + G''^2 + H''^2 &= 1, \qquad & FF'' + GG'' + HH'' &= 0.
\end{aligned}
$$

Далее Эйлер выражает коэффициенты $F$, $G$, $H$, . . . через шесть углов широты и долготы $\xi$, $\eta$, $\xi'$, $\eta'$, $\xi''$, $\eta''$:

$$
\begin{aligned}
F &= \sin\xi, & G &= \cos\xi \sin\eta, & H &= \cos\xi \cos\eta,\\
F' &= \sin\xi', & G' &= \cos\xi' \sin\eta', & H' &= \cos\xi' \cos\eta',\\
F'' &= \sin\xi'', & G'' &= \cos\xi'' \sin\eta'', & H'' &= \cos\xi'' \cos\eta''.
\end{aligned}
$$

При этом с помощью условий $FF' + GG' + HH' = 0$ и т. д. углы $\xi$, $\xi'$, $\xi''$ выражаются через углы $\eta$, $\eta'$, $\eta''$ по формулам:

$$
\operatorname{tg}\xi = \frac{-\Delta}{\cos(\eta' - \eta'')}, \qquad \operatorname{tg}\xi' = \frac{-\Delta}{\cos(\eta'' - \eta)}, \qquad \operatorname{tg}\xi'' = \frac{-\Delta}{\cos(\eta - \eta')},
$$

где

$$
-\Delta = \cos(\eta - \eta')\cos(\eta' - \eta'')\cos(\eta'' - \eta).
$$

В добавлении к той же работе Эйлер доказал теорему: «Каким бы образом сфера ни вращалась вокруг своего центра, всегда можно указать диаметр, направление которого в конечном положении совпадает с его начальным положением» [1]. Эйлер доказывает эту теорему синтетически с помощью изящного построения на сфере. Аналогичный результат был получен Даламбером в «Трактате о динамике» (Traité de dynamique. Paris, 1743). Последняя теорема Эйлера равносильна теореме Даламбера о том, что всякое вращение в пространстве является поворотом вокруг прямой. С помощью этой теоремы французский геометр Мишель Шаль (1793—1880) доказал, что всякое движение в пространстве, не являющееся переносом и поворотом, есть винтовое движение, т. е. комбинация поворота вокруг прямой с переносом вдоль нее. Здесь под вра-

---

[1] *L. Euler*. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Ed. 2. Greifswald, 1790, p. 457.

щением и движением в пространстве понимаются вращения и движения, не изменяющие ориентацию пространства (к движениям, изменяющим ориентацию, относится отражение от плоскости и его комбинации с поворотом или переносом).

Другое выражение движения в пространстве через три коэффициента переноса и три «эйлеровых» угла, примененных Эйлером во втором томе «Введения в анализ бесконечных» для преобразования координат, также часто употреблялось впоследствии в механике.

## Дальнейшее развитие аналитической геометрии в пространстве

Эйлер в 1748 г. указал лишь две прямые, лежащие на гиперболическом параболоиде. Вскоре были получены и более общие результаты. В. Брейкенридж в «Письме графу Мэрчмонту о сечении тела, до сих пор не рассматривавшемся геометрами» (Letter to Earl of Marchmont concerning the section of a solid, hitherto not considered by Geometers. Philos. Trans., 1759), рассмотрел линейчатую поверхность, прямолинейные образующие которой соединяют точки пересечения данной прямой и данной кривой, «директрисы» с плоскостью, передвигаемой параллельно себе; в настоящее время такие поверхности называются коноидами. Более подробно он изучил случай, когда директриса также является прямой, т. е. когда поверхность представляет собой гиперболический параболоид. Парижский профессор математики Антуан Реми Модюи (1731—1815) произвел кубатуру тела, ограниченного плоскостями, проектирующими стороны косого четырехугольника $ABCD$ на какую-либо плоскость, проходящую через вершину $A$, этой плоскостью, а также частью поверхности, описанной прямой, скользящей вдоль двух противолежащих сторон $AB$ и $CD$ и пробегающей их в одно время. Для случая, когда проекции $BC$ и $AD$ параллельны, т. е. для гиперболического параболоида, Модюи обнаружил еще второе семейство прямолинейных образующих поверхности (Mém. div. savants, 1763). Более общие поверхности, образуемые прямой, скользящей по двум кривым, оставаясь параллельной данной плоскости, изучал военный инженер, ученик Монжа Шарль Тенсо (1749—1822) в работе «Решение некоторых задач, относящихся к теории кривых поверхностей и кривых двоякой кривизны» (Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure. Mém. div. savants, 1780). Тенсо называл эти поверхности «параллелоидами», а рассматривавшийся Брейкенриджем частный случай параллелоида, когда одна из кривых является прямой, перпендикулярной направляющей плоскости, он назвал «коноидом», так как античное значение этого термина, первоначально обозначавшего параболоид и одну из полостей двухполостного гиперболоида вращения, к этому времени вышло из употребления. Тенсо доказал для коноидов и параллелоидов общего вида ряд теорем об объемах и площадях плоских сечений, в частности, Тенсо рассматривал и гиперболический параболоид с уравнением $Ky = xz$ Из результатов работы Тенсо отметим теорэму о том, что углы наклона $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ плоскости к координатным плоскостям системы прямоугольных координат связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

а также пространственное обобщение теоремы Пифагора: квадрат площади плоской фигуры равен сумме квадратов площадей ее прямоугольных проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости.

Случай, когда площадью является треугольник, дополняющий прямой трехгранный угол до тетраэдра, встречается в записках Декарта 1619—1621 гг., который, вероятно, несколько обобщил результат, найденный в случае трех равных ребер четырехгранника И. Фаульгабером (опубл. 1622).

Возвращаясь к вопросу о прямолинейных образующих гиперболического параболоида и однополостного гиперболоида, добавим, что они получили применение в «Начертательной геометрии» (1795) Монжа (см. стр. 197) и что основные предложения об обеих системах этих образующих установили тот же Монж и его сотрудник, профессор Политехнической школы и Сорбонны Жан Никола Пьер Ашетт (1769—1834) в их совместном труде «Приложения алгебры к геометрии» (Applications de l'algèbre à la géométrie. Paris, 1805); первоначально издано в форме статьи в «Journal de l'École Polytechnique», год X, т. е. 1801—1802).

Монжу, а также Лагранжу принадлежит решение нескольких элементарных, но весьма важных для последующего систематического изложения аналитической геометрии в пространстве задач. Монж занялся этими задачами, как вводными, в своей замечательной работе по дифференциальной геометрии, представленной Парижской академии в 1771 г., но опубликованной лишь в 1785 г. (см. стр. 191). В первой задаче он вывел уравнение плоскости, проходящей через данную точку $x'$, $y'$, $z'$ и перпендикулярной к прямой, заданной уравнениями двух плоскостей; этот результат Монж тут же применил к выводу уравнения нормальной плоскости пространственной кривой $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Другая задача состояла в определении длины перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. По форме изложение Монжа носило вполне современный характер.

Впоследствии краткое и весьма изящное решение основных задач на прямую и плоскость Монж дал в первых трех выпусках «Листов анализа, приложенного к геометрии» (1795; см. стр. 193), а более полное и во многом оригинальное изложение начал аналитической геометрии в пространстве, включая теорию поверхностей второго порядка, предложил в уже упомянутом «Приложении алгебры к геометрии» (1802, 1805), написанном вместе с Ашеттом. Этот небольшой курс должен был служить введением к «Листам анализа» и вошел также в их издание 1805 г.

Аналитической геометрии в пространстве было посвящено также «Аналитическое решение некоторых задач о треугольных пирамидах» (Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773) 1775). Название работы подчеркивает, что в ней методы аналитической геометрии применяются к задачам, до того времени решавшихся только синтетическим путем, и любопытно, что в этой чисто геометрической работе, как и в «Аналитической механике» Лагранжа, нет ни одного чертежа. Рассматривается тетраэдр, одна из вершин $L$ которого является началом системы прямоугольных координат, а три другие $M$, $M'$ и $M''$ имеют соответственно координаты $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$; $x''$, $y''$, $z''$. Лагранж вычислил длины всех ребер и площади всех граней тетраэдра, высоту тетраэдра (опущенную из начала) и его объем. Задавшись произвольной точкой, Лагранж нашел ее расстояние от вершин тетраэдра, а, требуя, чтобы эти расстояния были равны, нашел радиус сферы, описанной около тетраэдра. Далее он вычислил расстояния этой точки от граней тетраэдра и, требуя, чтобы эти расстояния были равны, нашел радиус сферы, вписанной в тетраэдр, и радиусы вневписанных сфер тетраэдра. Он нашел также уравнения плоскостей, проходящих через каждое из ребер и середину противолежащего ребра, и, определив точку пересечения этих плоскостей — центр тяжести тетраэдра.

При вычислении площади грани $LM'M''$ Лагранж воспользовался формулой

$$[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2][(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2] - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 = \\ = (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x''),$$

которую мы в настоящее время называем формулой Лагранжа и записываем с помощью векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ с координатами $x'$, $y'$, $z'$ и $x''$, $y''$, $z''$ в виде

$$(\mathbf{r}')^2(\mathbf{r}'')^2 - (\mathbf{r}'\mathbf{r}'')^2 = [\mathbf{r}'\mathbf{r}'']^2,$$

где $(\mathbf{r}')^2$, $(\mathbf{r}'')^2$ — скалярные квадраты, $\mathbf{r}'\mathbf{r}''$ — скалярное произведение, а $[\mathbf{r}'\ \mathbf{r}'']$ — векторное произведение, причем в правой части формулы стоит скалярный квадрат векторного произведения.

Исследования Эйлера, Монжа, Лагранжа и других математиков позволили в конце XVIII в. приступить к выработке нового по духу и по распределению материала учебного курса аналитической геометрии, который в главных чертах сохраняется до сих пор в высших технических учебных заведениях, он и создан был первоначально для учащихся Парижской Политехнической школы. О труде Монжа 1795 г. уже говорилось (см. стр. 181); вскоре затем систематическое изложение аналитической геометрии на плоскости и в пространстве дал в IV и соответственно V главах первого тома своего «Трактата о дифференциальном и интегральном исчислении» (Париж, 1797) Лакруа. В предисловии к «Трактату» Лакруа назвал систему геометрии, в которой свойства протяженных образов чисто аналитически выводятся из возможно меньшего числа принципов, аналитической геометрией, употребив эти слова по аналогии с аналитической механикой Лагранжа. После этого термин «аналитическая геометрия», иногда применявшийся и ранее для обозначения алгебраических приемов решения геометрических задач [1], получает как более специальный смысл, так и широкое распространение. Начальный курс аналитической геометрии на плоскости (метод координат, задачи на прямую, элементарная теория кривых второго порядка) Лакруа вскоре дал в другом руководстве — «Элементарный трактат о прямолинейной и сферической тригонометрии и приложений алгебры к геометрии» (Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie. Paris, год VII, т. е. 1798—1799), и этот материал уже не повторяется во втором издании его большого «Трактата» (1810). О достоинствах «Элементарного трактата» говорит хотя бы многократное его переиздание — в несколько переработанном виде — на протяжении всего XIX в.: в 1897 г. вышло его 25-е издание. В начале прошлого века термин «аналитическая геометрия» появляется и в названиях учебных руководств, впервые, по-видимому. во втором издании «Очерка аналитической геометрии, приложенного к

[1] Например, у М. Ролля (Mém. Ac. Paris, 1709), который — в духе Декарта — понимал под аналитической геометрией еще и графическое решение алгебраических задач.

кривым и поверхностям второго порядка» (Essai de géométrie analytique appliqué aux courbes et aux surfaces du second degré. Paris, 1805 и многие другие издания) [1] парижского профессора и академика Жана Батиста Био (1774—1862), имя которого носит один из важных законов электродинамики, закон Био — Савара.

## Идея многомерного пространства

Мы уже отмечали зародыши идеи многомерного пространства у ал-Фараби, Абу-л-Вафы, Орема и Штифеля (см. т. I, стр. 230, 278, 299), но только систематическое применение трех координат для описания геометрии пространства могло привести к истолкованию $n$ чисел как координат точки $n$-мерного пространства, а уравнений между этими координатами как уравнений поверхностей и линий этого пространства.

В весьма общей форме предположение о возможности многомерных пространств высказал в одной из своих ранних работ знаменитый впоследствии философ Иммануил Кант (1724—1804). В сочинении «Мысли об истинной оценке живых сил и разбор доказательств, которыми пользовались г-н Лейбниц и другие механики в этом спорном вопросе, а также некоторые предварительные соображения, касающиеся силы тел вообще» (Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte und Beurteilung der Beweise, deren sich Herr von Leibniz und andere Mechaniker in dieser Streitsache bedienet haben, nebst einigen vorhergehenden Betrachtungen welche Kraft der Körper überhaupt betreffen. Königsberg, 1746), он, пытаясь объяснить причину того, что наше реальное пространство трехмерно, писал: «Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния... из другого закона проистекало бы и протяжение с другими свойствами и измерениями. Наука обо всех этих возможных видах пространства, несомненно, представляла бы собой высшую геометрию, какую способен построить конечный ум... Если возможно, чтобы существовали протяжения с другими измерениями, то весьма вероятно, что бог где-то их действительно разместил» [2]. Говоря о силе, обратно пропорциональной квадрату расстояния, Кант имел в виду силу тяготения, пропорциональность которой величине $1/r^2$, где $r$ — расстояние между притягивающимися массами, он связывал с тем, что убывание этой силы пропорционально площади сферы радиуса $r$. При этом предположении в случае двумерного мира убывание силы тяготения было бы пропорционально длине окружности радиуса $r$ и эта сила была бы пропорциональна $1/r$.

С другой стороны к этому вопросу подошел Даламбер. В статье «Размерность» (Dimension), помещенной в четвертом томе «Энциклопедии» (1764), он писал: «Один известный мне умный человек считает, что можно было бы рассматривать время как четвертое измерение, так что произведение времени на объем было бы некоторым образом произведением четырех измерений; эта идея, быть может, является спорной, но мне кажется, что она имеет некоторые достоинства, во всяком случае достоинство

[1] Первое издание вышло еще под названием «Аналитический трактат о кривых и поверхностях второго порядка» (Traité analytique des courbes et des surfaces du second ordre. Paris, 1802).

[2] *И. Кант.* Сочинения, т. I. 1963, стр. 71.

новизны»[1]. Многомерная аналитическая геометрия, в которой точки определяются $n$ координатами, была основана А. Кели (1843). Другой, векторный подход к геометрии $n$-мерного пространства, приведший впоследствии к аксиоматическому определению линейного пространства, был предложен Г. Грассманом (1844). Десять лет спустя Б. Риман выдвинул идею многомерного пространства переменной кривизны — так называемого риманова пространства (1854).

## Гаспар Монж

Мы уже несколько раз упоминали имя Монжа. Этот выдающийся французский ученый сыграл очень большую роль в развитии не только аналитической, но и особенно дифференциальной геометрии, как и связанных с нею отделов теории уравнений с частными производными, а также начертательной геометрии.

Гаспар Монж родился в 1746 г. в г. Боне (Бургундия) в семье мелкого торговца. Будучи 18-летним юношей, он обратил на себя внимание тем, что начертил великолепный план своего родного города, опубликованный в 1772 г. Воспитанник военно-инженерной школы в Мезьере, он преподавал в ней в 1765—1783 гг., став в 1768 г. профессором математики, а в 1771 г. и физики. С 1780 г. Монж начинает преподавать и в Париже, проводя полгода в Париже, а полгода в Мезьере, и в том же году он избирается в Парижскую академию наук, в 1783 г. он окончательно переезжает в Париж. В Мезьере Монж разработал принципы своей начертательной геометрии и, в частности, «метод Монжа», о котором мы будем говорить ниже (см. стр. 197). В 70-е годы Монж начал свои исследования по приложению анализа к теории поверхностей, к которым мы вскоре обратимся и которые начали появляться в печати с 1776 г. Он успешно занимался также вопросами физики, химии и техники, частью в связи с тем, что в 1777 г. он женился и жена принесла ему в качестве приданого металлургический завод, руководство которым он взял на себя. Революцию 1789 г. Монж встретил восторженно и стал одним из активнейших деятелей республики. В 1792—1793 гг. он был морским министром республики, затем руководил пороховыми и пушечными заводами и вместе с тем разрабатывал теорию фортификации и участвовал в комиссии по введению десятичной системы мер. После падения якобинцев Монж занялся организацией новой системы высшего образования и подготовки научных и инженерных кадров. Он явился одним из основателей Политехнической школы (1794), руководителем которой, если не считать поездок в свите Наполеона в Италию и Египет, состоял 20 лет. Из лекций Монжа в Политехнической и Нормальной школах возникли его классические курсы дифференциальной и соответственно начертательной геометрии. Горячий приверженец и друг Наполеона, он примирился с провозглашением империи и ему были присвоены титул графа и звание сенатора. Во время 100 дней Монж без колебаний вновь примкнул к императору; этого не простили ему Бурбоны и весной 1816 г. он был исключен из Института, т. е. Академии наук, и отстранен от работы в Политехнической школе, ученикам которой было даже

[1] «Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers», t. 4. Paris, 1764, p. 1010.

Г. Монж
(с портрета Дютертра)

запрещено присутствовать на его похоронах,— он умер летом 1818 г. в состоянии глубокой депрессии.

Для взглядов и деятельности Монжа чрезвычайно характерно его предисловие к «Начертательной геометрии» (1795). Здесь Монж писал: «Чтобы освободить французский народ от иностранной зависимости, в которой он до сих пор находился, надо прежде всего направить народное образование к познанию объектов, требующих точности, что было в полном пренебрежении до нашего времени, и приучить специалистов к пользованию всевозможными инструментами, предназначенными для того, чтобы вносить точность в работу и измерять ее степень... Во-вторых, надо расширить знание многих явлений природы, необходимое для прогресса промышленности... Наконец, надо распространить среди наших специалистов знание способов, применяемых в искусствах, и знание машин, предназначенных для того, чтобы либо сократить ручную работу, либо внести в результаты работы больше однородности и точности; надо сознаться, что в этом отношении мы должны еще много заимствовать у чужих народов. Всем этим требованиям можно удовлетворить, только дав новое направление народному образованию. В частности, народному образованию будет дано полезное направление, если наши молодые специалисты привыкнут применять начертательную геометрию к графическим построениям, необходимым во многих областях, и пользоваться ею для построения и определения элементов машин, при помощи которых человек, используя силы природы, оставляет за собой только работу разума» [1].

Благодаря Монжу математика заняла центральное место в учебном плане Политехнической школы и многие ее выпускники стали профессиональными математиками. Значительная часть их была слушателями Монжа, увлечение которого преподаваемыми им математическими дисциплинами передавалось его слушателям.

Непосредственными учениками Монжа, продолжившими, иногда в совершенно новых направлениях, его исследования, были такие крупные математики, как Л. Карно, Тенсо, Менье, Лакруа, Ашетт, Ланкре, Фурье, Дюпен, Брианшон, Ампер, Понселе, Шаль и многие другие.

## Дифференциальная геометрия на плоскости

После того как первые начала дифференциальной геометрии были заложены Лейбницем, Ньютоном и старшими братьями Бернулли (см. т. II, стр. 274—275), в XVIII в. эта новая отрасль геометрии получила новое широкое развитие.

Ряд работ по дифференциальной геометрии на плоскости был связан с задачей о траекториях семейств кривых, т. е. об определении кривых, пересекающих кривые данного семейства под постоянным углом или под углом, изменяющимся по определенному закону; в первом случае траектории называются изогональными, а в случае, когда угол прямой, мы получаем упоминавшиеся нами ортогональные траектории (см. стр. 169). Задача о разыскании траекторий была поставлена И. Бернулли (1697), который ввел и этот термин (1698) (ср. т. II, стр. 280). Задачу о взаимных траекториях, т. е. о траекториях, относящихся к тому же виду кривых, что и кривые данного семейства, сформулировал Николай II Бернулли (Acta Eruditorum, 1720), указавший, что ею уже занимался его отец, Иоганн; несколько позже И. Бернулли в качестве простейшего примера алгебраических взаимных траекторий привел полукубические параболы $y^3 = ax^2$ (Acta Eruditorum, 1727). Неудивительно, что проблеме взаимных траекторий посвящены были и одни из первых работ Эйлера — одна в «Acta Eruditorum» за 1727 г. и другая в «Записках» Петербургской академии за тот же год (1729). К этой проблеме Эйлер возвращался и позднее (см., например, Acta, (1782 : II) 1786).

Большое число статей посвящено было изучению кривых, заданных теми или иными соотношениями между их радиусом кривизны и другими, связанными с кривой величинами — радиус-вектором, отрезком нормали или касательной, длиной дуги и т. д. Такого рода задачи приводились к интегрированию дифференциальных уравнений и потому их иногда относили к задачам на обратный метод касательных (ср. т. II, стр. 256). Много подобных проблем решили Эйлер и другие петербургские ученые, к работам которых восходит, между прочим, так называемая естественная геометрия плоских кривых, в которой свойства кривых изучаются с помощью уравнений между величинами, непосредственно принадлежащими самим кривым, большей частью, между длиной дуги $s$, отсчитанной от фиксиро-

[1] *Г. Монж.* Начертательная геометрия. Перевод В. Ф. Газе, под редакцией Д. И. Каргина. М., 1947, стр. 9—12.

ванной точки, и кривизной $k$. Эйлер применил «естественные координаты» плоской кривой $s$, $k$ еще в «Разыскании пар кривых, дуги которых, соответствующие одной и той же абсциссе, образуют алгебраическую сумму» (Investigatio binarum curvarum, quarum arcus eidem abscissae respondentes summam algebraicam constituant. Commentarii, (1736) 1741). В одной статье 1781 г., опубликованной посмертно в «Mém. Ac. St.-Pétersb.», 1824, Эйлер рассмотрел кривые, радиусы кривизны которых пропорциональны квадратам радиус-векторов соответствующих точек. Эта задача была обобщена учеником Эйлера Н. И. Фуссом на произвольные степени радиус-векторов в «Nova Acta», (1786) 1789. В другой работе, представленной в 1799 г. и напечатанной в «Mém. Ac. St.-Petersb.», 1809, Фусс решил десять задач, в которых кривая задана уравнениями между радиусом кривизны $r$, длиной дуги $s$, радиус-вектором $z$ и т. д., вроде

$$r = z + a, \quad m^2r^2 + n^2s^2 = z^2, \qquad m^2r^2 + n^2s^2 = a^2,$$

где $a$, $m$, $n$ — данные числа. Аналогичными вопросами занимались в Петербурге Ф. И. Шуберт (Nova Acta, (1791) 1795) и М. Плацман (Acta, (1781 : II) 1785), молодой математик, скончавшийся в возрасте 26 лет (1760—1786). Впрочем, естественная геометрия плоских кривых не была тогда выделена в особую отрасль геометрии. К мысли определять кривые без отнесения к произвольным системам координат, но лишь связанными с ними самими величинами, не раз обращались различные ученые XIX в. Так, У. Юэл (1794—1866), автор известной «Истории индуктивных наук» (History of the Inductive Sciences, 1837—1838), называл «внутренним», intrinsic, уравнением кривой уравнение, связывающее длину дуги $s$ и угол $\varphi$ касательной в конце дуги с некоторой фиксированной касательной. Другие предлагали исходить из зависимостей между $r$ и $s$ или $r$ и $\varphi$. Последовательное построение системы «внутренней геометрии» с координатами $s$, $r$ дал впервые профессор Неаполитанского университета Э. Чезаро (1896); в немецкой и русской литературе этот термин был заменен на «естественную геометрию».

Отметим в заключение статью еще одного петербургского ученого С. Е. Гурьева, содержавшую сводку всех остальных формул дифференциальной геометрии плоских кривых в полярной системе координат. Эти формулы С. Е. Гурьев единообразно вывел чисто аналитическим путем из соответствующих формул для декартовой прямоугольной системы (Nova Acta, (1794) 1801).

## Дифференциальная геометрия пространственных кривых

Мы уже видели (см. стр. 175), что Клеро, реализуя мысль Декарта, сводил изучение кривых двоякой кривизны к изучению их проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости. В его «Исследованиях» (1731) впервые появилась в печати формула элемента длины пространственной кривой в виде $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ и рассмотрены некоторые задачи на определение касательных и нормалей. Но, положив одним из первых начало применению дифференциальных, а также интегральных методов к изучению кривых двоякой кривизны, Клеро ограничился задачами, которые представляют простой перенос на пространство отдельных задач дифференциальной геометрии на плоскости и требуют лишь замены двух переменных тремя.

Еще до выхода «Исследований» Клеро ряд важных понятий дифференциальной геометрии пространственных кривых был введен в связи с изучением геодезических линий, т. е. кратчайших кривых данной поверхности между какими-либо двумя ее точками (на плоскости геодезическими линиями являются прямые, на сфере — большие круги)[1]. Именно при изучении поставленной им в 1697 г. проблемы геодезических линий И. Бернулли в письме к Лейбницу от 26 августа 1698 г. ввел понятие соприкасающейся плоскости пространственной кривой по аналогии с соприкасающимся кругом плоской кривой: соприкасающаяся плоскость определялась как плоскость, проходящая через три соседние точки кривой; эта плоскость перпендикулярна к касательной плоскости к поверхности, проходящей через какую-либо из этих трех точек. Неизвестно, как вывел И. Бернулли это свойство соприкасающейся плоскости; неизвестно, как он вывел и в каком виде он записал упомянутое им в переписке с Лопиталем и Лейбницем общее уравнение геодезических. Как уже говорилось (см. стр. 174), вскоре после того, как И. Бернулли поставил перед Эйлером задачу о геодезических, молодой петербургский математик вывел их дифференциальное уравнение, которое сообщил своему бывшему учителю 18 февраля (1 марта) 1729 г. и опубликовал в «Записках» Петербургской Академии наук за (1728) 1732 г. Уравнение Эйлера имело вид

$$\frac{Qd\,dx + Pd\,dy}{Qdx + Pdy} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

где $P$ и $Q$ определяются из дифференциального уравнения поверхности $Pdx = Qdy + Rdt$; напомним, что буква $t$ означала у Эйлера одну из пространственных координат. Отвечая Эйлеру 18 апреля 1729 г., И. Бернулли привел свое уравнение

$$\frac{Td\,dy}{Tdz\,ds - zds^2} = \frac{ddz}{ds^2 + dz^2},$$

где $T$ — подкасательная некоторой кривой на поверхности и $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (опубл. 1742). Ясно, что оба они владели формулой дифференциала дуги пространственной кривой, легко найденной и Клеро (см. стр. 187). К выводу общего уравнения Эйлер добавил подробное рассмотрение геодезических на цилиндрических и конических поверхностях и на поверхностях вращения (этот случай ранее в 1698 г. исследовал другими средствами Я. Бернулли, упомянув, что при развертывании первых двух на плоскость их геодезические переходят в прямые). Впоследствии Эйлер неоднократно возвращался к проблеме геодезических. Во втором томе «Механики» (1736) он доказал, что точка, движущаяся по поверхности «при отсутствии сил», описывает геодезическую,— предложение, которым пользовался ранее Бернулли; при этом Эйлер показал, что главная нормаль геодезической кривой в каждой ее точке совпадает с нормалью к поверхности. Занятия Эйлера проблемой геодезических тесно переплетались с разработкой им вариационного исчисления (см. десятую главу).

Геодезические линии исследовал и Клеро. Он доказал, что для точек геодезической линии на поверхности вращения произведение радиуса

---

[1] Термин «геодезическая линия» появился впервые в «Небесной механике» (Mécanique céleste, t. II, 1799) П. С. Лапласа применительно к земному сфероиду, чем и объясняется этот термин. Впоследствии это название было распространено на кратчайшие линии всех поверхностей второго порядка, а Ж. Лиувилль (1844) распространил его на любые поверхности.

параллели на синус угла, составляемого геодезической с меридианом, постоянно (Mém. Ac. Paris, (1733) 1735). С помощью разложений в ряды он нашел геодезические линии сфероида, по форме близкого к сфере (Mém. Ac. Paris, (1739) 1740).

Важнейшей из работ Эйлера по геометрии пространственных кривых является «Легкий способ исследовать все свойства кривых линий, не расположенных в одной плоскости» (Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi. Acta, (1782 : I) 1786). В качестве независимой переменной Эйлер выбирает длину дуги $s$, полагая

$$dx = pds,\ dy = qds,\ dz = rds;$$

параметрическим представлением кривой он пользуется систематически. Далее он описывает вокруг точки кривой единичную сферу, ставит в соответствие прямым, проходящим через точку кривой, точки их пересечения со сферой и применяет формулы сферической тригонометрии. Таким образом, Эйлер ввел в употребление сферическое отображение, как это вновь сделал почти полвека спустя Гаусс (1827). Для тех, кого не удовлетворяет этот подход, следующий астрономической традиции, Эйлер приводит «другое рассуждение», основанное на свойствах соприкасающейся плоскости. Эйлер показывает, что диагональ параллелепипеда со сторонами $p$, $q$, $r$ направлена по касательной к кривой и имеет единичную длину, диагональ параллелепипеда со сторонами $dp/ds$, $dq/ds$, $dr/ds$ имеет направление радиуса кривизны, ее длина равна обратному значению радиуса кривизны, а диагональ параллелепипеда со сторонами $(rdq - qdr)/ds$ и т. д. имеет ту же длину, но направлена перпендикулярно соприкасающейся плоскости. С современной точки зрения, первая диагональ — единичный вектор касательной $\mathbf{t}$, вторая — вектор кривизны, равный произведению единичного вектора главной нормали $\mathbf{n}$ на кривизну кривой, а третья диагональ — произведение единичного вектора бинормали $\mathbf{b}$ на ту же кривизну. Тем самым по существу Эйлер ввел соприкасающийся трехгранник кривой и доказал первую формулу Ж. Френе (1847).

## Дифференциальная геометрия поверхностей

Основополагающее значение имели работы Эйлера и в теории поверхностей, из которых прежде всего отметим «Исследования о кривизне поверхностей» (Recherches sur la courbure des surfaces, Mém. Ac. Berlin, (1760) 1767). Называя «главным сечением» поверхности $z = f(x, y)$ нормальное сечение, перпендикулярное к плоскости $xOy$, и изменяя угол между плоскостью произвольного нормального сечения и плоскостью главного сечения, Эйлер нашел, что в каждой точке поверхности имеются нормальные сечения с максимальным радиусом кривизны $f$ и с минимальным $g$, плоскости которых взаимно перпендикулярны. Далее, обозначая через $\varphi$ угол между плоскостью произвольного нормального сечения и плоскостью нормального сечения с максимальным радиусом кривизны, Эйлер показал, что радиус кривизны $r$ произвольного нормального сечения выражается через $f$ и $g$ по формуле

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\varphi},$$

которую Ш. Дюпен (1813) преобразовал к более удобному виду

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{f}\cos^2\varphi + \frac{1}{g}\sin^2\varphi.$$

Следующий существенный шаг вперед Эйлер сделал в мемуаре «О телах, поверхность которых можно развернуть на плоскость» (De solidis quorum superficiem in planum explicare licet. Novi Commentarii, (1771) 1772). Здесь введено понятие развертывающейся поверхности, т. е. поверхности, которая может быть наложена на плоскость без складок и разрывов. К таким поверхностям относятся цилиндры и конусы. Развертыванием поверхностей на плоскость занимались с чисто практической точки зрения в работах по теории архитектуры и скульптуры, например, в книге военного инженера Амедея Франсуа Фрезье (1682—1773) «Теория и практика резки камней и дерева или трактат по стереотомии» (La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou traité de stéréotomie, t. 1. Strassbourg, 1737), однако общее понятие развертывающейся поверхности было дано Эйлером. Эйлер исходил из того, что бесконечно малый треугольник на такой поверхности должен быть конгруэнтен соответствующему треугольнику в плоскости, на которую она развертывается, он вводит на поверхности криволинейные координаты $t$, $u$, равные прямоугольным координатам соответствующих точек плоскости, и, обозначая частные производные координат $x$, $y$, $z$ по $t$ через $l$, $m$, $n$, а частные производные тех же координат по $u$ через $\lambda$, $\mu$, $\nu$, записывает условия развертываемости поверхности в виде:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \qquad l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

(с современной точки зрения, это — условия единичности и ортогональности векторов, координаты которых равны частным производным радиус вектора точки поверхности по координатам $t$, $u$). Начало систематическому применению криволинейных координат на поверхности положил много позднее Гаусс (1827). Наряду с приемом параметрического представления поверхностей основное место в мемуаре Эйлера занимает введение линейного элемента поверхности как средства исследования тех свойств поверхности, которые впоследствии были названы внутренними и которые могут быть исследованы с помощью измерений на ней самой, без обращения к пространству, ее содержащему. И эта идея получила дальнейшее глубокое развитие лишь начиная с Гаусса (1827). Линейный элемент $ds$ развертывающейся поверхности, т. е. дифференциал дуги линии на ней, таков, что $ds^2 = dt^2 + du^2$, и условие Эйлера может быть сформулировано как условие совпадения линейного элемента развертывающейся поверхности с линейным элементом плоскости. Окончательный результат состоит в том, что касательные к любой пространственной кривой образуют развертывающуюся поверхность и всякая развертывающаяся поверхность является либо цилиндром, либо конусом, либо поверхностью касательных.

В то время как печатался данный мемуар, Эйлер продвинулся в области внутренней геометрии поверхностей еще далее и в одной заметке, увидевший свет лишь в первом томе его «Opera postuma», изданных в Петербурге в 1862 г., установил общее условие наложимости (изгибания) одной поверхности на другие. В более современной форме те же и более глубокие результаты были — совершенно независимо — получены опять таки Гауссом (1827). Впоследствии проблеме изгибания и изометрии были посвящены многочисленные исследования крупнейших геометров [1].

В уже упоминавшейся статье «Об изображении поверхности шара на плоскости» ((1777) 1778) Эйлер, сравнивая линейный элемент сферы с линейным элементом плоскости, доказал невозможность изометрического отображения сферы на плоскость и поставил вопрос о трех видах отображения сферы на плоскость, наиболее важных для картографии: отображении, при котором меридианы и параллели изображаются ортогональной системой прямых, конформном отображении, сохраняющем углы между линиями, и эквиареальном отображении, сохраняющем площадь сферических областей.

Эйлер исследовал также некоторые новые специальные классы поверхностей, например, поверхности, получающиеся, когда центр данной окружности движется по данной плоской кривой, причем плоскость круга остается нормальной к кривой. Эйлер назвал такие поверхности, дифференциальное уравнение которых есть

$$z\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=a,$$

«изогнутыми цилиндрами», в настоящее время их именуют трубчатыми поверхностями. Заменив окружность какой-либо другой плоской кривой, причем в дифференциальном уравнении вместо постоянной $a$ появляется некоторая функция $Z(z)$, Эйлер пришел к так называемым теперь резным поверхностям.

К понятию развертывающейся поверхности независимо от Эйлера пришел Г. Монж в «Мемуаре о развертках, радиусах кривизны и различных родах перегибов кривых двоякой кривизны» (Mémoire sur les developpées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure, Mém. div. sav., 1785, представлено в 1771). Нам уже пришлось говорить о значении этой превосходной работы в развитии аналитической геометрии в пространстве (см. стр. 181). Изложение главной, дифференциально-геометрической части этого труда основано на характерных для Монжа наглядных инфинитезимально-геометрических рассуждениях. Здесь появляется важное понятие линии полюсов (теперь говорят: оси кривизны) элемента дуги, определяемом тремя бесконечно близкими точками кривой — оси соприкасающегося круга кривой, являющейся линией пересечения нормальных плоскостей в двух бесконечно близких точках кривой. Монж показал, что линии полюсов данной кривой образуют развертывающуюся поверхность, называемую поверхностью полюсов. Центры кривизны кривой, т. е. центры соприкасающихся кругов, лежат на поверхности полюсов и образуют на ней линию, которая при развертывании этой поверхности на плоскость переходит в прямую, т. е. является геодезической линией поверхности полюсов. Монж вывел и дифференциальное уравнение геодезических линий, тождественное, как он сам указал, с уравнением И. Бернулли. Монж нашел также уравнения ребра

[1] При изометрическом отображении одной поверхности на другую сохраняются длины всех соответствующих линий. Изгибающиеся друг на друга поверхности обязательно изометричны, но изометричные поверхности могут быть и не наложимы друг на друга (например, левая перчатка не надевается на правую руку). Важность изометрии — в том, что все изометричные друг другу поверхности имеют одну и ту же внутреннюю геометрию.

возврата поверхности полюсов, т. е. той кривой, касательные к которой образуют эту поверхность (ср. стр. 190). Он рассмотрел и другую развертывающуюся поверхность, связанную с кривой,— поверхность, огибающую плоскости, проходящие через касательные к кривой и перпендикулярные к ее соприкасающимся плоскостям. Такая поверхность обладает тем свойством, что данная кривая является геодезической линией на ней и, следовательно, переходит в прямую при ее развертывании на плоскость. Так как длина дуги кривой равна длине соответствующего отрезка этой прямой, с помощью этого развертывания можно производить спрямление кривой, вследствие чего эти поверхности получили впоследствии название «спрямляющих».

Что касается точек перегиба, фигурирующих в заглавии статьи, то Монж разделил их на два рода: точки простого перегиба, возникающие, когда три последовательных элемента кривой лежат в одной плоскости (мы бы сказали: кручение равно нулю), и точки двойного перегиба, для которых два последовательных элемента лежат на одной прямой (кривизна равна нулю). Несколько ранее, в 1780 г., такая же по существу классификация была опубликована в уже встретившейся нам статье Тенсо (см. стр. 180).

В другой работе, сданной в печать позже первой (1775), но опубликованной раньше, «О свойствах многих родов кривых поверхностей, в особенности развертывающихся поверхностей, с приложением к теории теней и полутеней» (Sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres. Mém. div. savants, 1780) Монж продолжал исследования развертывающихся поверхностей. Здесь Монж провел разграничение между развертывающимися и неразвертывающимися линейчатыми поверхностями, т. е. произвольными поверхностями, образованными движением прямой; последние поверхности Монж назвал «косыми» (gauches). Дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей, выведенное Монжем,

$$\delta\delta z \cdot ddz = (\delta dz)^2,$$

где $\delta$ и $d$ — символы дифференцирования по $x$ и $y$, в современных обозначениях можно записать

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0.$$

Дифференциальное уравнение произвольных линейчатых поверхностей он получил в виде

$$2\delta\left(\frac{-\delta dz + \sqrt{\omega}}{ddz}\right) + d\left(\frac{-\delta dz + \sqrt{\omega}}{ddz}\right)^2 = 0,$$

где $\omega = (\delta dz)^2 - \delta\delta z \cdot ddz$. Монж нашел также уравнение линейчатой поверхности, проходящей через три данные пространственные кривые; в случае, когда эти кривые являются попарно скрещивающимися прямыми, поверхность является однополостным гиперболоидом или гиперболическим параболоидом. Теорию развертывающихся поверхностей Монж применил к нахождению теней и полутеней тел, освещенных другим телом. Для этого определяется развертывающаяся поверхность, охватывающая две данные поверхности; тогда кривая, по которой эта развертывающаяся поверхность пересекается с третьей поверхностью, ограничивает на ней тень темного тела при его освещении светящимся телом: две данные поверхности служат границами этих двух тел. В этой же работе Монж вывел уравнение касательной поверхности к поверхности $z = f(x, y)$ в виде

$$z = p'(x - x') + q'(y - y') + K',$$

где $p'$, $q'$ — частные производные функции $z$ в точке касания. Одновременно это уравнение в несколько иной записи было приведено в статье Тенсо, напечатанной в том же томе «Mém. div. savants», 1780, что и данная работа Монжа (см. стр. 180). В «Мемуаре о теории выемок и насыпей» (Mémoire sur la théorie des déblais et remblais. Mém. Ac. Paris, (1781) 1784), отправляясь от задачи, в которой требуется определить наиболее экономически выгодные траектории частиц земли при их перемещении из выемки в насыпь,— задачи, возникшей в работах Монжа по фортификации,— Монж показал, что эти траектории являются нормалями к некоторой поверхности. Здесь впервые появилось понятие конгруэнции прямых — семейства прямых, зависящих от двух параметров. Монж показал, что через каждую прямую конгруэнции проходят две развертывающиеся поверхности, состоящие из прямых конгруэнции, которые в данном случае пересекаются под прямым углом. Линии на поверхности, нормали вдоль которых образуют развертывающиеся поверхности,— одни из важнейших линий на поверхности, называемые линиями кривизны поверхности.

Систематическое изложение теории поверхностей мы находим в прочитанном Монжем в Политехнической школе курсе, первоначально напечатанном в форме отдельных выпусков под названием «Листы анализа, приложенного к геометрии» (Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie. Paris, год III, 1795; Изд. 2, год IX, 1801), и в являющемся их обработкой «Приложении анализа к геометрии» (Application d'analyse à la géométrie. Paris, 1807). Здесь излагалось и много новых открытий Монжа. В основу изложения было положено понятие семейства поверхностей, определяемого дифференциальным уравнением в частных производных

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

или

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{2}$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Мы уже встречались с уравнениями Монжа линейчатых и развертывающихся поверхностей.

Большое значение имело введение понятия характеристики как линии пересечения двух бесконечно близких поверхностей семейства; ребро возврата (см. стр. 192) является огибающей характеристик, находящихся на одной поверхности. Монж нашел дифференциальное уравнение характеристик в случае уравнения (1) в виде

$$P dy - Q dx = 0,$$

где $P = \partial F/\partial p$, $Q = \partial F/\partial q$, а в случае уравнения (2) — в виде

$$R\,dx^2 - S\,dx\,dy + T\,dy^2 = 0,$$

где $R = \partial\Phi/\partial r$, $S = \partial\Phi/\partial s$, $T = \partial\Phi/\partial t$. Найдя характеристики в некоторых случаях, Монж интегрирует эти уравнения и получает конечные уравнения семейств, содержащих произвольные функции,— например, уравнения цилиндрических и конических поверхностей и поверхностей вращения, имеющие соответственно вид:

$$\alpha x + \beta y = \varphi(ax - by), \qquad z - c = (x - a)\,\varphi\left(\frac{y-b}{x-a}\right), \quad z = \varphi(x^2 + y^2),$$

и уравнение произвольных линейчатых поверхностей в параметрическом виде:

$$y - \alpha x = \psi(\alpha), \quad z - x\varphi(\alpha) = \pi(\alpha).$$

Весьма детально исследуются также введенные Монжем линии кривизны поверхностей; в каждой точке поверхности находятся радиусы кривизны линий кривизны, проходящих через эту точку, правда, без упоминания, что эти так называемые главные радиусы кривизны совпадают с радиусами кривизны $f$ и $g$, о которых писал Эйлер (см. стр. 189). Монж нашел геометрическое место центров кривизны линий кривизны в виде двух поверхностей, исследовал эти поверхности и выделил те их точки, в которых главные радиусы кривизны совпадают,— эти точки в настоящее время называются омбилическими. Найдя уравнение кривой на поверхности, состоящей из таких точек, Монж, однако, не заметил, что эта кривая всегда мнима, за исключением отдельных точек. В случае эллипсоида, впрочем, он нашел, что таких точек всего восемь, и, советуя придать сводам залов Законодательного собрания форму эллипсоида, предложил, чтобы балки свода следовали линиям кривизны, а люстры были подвешены в омбилических точках.

Из учеников Монжа следует назвать прежде всего военного инженера и члена Академии наук Жана Батиста Менье (1754—1793), погибшего в расцвете сил при защите Майнца от осадивших город войск пруссаков. В представленном им в 1776 г. «Мемуаре о кривизне поверхностей» (Mémoire sur la courbure de surfaces. Mém. div. savants, 1785) Менье предложил исследования, изложенные в посвященной тому же вопросу работе Эйлера (см. стр. 189). Исходя из того, что кривизна поверхности определяется частными дифференциалами до второго порядка включительно, он заменил поверхность в окрестности исследуемой точки эллиптическим параболоидом с вершиной в этой точке и осью, лежащей на нормали к поверхности в ней и с тою же кривизной, что рассматриваемый элемент поверхности. Установив, что любой элемент поверхности — это выражение появилось у Менье впервые — можно рассматривать как образованный вращением некоторой дуги окружности вокруг оси, параллельной касательной плоскости элемента, он получил еще одно геометрическое истолкование найденных Эйлером экстремальных радиусов кривизны нормальных сечений. Вместе с тем он доказал важную теорему, носящую его имя: если $R$ — радиус кривизны произвольного плоского сечения поверхности, $R'$ — радиус кривизны нормального сечения с той же касательной и $\omega$ — угол между плоскостями обоих сечений. то $R = R' \sin\omega$.

Здесь же Менье рассмотрел задачу об определении поверхности минимальной площади, ограниченной данным контуром. Он нашел, что для таких поверхностей, называемых в настоящее время минимальными поверхностями, сумма главных радиусов кривизны равна нулю, и таким образом получил дифференциальное уравнение этих поверхностей

$$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0,$$

найденное раньше методами вариационного исчисления Лагранжем (Misc. Taur., (1760—1761) 1762). Интегрируя это уравнение в частных случаях, Менье нашел в качестве примеров таких поверхностей линейчатый геликоид — поверхность, образованную прямой, перпендикулярной к оси винтового движения, при этом движении,— и катеноид — поверхность, образованную вращением цепной линии вокруг ее оси симметрии. Минимальные поверхности изучал и Монж, который в «Приложениях анализа к геометрии» вывел общее их уравнение в конечной форме, содержащей мнимость, не приводя каких-либо примеров (он упоминает в начале соответствующей главы работу Лагранжа, но не Менье).

Работы по дифференциальной геометрии других учеников Монжа — упоминавшегося ранее (см. стр. 190) Ш. Дюпена (1784—1873), М. А. Ланкре (1774—1807), Софи Жермен (1776—1831) и других — приходятся уже на XIX в., и мы их рассматривать не можем. Следует добавить, что, несмотря на появление целого ряда превосходных работ о кривизне поверхности, в этом вопросе сохранялись неясности и многое предстояло развить в новых направлениях. Даже Эйлер (Dioptrica, I, Petropoli 1769) и Даламбер (статья «Кривая» (Courbe) в «Энциклопедии») допустили ошибку, полагая, что любой элемент поверхности можно приближенно считать сферическим,— ранее такую же ошибку совершил Лейбниц в письме к И. Бернулли от 29 июля 1698 г. Глубокие и прочные основы современной теории кривизны заложил Гаусс в своем классическом труде о кривых поверхностях (1827), где он ввел понятие полной (так называемой гауссовой) кривизны, равной произведению главных кривизн, играющее фундаментальную роль в теории изометрии, и изгибания поверхностей.

Дифференциальной геометрии линий и поверхностей в трехмерном пространстве были затем посвящены многие работы математиков XIX в. Исследования Гаусса по внутренней геометрии поверхности были гениально обобщены в 1854 г. Б. Риманом на многомерные пространства, линейный элемент которых имеет вид

$$ds^2=\sum_i \sum_j a_{ij}(x)\,dx^i dy^j,$$

где $dx^i$ — дифференциалы координат $x^i$ точки $x$. Частными случаями римановых пространств, характеризующимися постоянной кривизной и максимальной подвижностью, являются гиперболическое неевклидово пространство Лобачевского и эллиптическое неевклидово пространство Римана. К работам, подготовлявшим в XVIII в. открытие неевклидовых пространств, мы обратимся в конце этой главы.

### Начертательная геометрия

Основы начертательной геометрии, т. е. учения об изображении пространственных фигур на плоскости, были заложены в XV—XVI вв. работами по теории перспективы Л. Б. Альберти, П. деи Франчески, Леонардо да Винчи и Альбрехта Дюрера (см. т. I, стр. 321—325). Мы уже упоминали об относящихся к теории перспективы работах ученых XVII в.

С. Стевина, Ж. Дезарга и Ф. Лагира (см. т. II, стр. 121 и 126), а также, что центральное проектирование применял Ньютон (см. т. II. стр. 116).

Традиции Стевина и Лагира были продолжены в начале XVIII в. голландцем Виллемом Якобом с'Гравесанде[1] (1688—1742) в «Опыте о перспективе» (Essai de perspective. La Haye, 1711). С'Гравесанде пользовался проекцией бесконечно удаленной прямой предметной плоскости — так называемой линией схода, являющейся геометрическим местом точек пересечения проекций параллельных прямых, лежащих в предметной плоскости, а также сокращенным масштабом на этих прямых. Немного спустя Брук Тейлор выпустил «Линейную перспективу» (Linear perspective. London, 1715) и ее переработанный вариант «Новые принципы линейной перспективы» (New principles of linear perspective. London, 1719). Сочинения голландского и английского авторов удачно дополняли друг друга. Французский астроном Никола Луи де Лакайль (1713—1762) в «Начальных уроках по оптике» (Leçons élémentaire d'optique. Paris, 1750) пользовался аналитическими формулами де Гюа для центрально-перспективного соответствия двух плоскостей (1740; см. стр. 159) и, в частности, нашел уравнение гиперболы, являющейся перспективой окружности. Согласно Лакайлю, координаты $x$, $y$, $z$ точки пространства связаны с координатами $x'$, $y'$ ее проекции на картинную плоскость соотношениями:

$$x' = \frac{xd}{d+y}, \qquad y' = \frac{zd}{d+y},$$

где $d$ — расстояние от центра проекции до картинной плоскости. На линии горизонта Лакайль отмечал точки, через которые проходят изображения горизонтальных прямых, образующих с основанием картины углы 10°, 20° и т. д.

Важную роль сыграла книга И. Г. Ламберта «Свободная перспектива или наставление, как составлять всякую перспективную вертикальную проекцию свободных отрезков, не пользуясь при этом горизонтальной проекцией» (Die freye Perspective oder Anweisung, jeden perspectivischen Aufriss von freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen. Zürich, 1759). Ламберт распространил теорию Лакайля и, в частности, отметки углов на случай, когда картинная плоскость не перпендикулярна к предметной, и на случай прямых, расположенных к предметной плоскости под некоторым углом. В разделе «О перспективном проектировании из бесконечно удаленной точки зрения» Ламберт перенес теорию перспективы на случай параллельного проектирования. Второе издание «Свободной перспективы» (1774) было дополнено разделом о геометрических построениях с помощью одной линейки и, в случае необходимости, неподвижного круга. Такие построения представляют собой частный случай построений линейкой и циркулем постоянного раствора, иногда применявшихся ал-Фараби, Абу-л-Вафой и Леонардо да Винчи (см. I, стр. 230 и 323).

Напротив, датский математик Георг Мор (Морендаль, 1640—1697) в «Датском Евклиде» (Euclides Danicus. Amsterdam, 1672) пользовался построениями одним циркулем. Общая теория таких построений была разработана профессором в Павии Лоренцо Маскерони (1750—1800). В «Геометрии циркуля» (Le geometria del compasso. Pavia, 1797) Маскерони доказал, что всякая задача на построение конечного числа точек, разрешаемая с помощью циркуля и линейки, разрешима и с помощью только цир-

[1] Правильное произношение этой фамилии: Схавесанде.

куля. Свою книгу Маскерони предназначал для механиков-практиков, так как считал построения одним циркулем более точными, чем построения циркулем и линейкой. Свой труд Маскерони посвятил Наполеону, который, высоко ценя его оригинальные и изящные конструкции, распорядился немедленно перевести книгу на французский язык (Париж, 1798), а самого автора пригласил для работы в комиссии новых мер и весов в Париж, где Маскерони и умер. В другом сочинении «Задачи для землемеров» (Problemi per gli agrimensori, Pavia, 1793) Маскерони, подобно Ламберту, решил многие задачи на построение с помощью только линейки. Понселе в 1822 г. доказал, что все построения, осуществимые посредством циркуля, можно произвести с помощью линейки и заданного круга с центром.

Современный вид начертательная геометрия приобрела благодаря Г. Монжу, лекции которого по этому предмету, читанные в Нормальной школе в 1795 г., изданы были сперва в отдельных выпусках «Séances des Écoles Normales», тт. I—III, год III, т. е. 1795, и четыре года спустя без существенных изменений в виде отдельной книги «Начертательная геометрия» (Géométrie descriptive. Paris, год VII, т. е. 1799).

Основная часть «Начертательной геометрии» Монжа посвящена изложению «метода Монжа», представляющего собой развитие метода изучения пространственных линий путем изучения их ортогональных проекций на две перпендикулярные плоскости; особенность «метода Монжа» состоит в том, что, спроектировав пространственную фигуру на вертикальную и горизонтальную плоскости, он совмещал их в одной плоскости. В результате каждая точка пространства изображается на чертеже Монжа парой точек, расположенных на одной вертикали, каждая прямая изображается парой прямых, на которых отмечены «следы» — точки пересечения изображаемых прямых с плоскостями проекции; плоскости задаются парами лежащих в них прямых, чаще всего «следами» — их пересечениями с плоскостями проекций. Аналогичное проектирование на несколько перпендикулярных плоскостей применял, как мы видели, Дюрер (см. т. I, стр. 325). В своей книге Монж решил все основные задачи на построение точек, прямых и плоскостей, а также на построение пространственных кривых и поверхностей, изучавшихся им методами дифференциальной геометрии. Метод Монжа, вследствие своего удобства, является основным в техническом черчении до настоящего времени. В книге Монжа излагалась также теория перспективы и был доказан ряд теорем проективной геометрии (см. стр. 198).

## Проективная геометрия

В отличие от XVII в., когда проективная геометрия развивалась только в синтетическом плане, в XVIII в. в ней появляются и аналитические методы. Мы уже упоминали аналитические формулы для центрально-перспективного соответствия двух плоскостей, применявшиеся Гюа де Мальвом и Лакайлем. Если цепь центральных проектирований одной плоскости на другую приведет к первоначальной плоскости, на этой плоскости произойдет проективное преобразование общего вида — наиболее общее взаимно однозначное преобразование проективной плоскости (т. е. плоскости, дополненной бесконечно удаленной прямой), переводящее прямые в прямые, вследствие чего такое преобразование называют также коллинеацией. Общее аналитическое выражение коллинеации встречается впервые в «Аналитических этюдах» Варинга (1762; см. стр. 173). Аффинные преобра-

Л. Карно
(с портрета Буайи, 1813)

зования, рассматривавшиеся Клеро и Эйлером (см. стр. 162 и 167), представляют собой частные случаи этих преобразований, когда бесконечно удаленная прямая переходит в себя. Аналитическое выражение наиболее общего аффинного преобразования получается из формул Варинга, если положить в них $A = B = 0$.

В конце XVIII в. в связи с появлением «Начертательной геометрии» Монжа возродился интерес и к синтетическим исследованиям. Из предложений проективной геометрии, доказанных в этой книге, упомянем теорему о том, что касательные, проведенные из точки к поверхности второго порядка, касаются этой поверхности в точках плоской кривой; плоскость этой кривой есть полярная плоскость данной точки — полюса этой плоскости.

В самом конце XVIII в. проблемами синтетической геометрии заинтересовался другой выдающийся ученый и деятель Французской революции Лазарь Карно (1753—1823). Воспитанник школы в Мезьере и ученик Монжа, Карно впервые выступил в печати с «Опытом о машинах вообще» (Essai sur les machines en général. Dijon, 1783). Вслед затем он представил на конкурс Берлинской академии наук 1786 г. сочинение по вопросу о математической бесконечности — первый вариант его знаменитых «Размышлений о метафизике исчисления бесконечно малых» (1797), о которых мы будем говорить ниже (см. стр. 278). В годы военно-инженерной службы в г. Аррасе Карно сблизился с М. Робеспьером и бок о бок с ним участвовал в бурных событиях Французской революции сперва в качестве члена Национального собрания, а затем Конвента и Комитета общественного спасения. За исключительные заслуги в борьбе с интервентами в 1793 г. Карно был прозван «Организатором победы». Термидорианская реакция пощадила Карно, который некоторое время продолжал играть видную политическую роль в качестве члена Директории, а затем, после двух лет изгнания, в качестве министра при Бонапарте. Открытое выступление против провозглашения империи повлекло за собой полное устранение Карно с политической сцены; только в течение Ста дней он примкнул к вернувшемуся императору для защиты Франции от новой интервенции и Бурбонов. Людовик XVIII отправил в изгнание старого республиканца, в 1791 г. голосовавшего за казнь Людовика XVI, а в 1815 г. приложившего все усилия, чтобы воспрепятствовать вторичной реставрации, и Карно умер на чужбине, в Магдебурге. Политические события отражались и на официальном положении Карно в ученом мире. Избранный в 1796 г. членом Института Франции, в организации которого на месте прежней Академии наук он деятельно участвовал, Карно был исключен из него в 1797 г., когда в результате переворота 18 фрюктидора ему пришлось бежать в Швейцарию. Любопытно, что место Карно было отдано Наполеону Бонапарту. В 1800 г. Карно был вновь избран членом Института и вторично — на этот раз окончательно — исключен по распоряжению короля. Упомянем, что сын Л. Карно Сади Карно прославился в области термодинамики.

В начале XIX в. Карно опубликовал несколько работ, сыгравших важную роль в истории проективной геометрии: «О корреляции фигур в геометрии» (De la corrélation des figures en géométrie. Paris, 1801), «Геометрия положения» (Géométrie de position. Paris, 1803) и «Опыт о трансверсалях» (Essai sur les transversales. Paris, 1806).

Под «корреляцией» (corrélation, буквально «соотношение») Карно понимает соответствие между двумя положениями фигуры, одно из которых получено из другого с помощью непрерывного преобразования; сам Карно говорил о преобразовании «нечувствительными ступенями», par degrés insensibles,— это выражение было общеупотребительным в ту эпоху. Карно находит числовые величины, характеризующие «коррелятивную систему», предельным переходом из величин, характеризующих исходную систему. Тот факт, что при «корреляции» рассматриваемые соотношения не изменяются и числовые величины переходят в их предельные значения, Карно называет «принципом корреляции», который играет у него роль принципа непрерывности. Карно различает «прямую корреляцию», когда величины, характеризующие систему, не меняют знака, «косвенную корреляцию», когда некоторые из этих величин обращаются в нуль или меняют знак, и «комплексную корреляцию», при которой некоторые из этих величин становятся чисто мнимыми. Примером последнего типа является «корреляция» между окружностью $x^2 + y^2 = a^2$ и равносторонней гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$ и между эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. «Комплексная корреляция» позволяет находить свойства гипербол по свойствам окружности или «эллипса». «Принцип корреляции» применялся Карно и в двух последних работах.

Название «Геометрия положения» является переводом лейбницевского термина geometria situs (см. т. II, стр. 127), который Карно понимал как учение о проективных свойствах фигур. Этот же термин в немецком переводе — Geometrie der Lage — позднее применялся для обозначения проективной геометрии Христианом фон Штаудтом и др.

Выше мы упоминали, что Карно был в некотором смысле противником «изолированных отрицательных чисел» (см. стр. 55), однако он широко пользовался относительными числами для характеристики «косвенных корреляций» и противоположных направлений. Карно вводит ориентированную длину отрезков, с помощью которой впервые исчерпывающим образом излагается определение знака синуса и косинуса во всех четырех

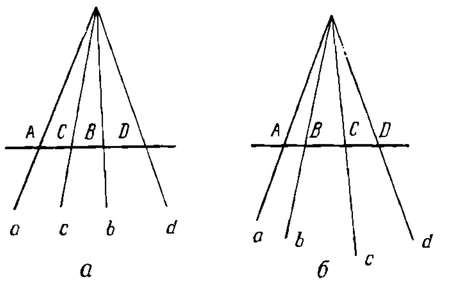



Рис. 14

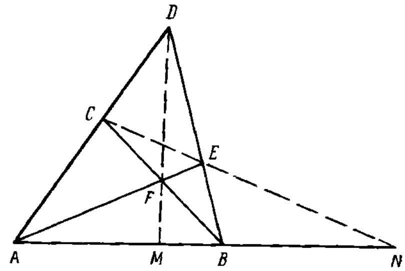



Рис. 15

квадрантах. Понятие ориентированной длины $\overline{AB}$ отрезка $AB$ позволило Карно определить в «Геометрии положения» важный проективный инвариант четырех точек, лежащих на одной прямой,— двойное отношение $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ этих точек со знаком, зависящим от того, разделяют ли (рис. 14, *а*) или не разделяют друг друга (рис. 14, *б*) две пары точек, составляющие четверку. Карно доказывает равенство двойных отношений четверок точек, в которых различные секущие — «трансверсали» пересекают четыре прямые, что и определяет проективную инвариантность этого выражения. В том случае, когда двойное отношение четырех точек равно — 1, говорят, что одна пара точек гармонически разделяет другую или что четверка точек — гармоническая, поэтому двойное отношение четырех точек, не составляющих гармоническую четверку, называют также ангармоническим отношением.

В «Опыте о трансверсалях» Карно доказывает целый ряд теорем о секущих, многие из которых принадлежат проективной геометрии. Важнейшей является теорема о полном четырехстороннике, т. е. о четырехстороннике с продолженными сторонами: две диагонали полного четырехсторонника пересекают его третью диагональ в двух точках, гармонически разделяющих вершины четырехсторонника, соединяемые этой диагональю. На рис. 15 изображен полный четырехсторонник $ABCDEF$ с диагоналями $AB$, $CE$ и $DF$ и определяемая им гармоническая четверка $ABMN$. Аналогичные теоремы для абсолютных величин двойных отношений были известны еще Паппу (см. т. I, стр. 151), однако для Паппа двойное отношение не имело знака. Сам Карно отправлялся от теоремы Менелая (см. т. I, стр. 142).

Работы Карно, возродившие классические результаты Паппа в условиях математики начала XIX в., привели к дальнейшей разработке проективной геометрии другим военным инженером и учеником Монжа Жаном Виктором Понселе (1788—1867). Понселе, участник похода Наполеона в Россию, сформулировал свои идеи о проективной геометрии в плену в Саратове. Вернувшись во Францию, он опубликовал их в «Трактате о проективных свойствах фигур» (Traité des propriétés projectives des figures. Paris, 1822). Как видно из заголовка книги, Понселе уже пользовался словом «проективный». Он впервые систематически пользовался мнимыми точками плоскости, которые называл «идеальными точками» — термин, получивший впоследствии широкое распространение в математике. Понселе, так же как и Карно, широко применял «принцип корреляции», называемый им «принципом непрерывности». С помощью этого принципа Понселе установил, что все окружности плоскости имеют две общие мнимые бесконечно удаленные «циклические точки», например теорему о том, что фокусы конического сечения можно рассматривать как точки пересечения касательных к этому сечению, проведенных из циклических точек.

Синтетические исследования по проективной геометрии были продолжены в XIX в. Мишелем Шалем, Христианом фон Штаудтом (1798—1867), Якобом Штейнером и их учениками. Значительное развитие получили в XIX в. и аналитические исследования по проективной геометрии, из которых прежде всего следует отметить работу А. Ф. Мёбиуса (1827), которому принадлежит упоминавшийся нами термин «коллинеация» для проективных преобразований, переводящих точки в точки. Мёбиус определил также другой вид проективных преобразований, при которых точки пространства переходят в плоскости, а плоскости в точки (на плоскости — точки в прямые, а прямые — в точки); частным случаем здесь является переход от точки к полярной плоскости относительно поверхности второго порядка (на плоскости—к поляре относительно кривой второго порядка). Мы упоминаем об этом потому, что эти преобразования в настоящее время называются заимствованным у Карно термином «корреляция». На основе этих исследований, в сочетании с теоретико-групповыми идеями, Ф. Клейн пришел к открытию проективной модели геометрии Лобачевского (1870) и к знаменитой «Эрлангенской программе» (1872), дающей классификацию геометрий по группам их преобразований.

## Элементарная геометрия

Значительное развитие многих геометрических дисциплин в XVIII в. привело к появлению новых теорем и в элементарной геометрии. Целый ряд таких теорем был доказан Эйлером. Так, например, Эйлер доказал ((1765), 1767), что точка $H$ пересечения высот треугольника, точка $S$ пересечения его медиан (центр тяжести) и точка $O$ пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, восставленных в их серединах (центр описанной окружности), лежат на одной прямой, причем точка $S$ лежит между точками $O$ и $H$ и $OH : SH = 1 : 2$ (рис. 16). Прямая $OSH$ в настоящее время известна под названием прямой Эйлера. Эйлер доказал свою теорему аналитически; пользуясь упомянутой выше теоремой Эйлера о центре подобия (см. стр. 168), можно дать ей и весьма простое синтетическое доказательство.

К области элементарной геометрии относятся и другие работы, о которых мы уже говорили, например по геометрии циркуля (см. стр. 196), а также работы, которые мы оставим в стороне ввиду их совершенно частного характера. Необходимо, однако, специально выделить одну важную теорему Эйлера о многогранниках, значение которой далеко выходит за пределы элементарной геометрии в обычном смысле слова. Эту теорему, наряду с другими предложениями о многогранниках, Эйлер сообщил в письме к Хр. Гольдбаху от 14 ноября 1750 г. и опубликовал, вместе с ними, в двух статьях в «Novi Commentarii» (1752—1753), 1758.

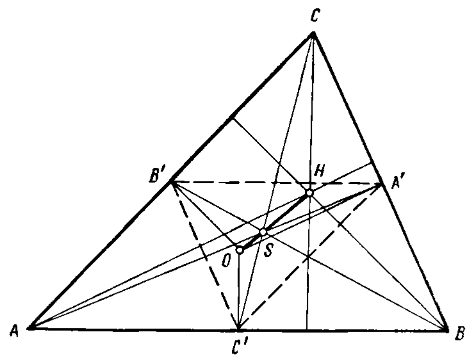



Рис. 16

Согласно теореме Эйлера, во всяком многограннике сумма числа вершин $S$ и числа граней $H$ превышает на два число ребер $A$, т. е. $S + H = A + 2$ [1]. Многогранники, рассматриваемые Эйлером, предполагаются выпуклыми. Для доказательства Эйлер удаляет грани многогранника, примыкающие к одной из его вершин, и заменяет их гранями, вершинами которых являются остальные вершины удаленных граней; полученный многогранник представляет собой выпуклую оболочку оставшихся вершин многогранника. При этом удаляются одна вершина и равное число граней и ребер, а добавляется граней на одну больше, чем ребер, так что число $S + H - A$ не изменяется. Повторяя этот процесс $S - 4$ раза, можно дойти до тетраэдра, для которого соотношение $S + H = A + 2$ легко проверяется. На рис. 17 изображен процесс преобразования куба в тетраэдр. Теорема Эйлера о многогранниках верна не только для выпуклых многогранников, но и для всех многогранников, поверхности которых находятся во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии со сферой, или, короче, гомеоморфны сфере; такие многогранники называются многогранниками нулевого рода. Теорема верна также для любых замкнутых поверхностей, гомеоморфных сфере, причем роль граней, ребер и вершин в этом случае играют соответственно области этой поверхности, гомеоморфные кругу, дуги общих границ пар этих областей и точки, одновременно принадлежащие к границам трех и более областей. В такой форме эта теорема является одной из важнейших в современной топологии поверхностей, изучающей поверхности с точностью до гомеоморфизма.

---

[1] Это соотношение знал около 1620 г. еще Декарт, а, по бумагам последнего, и Лейбниц. Затем оно, по-видимому, было надолго забыто.

Условия, при которых верна теорема Эйлера, были позднее выяснены женевским профессором математики Симоном Люилье (1750—1840). В «Ann. math. pures et appliquées» (1812—1813) Люилье доказал, что теорема справедлива только для многогранников нулевого рода и что для многогранников с $p$ сквозными отверстиями («многогранников $p$-го рода») имеет место более общее соотношение

$$S + H - A = 2 - 2p.$$

Обобщение Люилье также верно не только для многогранников, но и для

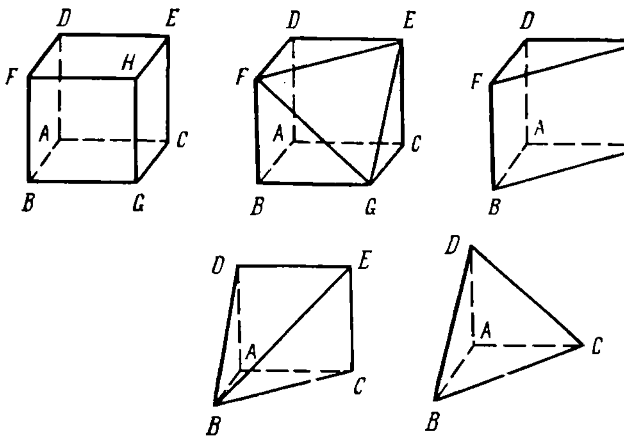



Рис. 17

любых поверхностей, гомеоморфных поверхностям многогранников $p$-го рода.

Число $S + H - A$, рассматривавшееся Эйлером для выпуклых многогранников, в настоящее время называют эйлеровой характеристикой многогранника или поверхности. Эйлерова характеристика и род поверхности являются основными топологическими характеристиками замкнутых двусторонних поверхностей.

В тех же работах о многогранниках Эйлер доказал, что для существования многогранника (предполагаемого выпуклым) с $S$ вершинами, $A$ ребрами и $H$ гранями, помимо условия $S + H = A + 2$, необходимо выполнение неравенств $3S \leqslant 2A$ и $3H \leqslant 2A$. Как показал в начале XX в. Эрнст Штейниц, эти условия и достаточны для существования выпуклых многогранников. Здесь же Эйлер доказал, что не существует многогранника (также предполагаемого выпуклым), у которого каждая грань имела бы более пяти сторон или в каждой вершине сходилось бы более пяти граней.

Эйлер нашел также формулы для объема тетраэдра по его ребрам и по трем ребрам, примыкающим к одной вершине, и углам между ними, являющиеся пространственными аналогами теоремы Архимеда — Герона, выражающей площадь треугольника через его стороны, и известной формулы, выражающей площадь треугольника через две его стороны и угол между ними. Если в тетраэдре $ABCD$ ребра $AB = a$, $AC = b$, $BC =$

$= c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$, то первая формула Эйлера может быть записана в виде

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{a^2f^2P + b^2c^2Q + c^2d^2R - a^2b^2c^2 - a^2d^2e^2 - b^2d^2f^2 - c^2e^2f^2},$$

где

$$P = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a^2 - f^2, \qquad Q = a^2 + c^2 + d^2 + f^2 - b^2 - e^2,$$
$$R = a^2 + b^2 + e^2 + f^2 - c^2 - d^2,$$

а если примыкающие к вершине $A$ углы $BAC = p$, $BAD = q$, $CAD = r$, то вторая формула Эйлера может быть переписана в виде

$$V = \frac{1}{6}\, abd\sqrt{1 - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r - 12\cos p \cos q \cos r}$$

или

$$V = \frac{1}{3}\, abd\sqrt{\sin\frac{p+q+r}{2}\sin\frac{p+q-r}{2}\sin\frac{p+r-q}{2}\sin\frac{q+r-p}{2}}.$$

Отметим еще работы Н. Фуса по «проблеме замыкания». Прежде всего он занялся задачей о четырехсторонниках, около которых можно описать и в которые можно вписать круги (Nova Acta, (1792) 1797); вскоре он обобщил задачу на некоторые виды многоугольников с числом сторон, большим четырех (Nova Acta, (1795—1796) 1802). Впоследствии задачей об условиях того, что многоугольник, образованный хордами круга, являющимися одновременно касательными к находящемуся внутри него другого круга, является замкнутым, занялся Я. Штейнер (1827), а полное решение проблемы замыкания для круга дал с помощью эллиптических функций К. Г. Якоби (1828). Понселе в своем трактате по проективной геометрии (1822) распространил эту проблему на конические сечения.

К элементарной геометрии относится еще теория параллельных, о развитии которой в XVIII в. мы расскажем отдельно в конце настоящей главы.

## Элементы топологии у Эйлера

Значение теоремы Эйлера о многогранниках для топологии было выяснено только в XIX в., а для самого Эйлера и его современников эта теорема была элементарно-геометрической. В другом случае Эйлер сознательно поставил вопрос о топологических свойствах фигур. Мы имеем в виду его «Решение задачи, относящейся к геометрии положения» (Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii. (1736) 1741). В этой задаче, известной под названием «задачи о семи кенигсбергских мостах», требуется выяснить возможность перехода по мостам $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$ (рис. 18) над рукавами реки Прегель, разделяющими Кенигсберг на четыре области $A$, $B$, $C$, $D$, проходя по каждому мосту только один раз. Эйлер доказал невозможность такого перехода следующим образом. Он обозначил переход по мосту из одной области в другую, ставя рядом обозначения этих двух областей, переход по двум мостам из одной области во вторую, а затем в третью, ставя рядом обозначения этих трех областей, и т. д. Поэтому переход по $n$ мостам обозначается $n + 1$ буквами и, следовательно, весь искомый переход по семи мостам — восемью буквами. Если в область ведет $m$ мостов, то при переходе по всем ним обозначение этой области должно встретиться самое меньшее $2m - 1$ раз, поэтому, так как в области $A$, $B$, $C$, $D$ ведут соответственно 5, 3, 3, 3 моста, обозначение этих областей при переходе по всем мостам должно встретиться самое меньшее соответственно 3, 2, 2, 2 раза, т. е. всего должно быть самое меньшее девять букв, в то время как однократный переход по всем мостам должен быть обозначен восемью буквами, откуда и вытекает невозможность искомого перехода. Далее Эйлер рассмотрел различные обобщения этой задачи.

Восходящее к Лейбницу выражение «геометрия положения»[1] применяли в форме géométrie de position Л. Карно и форме Geometrie der Lage

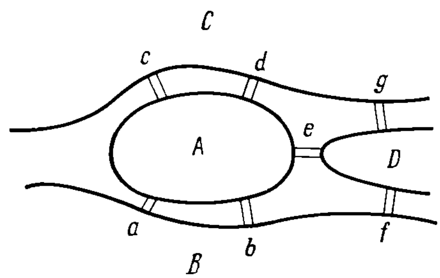



Рис. 18

фон Штаудт (см. стр. 200). Однако Карно и Штаудт имели в виду проективную геометрию, между тем как у Эйлера речь шла в сущности о топологии, так как поставленная им задача и ход ее решения не изменяются при любом взаимно непрерывном преобразовании фигуры, состоящей из берегов реки, островов и мостов через рукава реки. Г. Грассман (1844) развил идею Лейбница в другом направлении и со ссылки на нее начал свое «Учение о протяжении» (1844), в котором ввел многомерные пространства. На Лейбница ссылался и один из основоположников топологии И. Б. Листинг (1848), и сам общепринятый ныне термин топология, введенный Листингом, означает по-гречески «учение о положении» (τόπος — место, положение). Основатель топологии поверхностей Б. Риман, введший в 1857 г. понятие рода поверхности и выяснивший тем самым топологический смысл «характеристики Эйлера», пользовался другим лейбницевским термином analysis situs — «анализ положения», который воспринял и основатель многомерной комбинаторной топологии Анри Пуанкаре (1895).

### Плоская тригонометрия и полигонометрия

Ряд новых приемов решения треугольников был дан еще во «Всеобщей арифметике» Ньютона (опубл. 1707). Так, например, в десяти задачах геометрического отдела стороны $AC$ и $BC$ треугольника определяются по данному основанию $AB = a$, полусумме сторон $AC + BC = 2b$ и углу $C$ (рис. 19) следующим образом: обозначая косинус $C$ через $d/e$, Ньютон находит, что полуразность $x$ искомых сторон равна

$$x = \sqrt{\frac{da^2 + 2eb^2 - 2db^2}{2d + 2e}}.$$

[1] Сам Лейбниц писал об анализе положения (analysis situs) и характеристике положения (characteristica situs). Ср. т. II, стр. 127.

Ньютон предлагает и другой способ: он проводит биссектрису $CE$ угла $C$, пересекающую основание в точке $E$, и находит, что

$$\frac{AB}{AC+BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{\sin ACE}{\sin CEA},$$

а затем, вычтя из угла $AEC$ и его дополнения половину угла $C$, получает углы $ABC$ и $CAB$, которые позволяют определить стороны $AB$ и $AC$ по теореме синусов. Написанное только что равенство фактически представ-

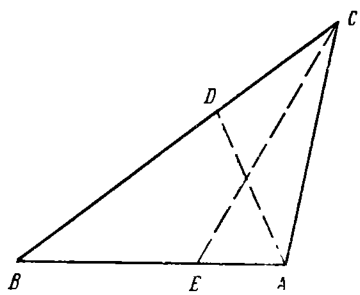



Рис. 19

ляет собою одну из так называемых формул Карла Молльвейде (1774—1825)

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

которую только что названный немецкий астроном опубликовал в 1808 г. вместе с другой формулой

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Основное значение имело, однако, не открытие некоторых новых формул, но радикальная перестройка всей системы тригонометрии па алгебраическо-аналитической основе и переход к современной трактовке тригонометрических функций. Ко все более широкому применению алгебры постепенно подходили многие и одним из первых чешский математик Яков Креза (1648—1715), книга которого «Видовой анализ тригонометрии» (Analysis speciosa Trigonometriae. Pragae, 1720) была напечатана посмертно. Впрочем, символика Креза была мало удобной: он стремился применять почти только линии синусов, так что, например, записывал теорему о синусе суммы двух дуг в виде

$$s=\frac{y\sqrt{r^2-x^2}+x\sqrt{r^2-y^2}}{r},$$

где $r$ — радиус тригонометрического круга.

Заслуживающий внимания вклад в аналитическую трактовку тригонометрии внес петербургский академик, питомец Тюбингенского университета Фридрих Христофор Майер (1697—1729). В I—V томах «Записок» Петербургской академии Майер опубликовал 14 статей по астрономии и математике, главным образом по тригонометрии ((1727) 1729, (1729) 1735, (1730—1731) 1738). Стремясь упростить символику этой науки, он обозначал тригонометрические линии первыми буквами их наименований; впрочем, он не указывал аргумента и, например, записывал синус суммы двух дуг в виде $\frac{Sc+Cs}{r}$, где прописная буква употреблялась для функций большего угла, а $r$ — радиус круга. Эти обозначения, при большем числе углов пополнявшиеся новыми буквами, применяли и некоторые другие математики. Майер, далее, расширил аналитическое изложение тригонометрии, большинство формул которой выводилось тогда каждая по отдельности на основе специального геометрического построения. Он отчетливо понимал значение аналитического построения тригонометрии и утверждал, например, что из теоремы косинусов сферической тригонометрии можно вывести все формулы для прямоугольного и косоугольного сферических треугольников. Майеру принадлежит также несколько новых формул, удобных для приведения к логарифмическому виду. В вопросе о знаках тригонометрических линий углов, больших прямого, Майер, как и многие его предшественники и современники, допускал неясности и ошибки, считая синус и тангенс тупого угла положительными, а косинус и котангенс отрицательными. К счастью, это не отражалось на его выводах, в которых он ограничивался областью острых углов.

Последователем Майера был Фридрих Вильгельм фон Оппель (1720—1769), который в «Анализе треугольников» (Analysis triangulorum. Dresdae — Lipsiae, 1746) дал аналитическое изложение плоской сферической тригонометрии на основе небольшого числа предложений, доказанных геометрически. Здесь выведен целый ряд новых соотношений, например, обе формулы Молльвейде (на основе теоремы тангенсов, установленной геометрическим путем) или же формула

$$\frac{b+a}{p-q}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}},$$

где $p$, $q$ — отрезки, на которые сторона $c$ делится опущенной на нее высотой.

Оппель стремился также построить систему сферической тригонометрии, взяв в качестве отправных геометрически доказанные теоремы синусов и косинусов.

Обе формулы Молльвейде и только что приведенную формулу Оппеля независимо установил Томас Симпсон в «Плоской и сферической тригонометрии» (Trigonometry plane and spherical. Woolwich, 1748). Применяя более близкую к нашей символику (вроде sin., co.sin., tang.), Симпсон, однако, предпочитал геометрические доказательства.

Новый этап в развитии тригонометрии начинается с первого тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлера, который впервые внес полную ясность в вопрос о знаках всех тригонометрических функций любого аргумента, ввел почти не отличавшуюся от современной тригонометрическую символику (sin. $z$ или sin. $A.z$, где $A$. означает arcus, дугу; cos. $z$ или cos. $A.z$, tang. $z$, cot. $z$ и т. д.) и построил аналитическую теорию тригонометрических и круговых функций. Об этом будет еще сказано в седьмой главе, и здесь мы ограничимся напоминанием об установлении связи между тригонометрическими по показательными функциями с помощью «формул Эйлера» (см. стр. 324). Поэтому если предшественники Эйлера понимали под синусом, косинусом, тангенсом и т. д. тригонометрические линии в круге некоторого радиуса, именовавшегося «полным синусом» (sinus totus), то теперь под $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ... стали понимать аналитические функции действительного и комплексного переменного. Ниже мы познакомимся с важным вкладом Эйлера в сферическую тригонометрию.

Название «тригонометрические функции» впервые употребил в своей превосходной «Аналитической тригонометрии» (Analytische Trigonometrie. Braunschweig 1770) профессор в Гельмштадте и в Галле Георг Симон Клюгель (1739—1812); он же первый явно определил эти функции как отношения сторон треугольника, что, впрочем, имел в виду еще ранее Эйлер, к которому Клюгель примыкал в символике. Теорему о синусе суммы он выводил из формулы

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

получаемой непосредственно из треугольника $ABC$.

Оригинальное изложение тригонометрии было дано И. Г. Ламбертом в первом томе «Очерков об употреблении математики и ее приложений» (1765). Во втором томе того же сочинения (1770) была основана тетрагонометрия — обобщение тригонометрии на четырехугольники. Дальнейшее обобщение тригонометрии на произвольные многоугольники — так называемая полигонометрия (полигон — многоугольник) принадлежит А. И. Лекселю. В работе «О решении прямолинейных многоугольников» (De resolutione polygonorum rectilineorum. Novi Commentarii, (1774) 1775. (1775) 1776) Лексель нашел, что стороны $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n$-угольника и углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ между продолжениями сторон и предыдущими сторонами связаны соотношениями:

$$a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + a_n \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) = 0,$$
$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + a_n \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) = 0,$$

равносильными равенству нулю суммы векторов, направленных по сторонам многоугольника. Эти формулы сохраняют силу и для невыпуклых и самопересекающихся многоугольников. Из этих формул Лексель вывел главные формулы тригонометрии и тетрагонометрии, демонстрируя при этом ряд весьма простых способов решения задач, а затем распространил теорию на 5, 6 и 7-угольники. Лексель изучил и вопрос о решении $n$-угольников по данным диагоналям и их углам со сторонами, указав общие правила решения, а также принципы классификации задач.

Результаты Лекселя были существенно дополнены С. Люилье в книге «Полигонометрия или об измерении прямолинейных фигур» (Polygonométrie ou de la mesure des figures rectilignes. Genève, 1789). Основную роль в исследовании Люилье играло выражение для площади многоугольника, которое он вычислял $n$ способами: откинув одну из $n$ сторон, он составлял все парные произведения остальных $n - 1$ сторон на синусы углов между этими сторонами и складывая полученные $(n - 1)(n - 2)/2$ произведения, он нашел удвоенную площадь многоугольника. Исходя из этой формулы, Люилье получил все формулы полигонометрии, в том числе и формулы Лекселя. Свои теоремы Люилье применил к решению $n$-угольника по $n$ — 1 стороне и $n$ — 2 углам, по всем углам и $n$ — 2 сторонам и по всем сторонам и $n$ — 3 углам. Люилье обобщил эти результаты на пространственные многоугольники и, развивая работы Эйлера о многогранниках, создал «полиэдрометрию» — учение об измерении многогранников (полиэдров) в работе «Теоремы полиэдрометрии» (Théorèmes de Polyédrométrie. Mém. Inst. Paris, 1805, поступило в 1799) и упомянутом выше мемуаре (см. стр. 208). В первой из этих работ Люилье установил основную теорему полиэдрометрии: площадь каждой грани многоугольника равна сумме произведений площадей остальных граней на косинусы углов, образуемых ими с первой гранью (впрочем, он не сформулировал условий, необходимых для справедливости этой теоремы). Приведенная теорема равносильна равенству нулю суммы векторов, направленных перпендикулярно граням многогранника и равных по модулю площади этих граней.

## Сферическая тригонометрия и геометрия

Математики XVIII в. внесли существенный вклад и в сферическую тригонометрию. Уже встречавшийся нам югославский ученый Р. И. Бошкович в «Построении сферической тригонометрии» (Trigonometriae sphaericae constructio. Romae, 1737) дал значительно упрощенное, по сравнению с прежними, графическое решение всех шести задач сферической тригонометрии по определению элементов сферического треугольника по трем его элементам. Значительные усовершенствования в сферическую тригонометрию были внесены в упоминавшихся курсах Ф. Оппеля, Т. Симпсона и И. Г. Ламберта. Особенно успешно и много занимались сферической тригонометрией и геометрией Эйлер и его ученики.

В «Основаниях сферической тригонометрии, выведенных из метода максимумов и минимумов» (Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Mém. Ac. Berlin., (1753) 1755) Эйлер дал построение сферической тригонометрии исходя из того, что стороны сферических треугольников являются геодезическими на сфере. Здесь было впервые систематически введено обозначение углов треугольника $A$, $B$, $C$, а противолежащих им сторон $a$, $b$, $c$. Вслед за этой работой Эйлер опубликовал «Начала сфероидальной тригонометрии, выведенные по методу максимумов и минимумов» (Éléments de la trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Mém. Ac. Berlin, (1753) 1755), посвященные тригонометрии сплющенного эллипсоида вращения, форму которого, как было обнаружено лапландской экспедицией Мопертюи и теоретическими исследованиями Клеро (см. стр. 160), имеет поверхность Земли.

Во «Всеобщей сферической тригонометрии, кратко и ясно выведенной из первых оснований» (Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata. Acta, (1779) 1782), Эйлер развил сферическую тригонометрию, исходя из трехгранного угла, который он пересекал различными плоскостями, применяя затем к полученным плоским треугольникам формулы плоскости тригонометрии. Эта работа была первым полным изложением всей системы сферической тригонометрии.

Новый вид, приданный Эйлером как плоской, так и сферической тригонометрии к концу XVIII в., вошел в учебники. Из этих учебников следует отметить прежде всего написанную племянником М. В. Ломоносова и учеником Эйлера академиком М. Е. Головиным (1756—1790) «Плоскую и сферическую тригонометрию с алгебраическими доказательствами» (Петербург, 1789). Очень хорошее изложение тригонометрии имелось также в «Началах геометрии» (Éléments de géométrie. Éd. 1. Paris, 1794) А. М. Лежандра.

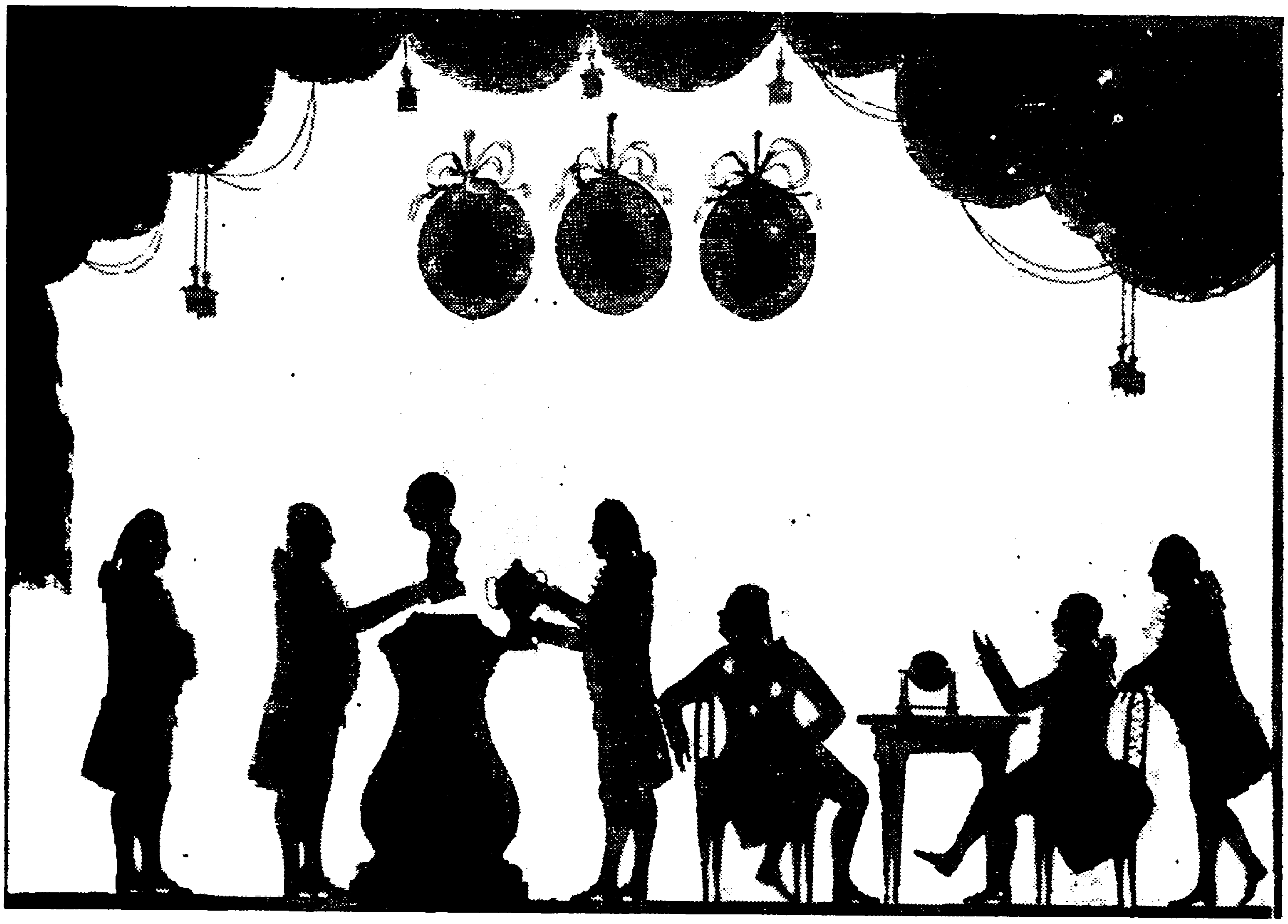
Вслед за Эйлером сферической тригонометрией занялись не только М. Е. Головин, но и другие петербургские математики — А. И. Лексель, а затем Н. И. Фусс и Ф. И. Шуберт. Эти исследования были самым тесным образом связаны с их же исследованиями по сферической геометрии, и мы рассмотрим их совместно.

Андрей Иванович (Андерс Иоганн) Лексель, уроженец Або (ныне Турку, Финляндия), с 1766 г. преподавал в университете родного города и затем в морском училище в Упсале (Швеция), а в 1769 г. был по совету Эйлера приглашен в Петербургскую академию. Исследования Лекселя по математике, вообще примыкавшие к тематике Эйлера, относятся к нескольким областям: интегрированию функций, в частности эллиптических интегралов и дифференциальных уравнений, тригонометрии и тетрагонометрии, сферической геометрии, и его имя нам еще встретится в дальнейшем. Лексель занимался также механикой и особенно астрономией, с 1771 г. он состоял в академии профессором астрономии. На основании наблюдений прохождения Венеры по диску Солнца в 1769 г. он произвел весьма точное для того времени определение одной из основных астрономических постоянных, служащих при измерении расстояний во Вселенной,— солнечного параллакса (1772), доказал периодичность носящей его имя кометы (1770), а через несколько месяцев, после того, как 13 марта 1781 г. Гершель обнаружил около созвездия Близнецов движущуюся звездочку, он установил, что это не комета, как думал сначала знаменитый наблюдатель, а новая планета, которую вскоре назвали Ураном. Лексель оказал Эйлеру большую помощь при подготовке труда по новой теории движения Луны (1772).

Начав публикацию своих работ по сферической геометрии со статьи о сферических эпициклоидах (Acta, (1779 : I) 1782), которые изучал еще Я. Герман (см. стр. 154), Лексель перешел к рассмотрению различных свойств сферических треугольников.

В «Решении одной задачи сферической геометрии» (Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum. Acta (1781 : I) 1784) Лексель доказал, что геометрическим местом вершин сферических треугольников с общим основанием и равной площадью являются дуги двух малых кругов, концами которых служат точки, диаметрально противоположные двум концам основания. Лексель дал и аналитическое (тригонометрическое) и синтетическое решение этой задачи. Другие доказательства теоремы Лекселя принадлежат Эйлеру (1778, опубл. Nova Acta, (1792) 1798), А. М. Лежандру (1794) и Я. Штейнеру (1837). Статья Эйлера была представлена зимой 1778 г., а том, в котором появилась теорема Лекселя, датирован 1781 г., но Эйлер сам указывал, что теорему нашел Лексель.

Исследованию свойств малых кругов на шаре и связанных с ним треугольников и четырехугольников Лексель посвятил еще две статьи. В «Acta», (1782 : I) 1786, среди многих других новых предложений особенно интересны следующие две теоремы: 1) в сферическом четырехугольнике, вписанном в малый круг, сумма двух противоположных углов равна сумме двух других углов и 2) в четырехугольнике, описанном около малого круга, сумма двух противоположных сторон равна сумме двух других сторон. Первое предложение является аналогом соответствующей пло-



А. И. Лексель, И. А. Эйлер (слева) и Н. И. Фусс (справа) устанавливают бюст Л. Эйлера работы Д. Рашетта (1784) в Петербургской академии наук; далее сидят И. И. Лепехин и П. С. Паллас и стоит В. Л. Крафт (силуэты работы Ф. Антинга, 1780-е годы. Архив АН СССР, Ленинград)

ской теоремы, а вторая — «двойственна» первой, т. е. получается из нее переходом к полярному треугольнику. Далее, в сферическом четырехугольнике, вписанном в малый круг, произведение синусов половин его диагоналей равно сумме произведений синусов половин противоположных углов этого четырехугольника; это — аналог известной теоремы Птолемея о диагоналях и сторонах вписанного в круг плоского четырехугольника.

Все доказательства в этой статье — тригонометрические, и сама сферическая тригонометрия получила в ней дальнейшее развитие. Лексель показал, что произведения синусов сторон сферического треугольника и соответствующих высот

$$\sin a \cdot \sin h_a = \sin b \cdot \sin h_b = \sin c \cdot \sin h_c$$

равны

$$d = 2\sqrt{\sin s \cdot \sin (s - a) \cdot \sin (s - b) \cdot \sin (s - c)},$$

где $s = (a + b + c)/2$ — полусумма сторон треугольника, а произведения синусов углов сферического треугольника и соответствующих высот

$$\sin A \, \sin h_a = \sin B \, \sin h_b = \sin C \, \sin h_c$$

равны

$$\delta = 2\sqrt{-\cos S \, \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)},$$

где $S = (A + B + C)/2$ — полусумма углов треугольника. Это дало ему следующие выражения для радиусов $R$ и $r$ кругов, описанных около сферического треугольника и соответственно вписанного в него:

$$\operatorname{tg} R = \frac{4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{d} = \frac{2 \cos S}{\delta},$$

$$\operatorname{ctg} r = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\delta} = \frac{2 \sin s}{d}.$$

Величина $d$ в настоящее время называется амплитудой сферического треугольника или синусом трехгранного угла с вершиной в центре сферы, высекающего из сферы данный сферический треугольник, а величина $\delta$ — коамплитудой сферического треугольника. В этом же мемуаре Лексель доказал соотношения:

$$\sin A = \frac{d}{\sin b \sin C}, \quad \sin B = \frac{d}{\sin c \sin a}, \quad \sin C = \frac{d}{\sin a \sin b},$$

$$\sin a = \frac{\delta}{\sin B \sin C}, \quad \sin b = \frac{\delta}{\sin C \sin A}, \quad \sin c = \frac{\delta}{\sin A \sin B},$$

называемые в настоящее время формулами Лекселя, а также формулы:

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\sin \frac{s-a}{2} \sin \frac{s-b}{2} \sin \frac{s-c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

$$\cos^2 \varepsilon = \frac{\cos \frac{s}{2} \cos \frac{s-a}{2} \cos \frac{s-b}{2} \cos \frac{s-c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

где $\varepsilon$ — сферический избыток треугольника. Из двух последних формул можно сразу получить формулу Люилье

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}},$$

на принадлежность которой Люилье указал А. М. Лежандр в своих «Началах геометрии» (1794). Формула Люилье является частным случаем (при $d = 0$) доказанной в той же работе Лекселя формулы

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2} \operatorname{tg} \frac{s-d}{2}}$$

для сферического избытка $\varepsilon$ сферического четырехугольника, вписанного в малый круг, где $s = {}^1/_2 (a + b + c + d)$ — полусумма сторон четырехугольника. Сферические избытки сферических треугольников и четырехугольников пропорциональны их площадям, так что формула Люилье для сферического треугольника и формула Лекселя для сферического четырехугольника являются аналогами теоремы Архимеда — Герона для плоского треугольника и теоремы Брахмагупты для плоского четырехугольника, вписанного в круг (см. т. I, стр. 197).

В «Доказательстве некоторых теорем сферической геометрии» (Demonstratio nonnullorum theorematum ex doctrina sphaerica. Acta, (1782) 1786) Лексель доказал, что если продолжить стороны вписанного в малый круг сферического треугольника $ABC$ до их пересечения с дугами больших кругов, касательных к кругу в точках $A$, $B$, $C$, то точки пересечения $P$, $Q$, $R$ обязательно лежат на одном большом круге; для этой теоремы также имеется аналогичная теорема в планиметрии.

Вслед за Лекселем сферикой занялись Н. И. Фусс и Ф. И. Шуберт.

Николай Иванович Фусс (1755—1825), уроженец Базеля, был рекомендован своим учителем Д. Бернулли Эйлеру в качестве секретаря и приехал в Петербург в 1772 г. Под диктовку почти полностью ослепшего к этому времени Эйлера Фусс готовил к печати многие его работы и проделывал необходимые выкладки. Как ученый Фусс стал как бы малым спутником Эйлера и почти все сто с лишним работ, опубликованных им по вопросам математики. механики и физики, так или иначе примыкают к эйлеровской тематике. Сразу после смерти Эйлера Фусс написал «Похвальное слово господину Эйлеру» (Eloge de Monsieur Euler. St.-Pétersbourg, 1783), представляющее собой весьма ценный очерк жизни и творчества великого ученого. Несколько десятков лет Фусс редактировал и издавал сочинения своего учителя, не опубликованные при его жизни. С семьей Эйлера Фусс породнился, женившись на одной из его внучек. Когда в 1800 г. скончался сын Эйлера И. А. Эйлер, бывший непременным секретарем Петербургской академии наук с 1769 г., Фусс занял его место. Фусс преподавал математику в сухопутном и морском кадетных корпусах и в качестве члена Главного управления училищ принял в начале XIX в. деятельное участие в реформе системы народного образования. Он был автором нескольких учебников для военных школ и гимназий. Н. И. Фусс писал по многим вопросам алгебры, интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, страхового дела и т. д., но наибольший интерес имеют его работы по дифференциальной геометрии (см. стр. 187) и по сферике.

Федор Иванович (Фридрих Теодор) Шуберт (1758—1825), уроженец Гельмштедта, первоначально работал домашним учителем, а затем уездным ревизором в Хапсалу (в нынешней Эстонии) и занимался вопросами геометрии и астрономии. В 1785 г. он был приглашен в Петербургскую академию, где в 1786 г. стал академиком, а с 1803 г. руководил академической обсерваторией. Мы уже упоминали статью Шуберта о стереографической проекции сфероида. Добавим, что в одной более поздней статье о точках возврата плоской кривой (1818, опубл. 1822) Шуберт впервые указал, что точки возврата кривой должны удовлетворять системе уравнений:

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

и рассмотрел различные возможные случаи такой особой точки, кроме самоприкосновения.

В статье, представленной в 1786 г., «Решение некоторых сферических задач» (Problematum quorundam sphaericorum solutio. Nova Acta, (1784) 1787) Фусс решил задачи на построение сферических треугольников с данным основанием, у которых вершина лежит на данном большом круге, причем выполнено одно из следующих трех экстремальных условий: 1) угол при вершине максимален (дело сводится к решению некоторого кубического уравнения с одним действительным корнем); 2) сумма сторон при вершине минимальная; 3) площадь максимальна. Вторая и третья из этих задач решалась Фуссом с помощью сдвига вершины по данному большому кругу. Экстремальными задачами на сфере занимался также А. М. Лежандр в «Началах геометрии» (1794).

Вторая из названных задач привела Фусса к рассмотрению геометрического места точек сферы, сумма сферических расстояний которых от двух данных точек сферы постоянна. Такое геометрическое место по аналогии с обычным эллипсом Фусс назвал «сферическим эллипсом» и рассмотрел в представленной им в 1787 г. работе «О некоторых свойствах эллипсов,

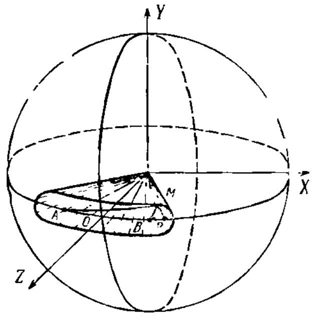



Рис. 20

описанных на поверхности сферы» (De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae. Nova Acta, (1785) 1788). В том случае, когда сферическое расстояние между фокусами $A$, $B$ сферического эллипса равно $2a$, а сумма расстояний произвольной точки эллипса от его фокусов равна $2c$, Фусс записал уравнение сферического эллипса в сферических координатах, т. е. долготе и широте, которые он для большей аналогии с плоскостью обозначал $x$ и $y$, считая, что экватор проходит через фокусы эллипса, а первый меридиан — через середину дуги $AB$, в виде

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{(\sin^2 c - \sin^2 a)(\sin^2 c - \sin^2 x)}}{\sin c \cos c}.$$

Эту формулу нетрудно вывести, если обозначить точку со сферическими координатами $x$, $y$ через $M$ и найти ее сферические фокальные радиус-векторы $AM$ и $BM$. Эти радиус-векторы являются гипотенузами прямоугольных сферических треугольников $APM$ и $BPM$, катеты которых равны $AP = a + x$, $BP = x - a$, $PM = y$ (рис. 20). Тогда в силу «сферической теоремы Пифагора»:

$$\cos AM = \cos (a + x) \cos y, \qquad \cos BM = \cos (x - a) \cos y.$$

Но, с другой стороны, по определению сферического эллипса $AM + BM = 2c$, т. е. $\cos AM \cos BM - \sin AM \sin BM = \cos 2c$. При подстановке в последнее равенство выражения $\cos AM$, $\cos BM$, $\sin AM$ и $\sin BM$ через косинусы дуг $a + x$, $x - a$ и $y$ получается уравнение Фусса. Если положить радиус сферы равным единице и отнести ее точки к прямоугольным координатам $X$, $Y$, $Z$, связанным со сферическими координатами $x$, $y$

соотношениями:

$$X = \sin x \cos y, \quad Y = \sin y, \quad Z = \cos x \cos y$$

(см. тот же рисунок), то

$$\operatorname{tg} y = \frac{Y}{\sqrt{1-Y^2}} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Z^2}}, \qquad \sin x = \frac{X}{\sqrt{1-Y^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Z^2}}.$$

И если мы введем обозначения $\sin a = A$, $\sin c = C$, то уравнение Фусса можно переписать в виде

$$(C^2 - A^2) X^2 + C^2 Y^2 - \frac{C^2}{1-C^2} Z^2 = 0,$$

откуда вытекает, что сферический эллипс является линией пересечения сферы с конусом второго порядка с вершиной в центре сферы.

Вместе с упоминавшейся нами работой Шуберта о стереографической проекции сфероида (см. стр. 171) была напечатана его статья о свойствах локсодромы, т. е. кривой на сфере, пересекающей все ее меридианы под постоянным углом (Nova Acta, (1786) 1789). Отметим также его «Задачи сферической теории» (Problemata ex doctrina sphaerica. Nova Acta, (1794) 1801), где, в частности, доказано, что геометрическое место точек сферы, отношение синусов сферических расстояний которых от двух данных точек постоянно, является кривой, ортогональная проекция которой на диаметральную плоскость, проходящую через данные точки, является гиперболой. Шуберт показал, что эта кривая также высекается из сферы конусом второго порядка с вершиной в центре сферы. В том же томе «Nova Acta» Шуберт предложил довольно громоздкое изложение системы сферической тригонометрии на основе теорем Менелая о трансверсалях.

Развитие сферики не остановилось на работах Эйлера и его петербургских учеников, оно было продолжено в XIX в. Я. Штейнером, Х. Гудерманом. М. Шалем и другими геометрами.

## Теория параллельных линий

Мы уже говорили о многочисленных попытках доказать V постулат Евклида, существенно содействовавших развитию теории параллельных линий в средние века и в XVII в. Эти попытки продолжались и в XVIII в., причем были установлены многие новые замечательные результаты, подготовлявшие открытие неевклидовой геометрии. Одно из важнейших исследований произвел итальянский монах Джироламо Саккери (1667—1733), преподаватель математики и грамматики в иезуитских колледжах Милана, Турина и Павии и автор нескольких сочинений по теологии, логике и математике. Основной математический труд Саккери называется «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить самые первые начала всей геометрии» (Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Mediolani, 1733). Саккери подверг критике доказательства V постулата Валлиса и ат-Туси (см. т. I, стр. 234; т. II, стр. 129). В своей собственной попытке доказательства этого постулата, который он считал одним из самых темных «пятен» Евклида, Саккери рассматривал тот же четырехугольник, что и Хайям и ат-Туси, т. е. четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами, и выдвинул те же три гипотезы о его верхних углах — гипотезу острого, прямого и тупого углов (рис. 21). Хотя у Валлиса было приведено не то доказательство ат-Туси из его «Изложения Евклида» в 15 книгах, где из указанных трех гипотез выводилось большое число интересных геометрических следствий, а доказательство из «Изложения Евклида» в 13 книгах, где опровержение первых двух гипотез было произведено значительно короче, несомненно, что идея об этом четырехугольнике и трех гипотезах была заимствована Саккери у ат-Туси. Однако гипотезу тупого угла Саккери опровергал иначе, чем его предшественники.

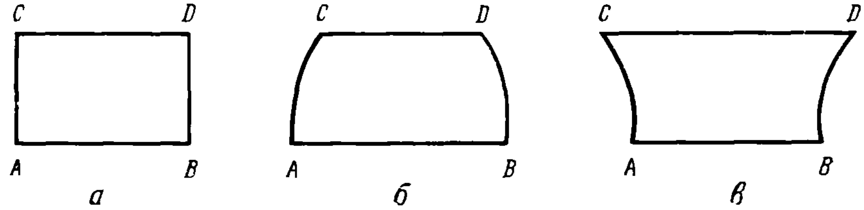



Рис. 21

Саккери показывает, что при этой гипотезе, как и при гипотезе прямого угла, имеет место V послулат Евклида: V постулат состоит в том, что две прямые на плоскости пересекаются при определенных условиях, а из гипотезы тупого угла вытекает, что две прямые на плоскости всегда пересекаются. Отсюда делается вывод, что при гипотезе тупого угла должна иметь место обычная геометрия, в которой справедлива гипотеза прямого угла, вследствие чего «гипотеза тупого угла всегда цело ложна, так как она сама себя разрушает» [1]. Смысл этого доказательства, столь же остроумного, сколь и краткого, состоит в том, что, так как из остальных аксиом геометрии Евклида при добавлении V постулата следует справедливость гипотезы прямого угла, гипотеза тупого угла, при которой выполняется V постулат, противоречит остальным аксиомам геометрии Евклида. После этого Саккери переходит к опровержению гипотезы острого угла. Он доказывает, что при этой гипотезе две прямые или пересекаются, или имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они удаляются друг от друга, или же удаляются друг от друга с одной стороны и асимптотически приближаются друг к другу с другой стороны. В последнем случае Саккери приходит к выводу, что эти прямые должны иметь общую точку и общий перпендикуляр в бесконечности. Смысл этого в том, что если опускать из точек одной из этих прямых перпендикуляры на другую, то при стремлении точки в бесконечность их длины стремятся к нулю, а углы, составляемые ими с первой прямой, стремятся к прямому углу. Однако Саккери представлял себе общую точку и общий перпендикуляр в бесконечности как обычную общую точку и общий перпендикуляр и делал отсюда неправомерный вывод, что в третьем случае две прямые касаются друг друга в бесконечности, откуда заключил, что «гипотеза

[1] *G. Saccheri.* Euklid von jedem Makel befreit. In: *F. Engel, P. Stäckel.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig, 1895, S. 100.

острого угла совершенно ложна, так как противоречит природе прямой линии» [1].

Не удовлетворившись этим доказательством, Саккери рассматривает геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от прямой; в отличие от своих предшественников Саккери знает, что эта линия, так называемая эквидистанта, в случае гипотезы острого угла не является прямой. Однако, вычисляя длину дуги эквидистанты при помощи бесконечно малых, Саккери ошибочно нашел, что длина этой дуги равна длине отрезка прямой между основаниями перпендикуляров, опущенных на нее из концов дуги, а с другой стороны, показал, что эти перпендикуляры удаляются друг от друга, так что не только длина дуги эквидистанты, но даже хорда, соединяющая концы этой дуги, должна быть длиннее указанного отрезка. Получив это противоречие, Саккери вновь объявил гипотезу острого угла опровергнутой. Саккери, получив значительно большее число следствий из гипотезы острого угла, чем его предшественники, сам того не сознавая, доказал целый ряд новых теорем геометрии Лобачевского, в которой выполняется гипотеза острого угла.

Гипотеза прямого угла, остававшаяся у Саккери после опровержения двух других гипотез, может быть также сформулирована как предположение о существовании прямоугольника. Такое предположение было положено в основу изложения теории параллельных линий в «Началах геометрии» (Éléments de géométrie. Paris, 1741) А. К. Клеро (ср. стр. 23).

Привлечению интереса математиков XVIII в. к теории параллельных линий содействовал Даламбер, который в «Очерках литературы, истории и философии» (Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie. Paris, 1759; 2e éd., Amsterdam, 1770) указывал, что теория параллельных является одной из важнейших проблем элементарной геометрии, и посвятил специально параллельным линиям статью «Параллель» (Parallèle) в «Энциклопедии» (т. II, 1765). Всего с 1759 по 1800 г. в разных странах Европы появилось 55 работ по теории параллельных. Из этих работ особо следует отметить уже упоминавшуюся (стр. 31) диссертацию Г. С. Клюгеля, ученика А. Г. Кестнера, «Обзор важнейших попыток доказательства теории параллельных линий» (1763), содержащую интересный критический разбор около 30 попыток доказательств V постулата. Доказав несостоятельность всех этих попыток, Клюгель пришел к выводу, что Евклид был прав, включив это утверждение в число постулатов.

По-видимому, под влиянием Клюгеля заинтересовался проблемой параллельных линий И. Г. Ламберт, находившийся с ним в переписке. В изданной посмертно «Теории параллельных линий» (Theorie der Parallellinien, Leipz. Mag. reine u. angew. Math., 1786) Ламберт также пытался доказать V постулат от противного, рассматривая уже не четырехугольник Хайяма, а четырехугольник Ибн ал-Хайсама, т. е. четырехугольник с тремя прямыми углами, и выдвигал те же три гипотезы о четвертом угле этого четырехугольника (рис. 22)[2]. Гипотезу тупого угла Ламберт опровергает, показывая, что при ее допущении два перпендикуляра к одной прямой пересекаются, что противоречит остальным аксиомам геометрии Евклида. Ламберт, по-видимому, первый заметил, что гипотеза тупого

[1] *G. Saccheri.* Euklid von jedem Makel befreit. In: *F. Engel, P. Stäckel.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig, 1895, S. 105.

[2] Эта работа была написана Ламбертом еще в 1766 г., но он ее не опубликовал, так не был ею вполне доволен.

угла имеет место на сфере, если в качестве прямых рассматривать ее большие круги.

Переходя к гипотезе острого угла, Ламберт выводил из нее еще больше предложений геометрии Лобачевского, чем Саккери. В частности, он находит, что сумма углов треугольника при гипотезе острого угла меньше двух прямых и, если сумма углов $A$, $B$, $C$ треугольника $ABC$ равна $2d - \delta$, площадь треугольника $ABC$ пропорциональна $\delta$. Ламберт сравнил этот вывод с тем, что в сферической геометрии сумма углов сферического треугольника больше двух прямых и что площадь сферического треугольника равна $\varepsilon r^2$, где $r$ — радиус сферы, а $\varepsilon$ — избыток указанной суммы над

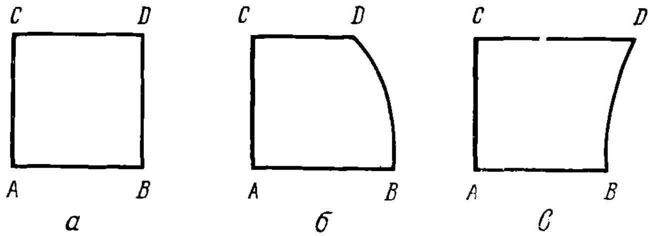



Рис. 22

двумя прямыми углами. «Мне кажется очень замечательным,— заметил Ламберт,— что вторая гипотеза оправдывается, если вместо плоских треугольников взять сферические. Я из этого почти должен был бы сделать вывод — заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере. Во всяком случае, должна же существовать причина, почему она на плоскости далеко не так легко поддается опровержению, как это могло быть сделано в отношении второй гипотезы» [1].

Ламберт не нашел противоречия в гипотезе острого угла и пришел к заключению, что все попытки доказать V постулат не привели к успеху; тем не менее он остался уверен в невозможности геометрии, возникающей при гипотезе острого угла.

Остроумная попытка доказательства V постулата, основанная на операциях с бесконечно большими величинами, была предпринята учеником Эйлера швейцарским математиком Луи Бертраном (1731—1812) во втором томе его «Нового изложения элементарной части математики» (Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genève, 1778), переизданном впоследствии под названием «Начала геометрии» (Éléments de géométrie. Paris, 1812). Доказательство Бертрана было помещено в обоих изданиях этой книги. Это доказательство состоит в следующем: пусть прямые $LC$ и $KA$ (рис. 23) составляют с прямой $KL$ внутренние углы $AKL$ и $CLK$, сумма которых меньше двух прямых. Тогда существует прямая $LM$, образующая с $LC$ такой угол $CLM$, что сумма трех углов $AKL$, $CLK$ и $CLM$ равна двум прямым. Следовательно, если бы прямая $LC$ не пересекала бы прямой $KA$, угол $MLC$ заключался бы внутри полосы $MLKA$. Но эта полоса содержится в плоскости «бесконечное число раз», в то время как угол $MLC$ содержится в ней лишь столько раз, сколько дуга $MC$ содержится в окружности, описанной из центра $L$ радиусом $LM$. Отсюда Бертран делал вывод, что угол $MLC$ не может заключаться

[1] *J. H. Lambert.* Theorie der Parallellinien. In: *F. Engel, P. Stäckel.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, S. 202—203.

целиком внутри полосы $MLKA$, так что его сторона $LC$ выходит из этой полосы и пересекает $KA$.

На самом деле ни вся плоскость, ни ее часть, заключенная между сторонами угла, не могут рассматриваться как определенные величины, допускающие количественное сравнение, и так как каждый угол на плоскости может быть бесконечно много раз помещен внутри себя, то, рассуждая, как Бертран, мы получим нелепое равенство между «величиной угла» и суммой этой величины с «величинами» области, входящей в первое положение угла и не входящей в его второе положение области, входящей во второе положение и не входящей в третье и т. д. В то же время наглядная

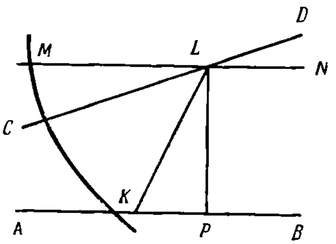



Рис. 23

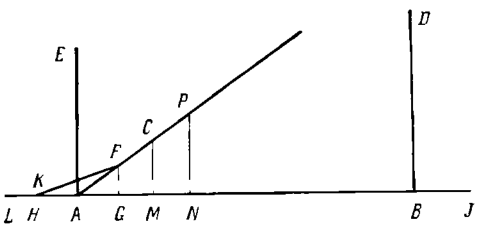



Рис. 24

образность рассуждений Бертрана нашла признание у многих серьезных математиков того времени, и А. Крелле еще в 1835 г. поместил в издававшемся им журнале «Journal für die reine und angewandte Mathematik» модификацию этого доказательства.

В самом конце XVIII и в начале XIX в. несколько попыток доказательства V постулата предпринял в различных изданиях своих «Начал геометрии» (Éléments de géométrie. 1e éd. Paris, 1794) А. М. Лежандр. «Начала геометрии» Лежандра — учебник элементарной геометрии, продолжающий традиции одноименного учебника Клеро. В первом издании «Начал геометрии» Лежандр доказывал V постулат следующим образом: пусть прямая $BD$ перпендикулярна прямой $AB$, а прямая $AC$ составляет с ней острый угол $BAC$ (рис. 24). Прежде всего устанавливается, что основание $G$ перпендикуляра $FG$, опущенного из некоторой точки $F$ линии $AC$, не может совпасть с точкой $A$ и не может попасть на продолжение $AL$ линии $AB$ по другую сторону от точки $A$: первое невозможно, так как угол $BAF$ по условию острый; второе невозможно потому, что если бы точка $G$ совпала с точкой линии $AL$, то перпендикуляр $FH$ пересекся бы с перпендикуляром $AE$ к прямой $AB$, восставленным из точки $A$, в некоторой точке $K$ и из этой точки к прямой $AL$ было проведено два перпендикуляра и, следовательно, основание $G$ перпендикуляра находится на линии $AJ$. Таким же образом основание $M$ перпендикуляра, опущенного на прямую $AB$ из точки $C$, не может совпасть с точкой $G$ и попасть на линию $GL$, основание $N$ перпендикуляра $PN$, опущенного из некоторой точки $P$ продолжения линии $AC$ на линию $AB$, не может совпасть с точкой $M$ и попасть на линию $ML$ и т. д. и при удалении точки прямой $AC$ от точки $A$ основание перпендикуляра, опущенного из нее на прямую $AB$, также удаляется от точки $A$. Ни одно из этих оснований перпендикуляров не может быть последним, так как предположение о том, что основание $N$ — последнее, противоречит тому, что на прямой $AC$ существуют точки, отстоящие от точки $A$ дальше соответствующей точки $P$, и основания перпендикуляров, опущенных из этих точек, отстоят от точки $A$ дальше, чем $N$. Отсюда Лежандр делал вывод, что расстояния оснований перпендикуляров, опущенных из точек прямой $AC$ на прямую $AB$ от точки $A$, могут быть сколь угодно большими и, следовательно, один из них совпадает с точкой $B$, т. е. перпендикуляр $BD$ также опущен на прямую $AB$ из некоторой точки прямой $AC$, которая и является точкой пересечения прямой $AC$ и $AB$. Из того же, что перпендикуляр и наклонная всегда пересекаются, уже нетрудно вывести V постулат в общем виде.

Ошибка этого доказательства Лежандра была вскрыта С. Е. Гурьевым в «Опыте о усовершении элементов геометрии» (Петербург, 1798). Дело в том, что из монотонного увеличения расстояния от точки $A$ до основания перпендикуляра вовсе не следует, что это расстояние может быть сделано сколь угодно большим; например, сумма сходящегося знакоположительного ряда монотонно увеличивается, но не может превзойти суммы ряда. Лежандр и сам остался недоволен этим доказательством и в третьем издании «Начал геометрии» (1800) предложил новое доказательство V постулата: здесь он сначала доказал, что сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых (это утверждение, вытекающее из «гипотезы тупого угла», противоречит нескольким аксиомам геометрии Евклида), а затем сделал попытку доказать, что эта сумма не может быть меньше двух прямых, молчаливо исходя, что из точки внутри угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны. Обнаружив и эту ошибку, в двенадцатом издании (1823) Лежандр попытался доказать, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам, исходя из предположения, что всегда можно преобразовать треугольник в треугольник с равной суммой углов и с уменьшающейся площадью. Оба эти предположения содержат утверждения, эквивалентные V постулату, что очевидно из того, что оба они не выполняются в геометрии Лобачевского. Исследования Лежандра, несмотря на его ошибки, сыграли существенную роль в подготовке неевклидовой геометрии, чему особенно способствовало широкое распространение его «Начал».

Из других доказательств V постулата в XVIII в. отметим доказательство упомянутого нами выше С. Е. Гурьева. Семен Емельянович Гурьев (1764?—1813) окончил Артиллерийский и Инженерный кадетский корпус в Петербурге и преподавал навигацию, артиллерию и математику. В 1796 г. он был принят в адъюнкты Академии наук, а через два года стал академиком. С. Е. Гурьев был организатором первого научного журнала академии, издававшегося на русском языке,— «Умозрительные исследования» (в 1809—1819 гг. вышли пять томов) и активным участником реформ начала XIX в. в области просвещения. Он преподавал во многих учебных заведениях Петербурга и составил целый ряд учебников. Упомянутый выше «Опыт о усовершении елементов геометрии» (СПб., 1798) С. Е. Гурьева посвящен проблемам обоснования и изложения не только геометрии, но и других разделов математики, и нам еще придется говорить об этой книге в седьмой главе (см. стр. 276).

Оставляя в стороне как интересный критико-методический разбор «Начал» Евклида и «Начал геометрии» Лежандра, так и программу курса геометрии, разработанную Гурьевым и реализованную в его учебниках, мы остановимся здесь только на его трактовке проблемы параллельных. Как было сказано, Гурьев правильно заметил дефект рассуждения Лежандра в его доказательстве V постулата, предложенного им в 1794 г., и показал, что из этого рассуждения вытекает лишь невозможность существования последнего пренендикуляра, опущенного из точек прямой $AC$ на прямую $AB$, а не существования границы расстояний $AM$. Гурьев отметил, что неизвестно, соответствуют ли равным отрезкам $AF = FG = GP$ и т. д. равные отрезки $AC$, $CM$, $MN$ и т. д., и если каждый из последних отрезков, например, в два раза меньше предыдущего, то их сумма не превзойдет удвоенного отрезка $AC$. Эта остроумная критика не помешала Гурьеву допустить аналогичную ошибку в его собственном доказательстве V постулата, также приведенного в указанной книге. Гурьев, как и Лежандр, рассматривает перпендикуляр $BD$ и наклонную $AC$ к прямой $AB$ (рис. 25) и опускает перпендикуляры $GR$, $IP$, $HS$, $FQ$, $KT$, $LV$ из точек $G$, $I$, $H$,

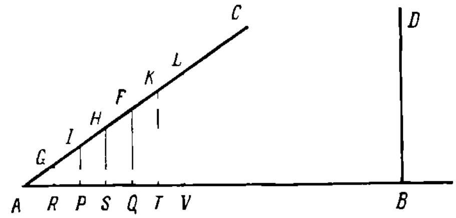



Рис. 25

$F$, $K$, $L$ прямой $AC$ на прямую $AB$. Основания $R$, $P$, $S$, $Q$, $T$, $V$ этих перпендикуляров обладают тем свойством, что перпендикуляры к прямой $AB$, восставленные в этих точках, пересекаются с наклонной. Если существуют перпендикуляры, не пересекающиеся с наклонной, то на $AB$ имеются точки, не обладающие этим свойством, и Гурьев делает вывод о существовании «общего предела» между точками, обладающими указанным свойством и не обладающими им. Однако из того, что среди перпендикуляров, пересекающих наклонную, нет последнего, Гурьев неправомерно заключает, что среди перпендикуляров, не пересекающих наклонной, нет первого. В геометрии Лобачевского, в которой V постулат не имеет места, такой первый непересекающий перпендикуляр имеется и называется параллелью Лобачевского к наклонной, это и есть тот «общий предел», о котором говорил Гурьев. Позднее, в «Основаниях геометрии» (СПб., 1804—1807) Гурьев предпочел привести доказательство Бертрана (см. стр. 218).

Если в «Опыте» С. Е. Гурьева была впервые в русской математической литературе поставлена проблема доказательства постулата о параллельных, то всего лишь через тридцать лет в России же появилось первое сочинение, в котором было дано принципиально новое решение проблемы параллельных, а именно построена геометрическая система, основанная на постулате о параллельных, согласно которому две прямые, пересекаемые третьей и составляющие с ней внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, могут и не пересекаться и, в частности, могут не пересекаться и перпендикуляр и наклонная. Это великое открытие, сделанное Н. И. Лобачевским, было доложено им физико-математическому факультету Казанского университета в 1826 г. и опубликовано в «Казанском вестнике» за 1829—1830 гг. Независимо от Лобачевского к тому же выводу пришел Я. Бояи, напечатавший свои результаты в 1831 г., и К. Ф. Гаусс, заметки которого по этому вопросу увидели свет лишь в 1860—1865 гг., после его смерти. Однако создание первой системы неевклидовой геометрии, имевшее далеко идущие последствия для всей математики и физики, лежит уже вне границ рассматриваемого нами времени.