ШЕСТАЯ ГЛАВА

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Конечные разности

Исследование функций при прерывном изменении аргумента, в частности их интерполирование, велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей, в котором специально изучаются функции с дискретно меняющимся аргументом, выделилось только в XVIII в. В этом исчислении оперируют приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента, и роль дифференциалов играют конечные разности функции $f(x)$, как-либо заданной в точках x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$: разности первого порядка $\Delta f(x_k) = f(x_{k+1} - f(x_k)$, разности второго порядка $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x_{k+1}) - \Delta f(x_k)$ и т. д. Алгоритм вычисления конечных разностей аналогичен алгоритму дифференцирования, в частности для элементарных функций. Интегрированию здесь соответствует суммирование разностей, т. е. отыскание функций $f(x)$ с данной разностью $\Delta f(x) = \varphi(x)$, а роль дифференциальных уравнений играют уравнения в конечных разностях

$$\Phi[x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^n f(x)] = 0,$$

которые можно записать и в виде

$$\varphi[x, f(x), f(x_1), \ldots, f(x_n)] = 0,$$

если выразить все разности через значения искомой функции $f(x)$ при аргументах $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$; функции Φ и φ предполагаются известными. Может оказаться, что после приведений некоторые значения $f(x_m)$, $f(x_{m+1}), \ldots, f(x_n)$ выпадут.

Одна из основных задач в исчислении конечных разностей XVIII в. ставилась так: для заданной функции $f(x)$ найти в конечном виде точно или приближенно сумму

$$S_n = f(x_0) + f(x_0 + h) + \ldots + f(x_0 + nh),$$

при фиксированных x_0, h и n. Более общая постановка требует выяснения асимптотического поведения S_n при $n \to \infty$ по тем или иным аналитическим свойствам $f(x)$. Задача суммирования сводится к нахождению функции по ее заданной разности первого порядка. Для пояснения положим $x_0 = 0$, $h = 1$. Введя замену $\varphi(x) = f(x_0 + hx)$, получаем $S_n = \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n)$. Предположим, что удалось найти функцию $F(x)$, для которой $\Delta F(x) = \varphi(x)$ или $F(x + 1) - F(x) = \varphi(x)$. Тогда $F(1) - F(0) = \varphi(0)$, $F(2) - F(1) = \varphi(1)$, ..., $F(n + 1) - F(n) = \varphi(n)$.

Складывая эти равенства, получаем решение задачи суммирования

$$\varphi(0)+\varphi(1)+\ldots+\varphi(n)=F(n+1)-F(0).$$

Соотношение $\Delta F(x)=\varphi(x)$ содержит разность неизвестной функции первого порядка и представляет простейшее разностное уравнение. Всякая функция $F(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, называется его решением. Отметим произвол решения: пусть имеется два решения $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Положим $y(x)=F_1(x)-F_2(x)$. В таком случае $\Delta y(x)=\Delta F_1(x)-\Delta F_2(x)=0$, т. е. $y(x+1)=y(x)$. Это означает, что разность двух любых решений уравнения есть периодическая функция. Таким образом, если $F_1(x)$ есть какое-либо решение уравнения $\Delta F(x)=\varphi(x)$, то всякое другое его решение содержится в формуле $F(x)=F_1(x)+C(x)$, где $C(x)$ — произвольная периодическая функция периода 1; для уравнения $F(x+h)-F(x)=\varphi(x)$ возникает периодическая функция периода h.

Изложенное показывает существенную аналогию между только что рассмотренными задачами исчисления конечных разностей и основными задачами дифференциального и интегрального исчислений. Действительно, операции нахождения производной здесь отвечает операция взятия разности ΔF; решение же уравнения $\Delta F(x)=\varphi(x)$ соответствует нахождению первообразной. В таком случае суммирование функции φ с помощью первообразной F отвечает нахождению определенного интеграла с помощью неопределенного. Соответствующая формула есть, таким образом, прямой аналог формулы Ньютона — Лейбница, выражающей определенный интеграл через первообразную функцию. Для пояснения результатов Эйлера, о которых говорится ниже, приведем два примера.

1. Пусть $F(x)=1/x$, тогда $\Delta F=-\frac{1}{x(x+1)}$ и для вычисления $\sum\limits_{x=1}^{n}\frac{1}{x(x+1)}$ достаточно воспользоваться суммационной формулой, в силу которой $-\sum\limits_{x=1}^{x}\frac{1}{x(x+1)}=F(n+1)-F(1)=\frac{1}{n+1}-1$, т. е. $\sum\limits_{x=1}^{n}\frac{1}{x(x+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.

2. Суммирование обобщенных степеней $x^{(n)}=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$: легко доказать, что $\Delta x^{(n)}=nx^{(n-1)}$. Эта формула совершенно аналогична формуле дифференцирования $(x^{(n)})'=nx^{(n-1)}$. Заменяя n на $n+1$, имеем $\Delta x^{(n+1)}=(n+1)\,x^{(n)}$ или $\Delta F(x)=\varphi(x)$, где $F(x)=x^{(n+1)}/(n+1)$, $\varphi(x)=x^{(n)}$. Основная формула дает выражение для суммы обобщенных степеней:

$$\sum_{x=0}^{n}x^{(k)}=\frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1}.$$

Конечные разности $\Delta f(x)$ и $\Delta^2 f(x)$ применялись при интерполировании функций, заданных таблицами, еще в древности и в средние века. Конечными разностями различных порядков широко пользовались при вычислении тригонометрических и логарифмических таблиц. Так, Бригс при составлении таблиц логарифмов вычислял последовательные разности до тех пор, пока они не становились, при выбранном им числе знаков, постоянными, что позволяло найти разности низших порядков и экстраполировать логарифмическую функцию. По существу вычисления Бригса сводились к приближению логарифмической функции многочленами (мы уже упоминали, что, как показал Ньютон, функции, для которых $\Delta^n f(x)$ постоянна,— многочлены n-й степени). Эта же идея позволила Грегори и Ньютону найти общую формулу параболического интерполирования (см. т. II, стр. 155—158). Параболическое интерполирование применялось и при численном интегрировании. В частности, квадратичному интерполированию соответствует известная формула приближенного интегрирования, найденная еще Грегори и затем вторично Томасом Симпсоном (см. стр. 364).

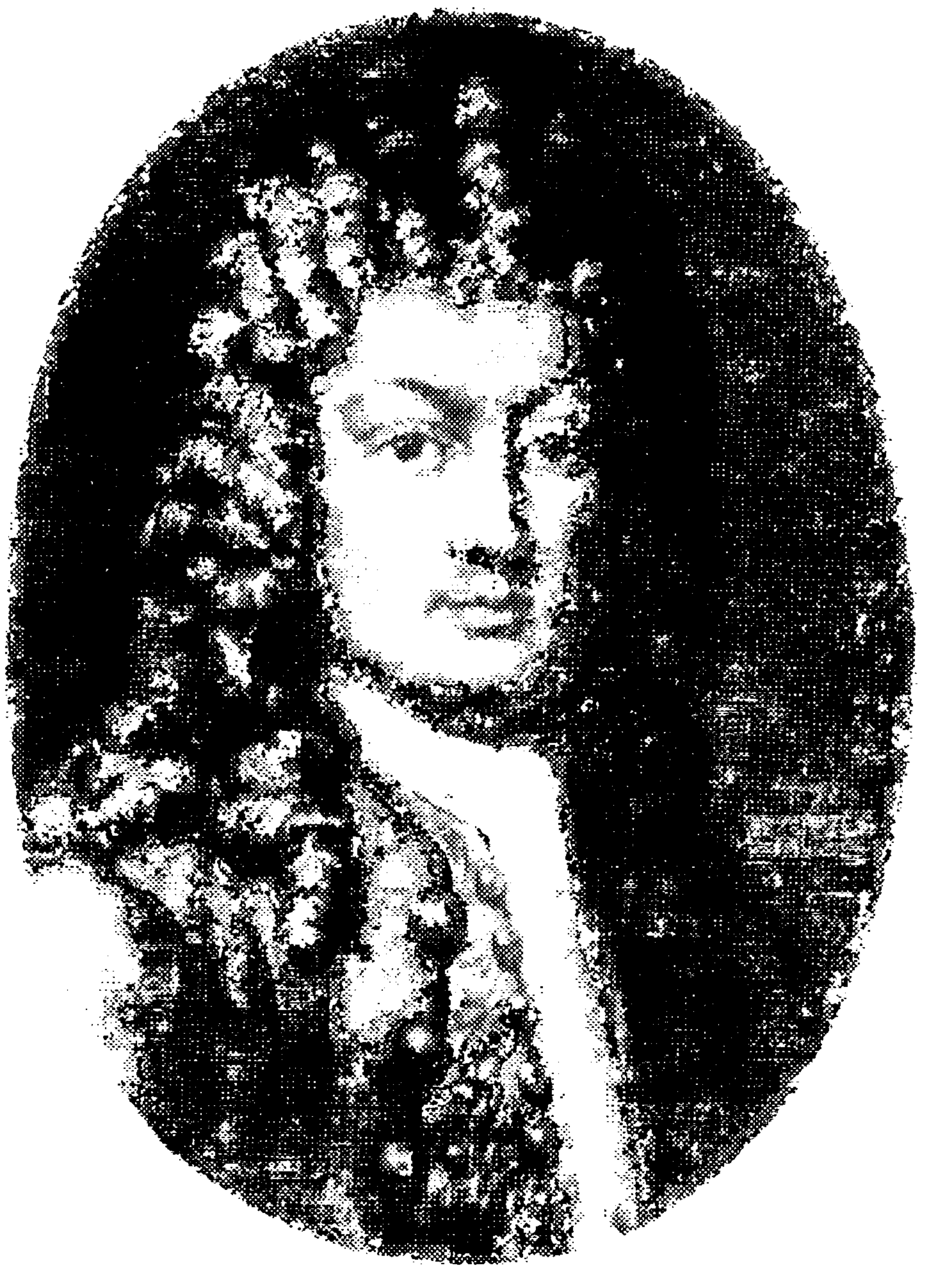
Частичная разработка некоторых других задач исчисления конечных разностей также велась издавна, как, например, суммирование отдельных классов последовательностей, вроде последовательности Леонардо Фибоначчи или степенных сумм натурального ряда. Однако, как сказано, в качестве самостоятельной математической науки исчисление конечных разностей впервые выступило лишь в начале XVIII в. и прежде всего в трудах Ньютона, «Метод разностей» (1711) которого был рассмотрен в предыдущем томе, и особенно его последователей и младших современников — Тейлора, Муавра и Стирлинга.

Брук Тейлор

Один из крупнейших представителей английской математики XVIII в. Брук Тейлор (1685—1731) шестнадцатилетним юношей поступил в Кембриджский университет, где обучался юриспруденции, но с неменьшим усердием и большим успехом занимался и математическими науками. В 1712 г. он был избран членом Лондонского королевского общества и в 1714—1718 гг. состоял его секретарем; он принял активное участие в знаменитом споре о приоритете между Ньютоном и Лейбницем. Первая математическая работа Тейлора, написанная в 1708 г. и опубликованная в «Philosophical Transactions» за 1714 г., была посвящена теории колебаний маятника. Основным математическим сочинением Тейлора был «Прямой и обратный метод приращений» (Methodus incrementorum directa et inversa, Londini, 1715). В этом труде Тейлор, выступая как верный последователь метода флюксий Ньютона, обогатил математику целым рядом важных открытий. О некоторых нам еще придется говорить в дальнейшем (правила дифференцирования функции обратной данной (стр. 341), введение особого решения обыкновенного дифференциального уравнения (стр. 399), механико-геометрическая формулировка и первая попытка решения дифференциального уравнения малых колебаний струны (стр. 412)). Здесь мы остановимся на результате, более всего прославившем имя Тейлора,— общей теореме о разложении функции в степенной ряд, к которой он пришел в связи с задачей о приближенной квадратуре кривых. Отправным пунктом вывода Тейлора явилась формула Ньютона, выражающая приращение функции $f(a + n\Delta x) - f(a)$, соответствующее приращению аргумента $n\Delta x$.

Формулу Ньютона (см. т. II, стр. 157) можно записать в виде

$$f(a + n\Delta x) - f(a) = n\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a) + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(a) + \ldots + \Delta^n f(a). \quad (1)$$



Б. Тейлор
(с портрета 1717 г., принадлежавшего леди Янг)

Здесь $\Delta f(a)$ обозначает первую разность $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$, $\Delta^2 f(a)$ — вторую, т. е. $\Delta(\Delta f) = f(a + 2\Delta x) - 2f(a - \Delta x) + f(a)$ и т. д.

Идея Тейлора состояла в переходе от интерполяционной формулы Ньютона, выведенной для конечного приращения $h = n\Delta x$, к ряду, возникающему, когда n становится бесконечно большим, а Δx соответственно бесконечно малым. При $h = n\Delta x$ формула (1) получает вид

$$f(a+h) - f(a) = h\,\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots[h-(n-1)\Delta x]}{1\cdot 2\ldots n}\,\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n}.$$

Предельное поведение первых членов в этом разложении при $\Delta x \to 0$ для Тейлора очевидно: $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ стремится к $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$, $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ к $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=a}$, множитель $h(h - \Delta x)$ в пределе равен h^2 и т. д. Поэтому Тейлор, не беспокоясь, что число членов разложения неограниченно возрастает, в стиле математики XVIII в. заключает о справедливости для всякой функции $y = f(x)$ разложения, имеющего в современной записи вид

$$f(a+h) = f(a) + h\,\frac{df(a)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\,\frac{d^2 f(a)}{dx^2} + \ldots$$

К ряду Тейлора мы еще возвратимся (стр. 294), здесь же подчеркнем еще раз, что Тейлор получил его в рамках формировавшегося исчисления конечных разностей.

В «Прямом и обратном методе приращений» рассмотрены также некоторые задачи на интерполирование и суммирование последовательностей. Тейлор сознавал необходимость в специальной символике исчисления конечных разностей и предложил обозначения, сходные с применявшимися в методе флюксий. Первую разность Δx он обозначал $\underset{.}{x}$, вторую разность $\underset{..}{x}$ и т. д. или еще ставя порядок разности под буквой $\underset{3}{x}$, $\underset{4}{x}$ и вообще $\underset{n}{x}$. Через $\underset{0}{x}$ он обозначал значение самого переменного x, а с помощью отрицательных индексов — суммирование, как операцию, обратную взятию разностей, так что, например, $\underset{-1}{\Delta x}$ есть не что иное, как x. Напомним, что применение отрицательных индексов имелось и у Лейбница, рассматривавшего интегрирование как дифференцирование с отрицательным показателем (см. т. II, стр. 273). Эти обозначения применялись некоторыми английскими математиками XVIII в., в том числе Э. Варингом, но общепринятой стала символика Эйлера (см. стр. 231), которой неоднократно пользовались выше и мы.

Перу Тейлора принадлежат еще книги по теории перспективы, о которых говорилось в пятой главе (см. стр. 196). В последние десять лет жизни он отошел от математики и занимался религиозными и философскими вопросами.

Исчисление конечных разностей все же не получило систематического развития в «Прямом и обратном методе разностей», и его бóльшая часть была посвящена различным вопросам метода флюксий и его приложений к геометрии и механике. Но эта книга немедленно привлекла к дальнейшей разработке теории конечных разностей еще нескольких английских и французских ученых, работы которых тесно связаны между собой. Эти ученые дополнили и популяризовали исследования самого Тейлора. Парижский академик Франсуа Николь (1683—1758), в частности, вычислил (в Mém Ac. Paris, (1717—1719) 1720) формулы разности и суммы обобщенной степени, взятой в виде $x^{(n)} = x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(n-1)h]$ и обобщенной для отрицательной степени $x^{(-n)} = 1 : x^{(n)}$; укажем, что

$$\Delta x^{(-n)} = \frac{-nh}{x(x+h)\ldots(x+nh)}.$$

Дробные функции Николь разлагал на простейшие, т. е. на дроби с постоянными числителями и обобщенными степенями в знаменателях. Пользуясь своими формулами, которые мы записали в теперешнем обозначении, Николь суммировал ряды с общим членом вида $\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+kh)}$. Откликнулся на книгу Тейлора и учитель Николя П. де Монмор (Philos. Trans. (1719), 1720). Другая работа де Монмора содержала изложение только что рассмотренной статьи его ученика, а в приложении к этой работе Тейлор также занялся суммированием дробных функций с помощью разложения на простейшие дроби (Mém. Ac. Paris, (1717—1719) 1720). Николь еще несколько раз возвращался к суммированию рядов, расположенных по обобщенным отрицательным степеням. Николь употреблял только разности первого порядка. Высшие разности нашли применение в работах другого парижского академика Тома Фанте де Ланьи (1660—1734) по приближенному решению уравнений (Mém. Ac. Paris, 1705, 1722).

Рекуррентные последовательности

Одновременно с описанными исследованиями, как мы уже указывали (см. стр. 79), интересную главу в исчисление конечных разностей вписал А. де Муавр. Отправляясь от одной задачи теории вероятностей. он пришел к рассмотрению рекуррентных (возвратных) последовательностей и рядов. Связь между рекуррентными последовательностями и разностными уравнениями состоит в том, что определяющая последовательность «шкала отношений» (рекуррентная формула) есть не что иное, как линейное однородное уравнение в конечных разностях с постоянными коэффициентами; решение этого уравнения позволяет выразить общий член последовательности в функции его номера (ср. стр. 228).

Решается также задача об определении по шкале отношений общего члена рекуррентной последовательности. Муавр решал однородное линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами. При этом он строил выражение общего члена последовательности по корням алгебраического уравнения, которое позднее назвали характеристическим. Им разобраны и примеры, когда характеристическое уравнение имеет равные действительные корни или же два комплексных корня. Общая теория линейных разностных уравнений была, впрочем, создана позднее (см. стр. 234).

Вслед за Муавром рекуррентными рядами занялись многие: Николай I Бернулли, которому он изложил некоторые свои результаты еще в письме от 14 марта 1714 г., де Монмор, Д. Бернулли, Эйлер и другие. О применении рекуррентных последовательностей к численному решению уравнений говорилось в третьей главе (стр. 79), эти последовательности встретятся нам и в дальнейшем.

Ряд Стирлинга

Следующий важный шаг вперед сделал Стирлинг, роль которого в разработке исчисления конечных разностей, пожалуй, еще более значительна, чем в теории высших алгебраических кривых. Уроженец Шотландии, Джемс Стирлинг (1692—1770) с 1710 г. был стипендиатом Оксфордского университета, но участие в политической деятельности, враждебной правившей династии, заставило его эмигрировать в Венецию, где он зарабатывал на жизнь частными уроками. Там он написал упоминавшиеся ранее «Ньютоновы кривые третьего порядка» (см. стр. 155) и «Ньютонов метод разностей» (Methodus differentialis Newtoniana). Оба эти сочинения были опубликованы при содействии Ньютона — первое в Оксфорде в 1717 г., второе в «Philosophical Transactions» в 1719 г. С помощью Ньютона Стирлингу в 1725 г. удалось вернуться в Англию, где он выпустил «Метод разностей, или Трактат о суммировании и интерполяции бесконечных рядов» (Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Londini, 1730). В 1735 г. Стирлинг получил пост директора одного из горных предприятий в Шотландии, который занимал до конца своей жизни.

В статье 1719 г. Стирлинг приложил интерполяционный метод Ньютона к улучшению сходимости некоторых числовых рядов. Из богатого содержания «Метода разностей» мы укажем только наиболее выдающиеся результаты. Книга разделена на две части. В первой, «О разностных уравнениях, определяющих ряды», среди прочего рассмотрено суммирование обобщенных отрицательных степеней и образованных из них рядов. Среди приложений заслуживает упоминания приближенное суммирование ряда обратных квадратов $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, которое он произвел с высокой точностью, не заметив, однако, что полученный им результат $s = 1{,}644934065$, верный до предпоследнего знака, соответствует $\pi^2/6$, как это через несколько лет обнаружил Эйлер (см. стр. 337). В первой же части Стирлинг дал вывод одной из интерполяционных формул Ньютона, принадлежащей к группе так называемых формул центральных разностей, выгодных для интерполирования функции близ середины ряда ее значений. Эту важную формулу, нередко называемую формулой Ньютона — Стирлинга или даже только по имени Стирлинга, Ньютон сообщил без доказательства в третьем предложении «Метода разностей» (1711).

Во второй части «Метода разностей», озаглавленной «Об интерполировании рядов», Стирлинг, как он сам указывает, распространил идеи теории рекуррентных рядов Муавра на другие ряды, члены которых следуют какому-либо «регулярному закону». Его исходный принцип заключался в замене определяющей последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ рекуррентной шкалы

$$a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2} + \ldots + m_k a_{n-k}$$

с постоянными коэффициентами m_i на шкалу с переменными коэффициентами $m_i(n)$. Эту шкалу Стирлинг наименовал разностным уравнением (aequatio differentialis). Считая, что существует одна и только одна (непрерывная) функция $f(x)$, определяемая такой шкалой и принимающая значения членов данной последовательности $f(n) = a_n$, Стирлинг поставил задачу об интерполировании последовательностей, занимавшую еще Валлиса (см. т. II, стр. 152), как задачу решения линейного уравнения в конечных разностях с переменными коэффициентами. Например, члены указанной Валлисом гипергеометрической последовательности $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2 \cdot 3 = 6$, $a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, ... удовлетворяют уравнению $f(x+1) = xf(x)$, решением которого, как выяснилось впоследствии, является гамма-функция $\Gamma(x)$, при натуральных значениях аргумента принимающая значения $n! = \Gamma(n+1)$. Впрочем, в интерполировании приведенной последовательности Стирлинг получил только понадобившийся ему частный результат, который можно записать в виде $a_{-1/2} = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Он не знал, что одновременно той же проблемой занимались в Петербургской академии наук Гольдбах, Д. Бернулли и Эйлер и что последний к концу 1729 г. нашел полное ее решение с помощью определенных интегралов (см. стр. 335).

Видное место во второй части «Метода разностей» занимает возникшая в связи с успехами теории вероятностей и комбинаторики проблема приближенного вычисления факториалов $n!$ и коэффициентов бинома $(a+b)^n$ при очень больших значениях n. Здесь Стирлинг работал параллельно и в тесной связи с Муавром. В 1721 г. ученик Муавра Александр Кюминг (1690? — 1775) поставил перед ним одну теоретико-вероятностную задачу, решение которой требовало оценки отношения среднего члена разложения бинома $(1+1)^{2m}$ к сумме всех его членов. т. е.

$$\frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} = \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{m!\,2^m},$$

а также отношения среднего члена к какому-либо другому, т. е. $C_{2m}^m \,/\, C_{2m}^{m\pm k}$ при весьма большом m. Муавр вскоре нашел приближенное решение обоих вопросов, опубликованное позднее в «Аналитических этюдах» (1730). Мы приведем его ответ на первый вопрос, положив $2m = n$:

$$C_n^{n/2} : 2^n \approx \frac{2{,}168\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{n-1},$$

при этом он указал, правда в других выражениях, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ (ср. стр. 319). Свою оценку Муавр проверил по специально составленной таблице логарифмов $n!$ для $n = 10, 20, 30, \ldots, 900$. Вывод оценки был основан на применении степенных разложений для $\ln\frac{m+\mu}{m-\mu} = \ln\frac{1+x}{1-x}$, $x = \frac{\mu}{m}$, а в ходе преобразований он использовал суммы нечетных степеней натуральных чисел, найденные Я. Бернулли (стр. 307).

В 1725 г. Кюминг предложил эту задачу Стирлингу, который дал другое решение при помощи конечно-разностных методов и интерполирования, в частности и упомянутого определения $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Это решение он письменно сообщил летом 1729 г. Муавру, успевшему поместить его в «Аналитических этюдах», вышедших в самом начале 1730 г., а два вывода опубликовал в «Методе разностей».

Но еще значительнее был другой результат Стирлинга, к которому он пришел, по-видимому занимаясь проверкой таблицы логарифмов $n!$ Муавра, именно, асимптотический ряд для суммы десятичных логарифмов первых n членов арифметической прогрессии. Этот ряд, носящий теперь его имя, Стирлинг опубликовал вместе с частным случаем $\sum\limits_{k=2}^{n}\log k = \log(n!)$ в «Методе разностей». Еще раньше, через несколько дней после выхода «Аналитических этюдов», Стирлинг письменно сообщил свой ряд для $\log(n!)$ Муавру вместе с указаниями на некоторые неточности в его таблице. В несколько более современной записи и для случая натуральных логарифмов ряд Стирлинга можно записать так:

$$\ln(n!) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\cdot 12\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{7}{2^3\cdot 360\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} - \frac{31}{2^5\cdot 1260\left(n+\frac{1}{2}\right)^5} + \ldots$$

В «Дополнении к Аналитическим этюдам» (Miscellaneis Analyticis Supplementum), изданном в Лондоне в том же 1730 г., Муавр вывел ряд Стирлинга в несколько иной, более простой форме, причем впервые указал закон образования его коэффициентов, в которые входят числа Бернулли.

Имя Стирлинга носит также асимптотическое равенство, дающее при больших n хорошие приближения:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Оно без труда формально получается, если ограничиться первыми тремя членами приведенного ряда. Однако в «Методе разностей» этого приближения нет, его дал Муавр.

Эти результаты Стирлинга и Муавра были распространены на гамма-функцию Эйлером (см. стр. 336), вместе с тем они представляют собой частные случаи общей формулы суммирования Эйлера — Маклорена, которая в равной мере принадлежит исчислению конечных разностей и теории рядов и о которой нам будет удобнее рассказать в седьмой главе. Следует добавить, что ни Стирлинг, ни Муавр не выявили асимптотический характер своих разложений, более глубокий анализ которых выпал опять-таки на долю Эйлера (см. стр. 306 и след.).

Интерполяционные формулы Лагранжа

Во второй половине XVIII в. возникла новая постановка проблемы интерполяции, связанная с новым подходом к приближенному выражению функциональной зависимости.

В применениях математического анализа вопрос не всегда сводится к нахождению аналитического выражения искомой зависимости в виде формулы $y = f(x)$. Даже в том случае, когда это выражение известно, оно может оказаться в силу своей сложности мало пригодным для вычисления нужных частных значений аргумента. Для нужд практики в огромном большинстве случаев достаточно знать значения функции на достаточно «плотном» множестве точек, например, при значениях аргумента: x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h, \ldots$ при некотором малом приращении h (любого знака). Поэтому возникает задача: заменить сложную функцию $y = f(x)$ другой — более простой функцией, значения которой, во всяком случае при указанных значениях аргументов, были бы достаточно близки к значениям $f(x)$. В частности, задача может ставиться так: найти многочлен от x степени не выше n, который совпадает с заданными значениями в $n+1$ точках. При подобной постановке выражение точной функциональной зависимости излишне: используются лишь $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, соответствующие $n + 1$ значениям аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, y_k могут быть взяты непосредственно из эксперимента.

Принципиальные результаты в исследовании проблемы интерполяции в указанной постановке получил Лагранж. Исходя из выражений общих членов для рекуррентных рядов, найденных им в 1775 г., он несколько позже нашел выражение интерполяционных многочленов, получивших затем его имя (Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1792/93) 1798). Имя Лагранжа носит формула, приведенная им без доказательства в «Элементарных лекциях по математике» (1795), но опубликованная ранее Варингом (Philos. Trans., 1779). Многочлен Лагранжа, совпадающий в точках x_1, $x_2, \ldots, x_n$ со значениями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ интерполируемой функции, имеет вид

$$P_n(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)}\, y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)}\, y_2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}\, y_n.$$

В работе, опубликованной в 1783 г. в «Astronomisches Jahrbuch», Лагранж, решая задачу интерполяции в той же постановке, применил тригонометрические суммы, т. е. показал, каким образом должны быть определены параметры $a, b, c, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \chi, \psi, \ldots$, чтобы конечная сумма $a \sin(\alpha + x\varphi) + b \sin(\beta + x\chi) + c \sin(\gamma + x\psi) + \ldots$ совпадала с заданными значениями интерполируемой функции в конечном числе точек. Впрочем, этой проблемой он занимался еще в 1759 г. (ср. стр. 418).

Исследования Эйлера; суммирование функций

Интерес Эйлера к исчислению конечных разностей помимо вопросов интерполяции обусловливали задачи суммирования функций и теории рекуррентных рядов. Наряду с этим исчисление конечных разностей Эйлер существенно использовал при разработке методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений и создании основ вариационного исчисления. Более того, само дифференциальное исчисление он пытался построить, отправляясь от исчисления конечных разностей. Первые две главы «Дифференциального исчисления» (1755) Эйлера отчетливо выявляют это его стремление: они целиком посвящены теории конечных разностей.

Используя результаты своих предшественников, прежде всего Тейлора и Стирлинга, Эйлер впервые дал здесь отчетливое и последовательное изложение основ исчисления конечных разностей. Характерной особенностью изложения является его алгоритмичность. Сразу же весьма удачно вводится основная символика, сохранившаяся до наших дней. Следуя примеру Лейбница, который обозначил дифференциалы символом d, Эйлер для разностей вводит единый символ Δ. При этом подчеркивается дальнейшая цель. Обозначив значения функции $y = y(x)$ для значений x, $x + \omega$, $x + 2\omega$, ..., соответственно через y, y^{I}, y^{II}, ..., Эйлер говорит: «Чтобы поставить их (т.е. разности.— *Ред.*) в связь с дифференциалами, будем обозначать их следующим образом:

$$y^{\mathrm{I}} - y = \Delta y, \qquad y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}} = \Delta y^{\mathrm{I}}, \qquad y^{\mathrm{III}} - y^{\mathrm{II}} = \Delta y^{\mathrm{II}}$$

и т.д.» [1]. Разности второго порядка обозначаются двояко: $\Delta\Delta y$ или $\Delta^2 y$. Первое из обозначений соответствует обозначению ddy, нередко употреблявшемуся для дифференциалов второго порядка, однако разности высшего порядка обозначаются единообразно: $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ и т. д., что совпадает с современной символикой.

Вслед за этим устанавливаются основные алгоритмы. Первый их них состоит в нахождении коэффициентов для разностей высшего порядка. Получив выражения разностей первых пяти порядков вплоть до $\Delta^5 y = y^{\mathrm{V}} - 5y^{\mathrm{IV}} + 10y^{\mathrm{III}} - 10y^{\mathrm{II}} + 5y^{\mathrm{I}} - y$, Эйлер указывает: «Коэффициенты в этих формулах подчинены тому же закону, который наблюдается у степеней бинома» [2]. Далее устанавливается, как мы скажем сейчас, линейность операции взятия разности: если $y = p + q + r + \ldots$, то $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r + \ldots$, $\Delta^2 y = \Delta^2 p + \Delta^2 q + \Delta^2 r + \ldots$ Затем выводится правило нахождения разности произведения, отличающейся от его дифференциала на величины высшего порядка малости: $\Delta(pq) = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q$. Это позволяет вычислять разности любого порядка для x^n. Полученный алгоритм переносится (сначала формально) на случай произвольных значений n. Не ограничиваясь выражением

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление. Перевод, вступительная статья и примечания М. Я. Выгодского. М.—Л., 1949, стр. 48.

[2] Там же, стр. 51.

разностей в этих случаях в виде рядов, Эйлер отмечает и возможность представления их в конечном виде. Поясним это на простейшем примере: $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $\Delta \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{\omega}$, «если дробь $\frac{1}{x+\omega}$ развернуть в ряд, получится вышеприведенное выражение» [1]. Далее вычисляются разновидности дробных функций.

Для вычисления разностей иррациональных и трансцендентных функций используются ряды.

Общий вывод первой части этой главы таков: для произвольной алгебраической и трансцендентной функции y от x ее первая разность может быть представлена в форме $\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + \ldots$, вторая разность должна иметь вид $\Delta^2 y = P\omega^2 + Q\omega^3 + \ldots$; при этом коэффициенты при степенях приращения ω обозначаются одними и теми же буквами, хотя они представляют различные функции x (это отмечается в тексте).

Вторая часть первой главы посвящена обращению задачи: по заданной разности теперь требуется найти соответствующую функцию. Искомую функцию, разность которой известна, Эйлер называет суммой, вводя символ Σ: обращая уравнение $z = \Delta y$, он пишет $y = \Sigma z$. Другими словами, здесь решаются разностные уравнения вида $\Delta y = z(x)$. Эйлер ограничивается простейшими случаями, которые он может рассмотреть методом суммирования, т. е. с помощью обращения найденных разностей отдельных элементарных функций.

Изложение этой части сочинения, в противоположность другим главам, в силу сжатости не отличается обычной для Эйлера ясностью. Мы проиллюстрируем существо вопроса примером. Получив формулы $\Delta x = \omega$, $\Delta x^2 = 2\omega x + \omega^2$, $\Delta x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$ и т. д., Эйлер с помощью метода суммирования хочет их обратить. Не приводя пояснений, он сразу указывает равенства $\Sigma\omega = x$, $\Sigma(2\omega x + \omega^2) = x^2$, $\sum x = \frac{x^2}{2\omega} - \sum \frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$. Эти результаты становятся понятными, если воспользоваться указанной выше основной формулой суммирования (см. стр. 222). Для $\Delta x = \omega$ имеем $F(x) \equiv x$, $\varphi(x) = \omega$. Так как приращение $\omega \neq 1$, то формула будет иметь вид $\sum\limits_{x=0}^{n} \varphi(x) = F[(n+1)\omega] - F(0)$, что и означает справедливость равенства $\Sigma\omega = x$ при $x = (n+1)\omega$. Аналогично при $\varphi(x) = 2\omega x + \omega^2$ и $F(x) = x^2$ эта формула дает $\sum\limits_{x=0}^{n} (2\omega x + \omega^2) = F[(n+1)\omega] - F(0) = [(n+1)\omega]^2$, что в сжатой форме в тексте и записывается в виде равенства $\Sigma(2\omega x + \omega^2) = x^2$. Следствие $\sum x = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$ получается из этих формул без затруднений.

Весьма широкие применения исчисление конечных разностей получило в теории рядов. Вторая глава «Дифференциального исчисления» Эйлера и носит название: «О применении разностей в учении о рядах». Здесь решаются две основные задачи:

1) нахождение общего члена арифметических рядов, конечные разности Δ^k членов которых становятся постоянными начиная с некоторого значения k;

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 58.

2) нахождение «суммационных членов» рядов, т. е. сумм заданного числа членов $\varphi(0)+\varphi(1)+\ldots+\varphi(n)$.

В частности, здесь выясняется, что суммы рядов только что указанного класса будут также обладать свойством постоянства разностей соответствующего порядка.

Применение изложенных выше результатов позволяет Эйлеру найти методом суммирования суммы конечного числа членов рядов 1^k+2^k+ $+3^k+\ldots$ для $k=1, 2, \ldots, 16$, а затем рядов, общий член которых есть целая рациональная функция или же дробь, знаменатель которой разлагается на линейные множители.

Отметим особую трактовку Эйлером интерполяции рядов. Краткое замечание имеется во второй главе «Дифференциального исчисления»: «Более того, из общего члена можно определить и те члены, индексы которых суть дроби; в этом и состоит интерполяция рядов» [1]. Определение индекса дается ранее: «Индексом или показателем в каком-нибудь ряде называются числа, которые указывают, каков порядок каждого члена. Так индекс первого члена есть 1, второго 2 и т. д.» [2]. К вопросам об интерполяции рядов в только что указанном смысле Эйлер возвращается в главах 16 и 17 второй части книги, где рассматриваются ряды, не обладающие свойством постоянства разностей их членов.

Конечные разности вообще получили в «Дифференциальном исчислении» Эйлера многочисленные приложения, например в первой главе второй книги, где с их помощью производится преобразование бесконечных рядов в конечные или быстрее сходящиеся (см. стр. 305).

Особо отметим, что в классическом «методе ломаных» Эйлера для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений используется идея замены дифференциального уравнения разностным. Этот метод излагается в первом томе «Интегрального исчисления» (см. стр. 393).

Уравнения в конечных разностях

Мы упоминали, что разностное уравнение

$$\Phi(x, f(x), \Delta f(x), \ldots, \Delta^n f(x))=0, \tag{2}$$

где Φ — данная, а f — искомая функция, можно, представив все разности через данные значения $f(x)$, рассматривать в форме

$$\varphi(x, f(x), f(x_1), f(x_n))=0. \tag{3}$$

Если в (3) фактически входят значения $f(x_k)$ с индексом вплоть до $k=$ $=m\leqslant n$, то говорят, что порядок уравнения (2) или (3) есть m. Мы примем для простоты, что $m=n$ и, кроме того, что $x_1=x+1$, $x_2=x+$ $+2, \ldots, x_n=x+n$. Тогда, считая (3) разрешенным относительно $f(x+n)$, его можно записать так:

$$f(x+n)=F(x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n-1)). \tag{4}$$

Отсюда следует, что если при $x=x_0$ заданы значения

$$f(x_0)=a_0, \quad f(x_0+1)=a_1, \ldots, f(x_0+n-1)=a_{n-1},$$

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 76.
[2] Там же, стр. 70.

то из (4) однозначно определяется $f(x+n)$. Но в таком случае замена в (4) x_0 на x_0+1 позволяет вычислить $f(x_0+n+1)$ и т. д. Задача нахождения решения разностного уравнения n-го порядка по данным начальным условиям $f(x_0)=a_0$, $\Delta f(x_0)=b_1, \ldots, \Delta^{n-1}f(x_0)=b_{n-1}$ совершенно аналогична задаче Коши для дифференциального уравнения n-го порядка.

Остается определить понятие общего решения. Будем считать числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ произвольными постоянными. Из (4) видим, что в таком случае любое решение $f(x)$ исходного уравнения будет зависеть от этих постоянных. Обратно, если имеется семейство функций $f(x) = \Psi(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, определенных на последовательности точек $x = x_0 + n$, где n — целое число, то, исключая из $n+1$ равенств

$$\begin{gathered} f(x)=\Psi(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), \\ f(x+1)=\Psi(x+1, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x+n)=\Psi(x+n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \end{gathered}$$

постоянные $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, получают разностное уравнение n-го порядка относительно $f(x)$.

Очевидно, что результат исключения не изменится, если считать эти постоянные произвольными периодическими функциями периода 1. Таким образом, общее решение разностного уравнения n-го порядка (при $\Delta x = 1$) зависит от n произвольных периодических функций периода 1.

Рассматривая линейные разностные уравнения в связи с вопросами рекуррентных рядов, Эйлер выяснил, что при решении разностных уравнений с шагом h вместо произвольных постоянных следует в общем случае вводить произвольные периодические функции с периодом h (Novi Commentarii, (1750)1753).

Изложенное показывает, что весьма сложные вопросы существования и единственности решения задачи с начальными данными для дифференциальных уравнений при их постановке для разностных уравнений решаются крайне просто. Этим в значительной мере объясняется, что теория уравнений в конечных разностях возникла и развивалась одновременно с теорией дифференциальных уравнений.

Переход от дифференциальных уравнений к разностным имел принципиальное значение в самой теории дифференциальных уравнений не только в XVIII, но и в XIX в. Существо вопроса заключается в принципиальной возможности предельного перехода при $h \to 0$ от разделенных разностей $\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ к производной $\frac{dy}{dx}$, при котором разностное уравнение переходит в дифференциальное.

Методы решения разностных уравнений в значительной степени аналогичны методам теории дифференциальных уравнений. Особенно отчетливо это проявилось в области линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами и решении некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка

$$\Delta y + M(x)\, y = N(x)$$

решил, следуя методу решения аналогичного дифференциального урав нения, Лагранж (Miscellanea Taurinensia, 1759). Приведем его решение. Замена $y = uz$ дает $\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z$. Это позволяет исходное уравнение разложить на два: $z\Delta u + uzM = 0$ и $u\Delta z + \Delta u\Delta z = N$. Из первого сразу следует $\frac{\Delta u}{u} = -M$; положив $u = e^t$, Лагранж в силу равенства $\Delta u = e^t(e^{\Delta t} - 1)$ получает новое уравнение $\frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -M$, т. е. $\Delta t = \ln(1 - M)$, следовательно, по методу суммирования $t = \Sigma \ln(1 - M)$ и $u = \Pi(1 - M)$, где Π — символ произведения. С помощью этого результата легко решается второе уравнение $\Delta z = \frac{N}{u + \Delta u}$, откуда и находится искомое решение $y = \prod(1 - M)\left(A + \sum\frac{N}{\Pi(1 - M')}\right)$. Для уточнения приведем современную запись решения уравнения $\Delta f(x) + P(x) f(x) = Q(x)$, получаемого с помощью замены $f(x) = u(x) V(x)$:

$$f(x) = \prod_{t=0}^{x-1} [1 - P(t)] \left\{\sum_{\nu=0}^{x-1} \frac{Q(\nu)}{\prod\limits_{t=0}^{\nu} [1 - P(t)]} + C\right\}.$$

В том же томе «Miscellanea Taurinensia», что и описанная выше работа Лагранжа, была опубликована его работа о неоднородном линейном разностном уравнении с постоянными коэффициентами любого порядка $y + A\Delta y + B\Delta^2 y + \ldots + Q\Delta^n y = x$. Лагранж здесь следует методу постоянных множителей, примененному Даламбером к линейным неоднородным дифференциальным уравнениям n-го порядка (Mém. Ac. Berlin. (1748)1750), который мы поясним на примере уравнения второго порядка:

$$y + A\frac{dy}{dx} + B\frac{d^2y}{dx^2} = X.$$

Положим $p = dy/dx$, $q = dp/dx$ (что сводит задачу к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений). Умножим эти два уравнения соответственно на числовые множители a и b и сложим произведения с данным уравнением; тогда

$$y + (A + a)p + (B + b)q - a\frac{dy}{dx} - b\frac{dp}{dx} = X.$$

Множители a и b подбираются так, чтобы свести дело к решению линейного уравнения порядка на единицу ниже данного, а именно: берутся $A + a = b/a$, $B + b = 0$, так что после исключения b для a получается квадратное уравнение

$$a^2 + Aa + B = 0$$

с корнями a_1, a_2. Если обозначить $y + (A + a)p = z$, то z оказывается решением уравнения первого порядка:

$$z - a\frac{dz}{dx} = X.$$

По двум значениям z_1, z_2, соответствующим a_1, a_2, находятся два частных решения y_1, y_2 данного уравнения, для чего нужно лишь решить линейную систему:

$$y + (A + a_1)\frac{dz_1}{dx} = z_1,$$
$$y + (A + a_2)\frac{dz_2}{dx} = z_2.$$

Все это легко распространяется на неоднородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка; случаи кратных и комплексных корней мы оставим в стороне.

Применив этот довольно сложный прием к линейному разностному уравнению n-го порядка, Лагранж получил соответствующее ему алгебраическое уравнение n-й степени, позволяющее совершенно аналогично найти n частных решений и затем общее решение.

Громоздкость приема не удовлетворила Лагранжа и в «Nouv. Mém. Berlin», (1775) 1777, он применил к однородному линейному уравнению с постоянным коэффициентом вида

$$Ay(x) + By(x+1) + \ldots + Ny(x+n) = 0$$

показательную подстановку $y = m^x$, которая тотчас дает алгебраическое уравнение для определения m:

$$A + Bm + \ldots Nm^n = 0,$$

о применении аналогичной подстановки к родственному классу дифференциальных уравнений Эйлером (1743) будет сказано далее (см. стр. 383).

Неоднородные линейные разностные уравнения изучались почти одновременно Лапласом и Лагранжем. Подробное исследование возможности нахождения решения неоднородного разностного уравнения n-го порядка с помощью решения соответствующего однородного уравнения было проведено Лагранжем в том же томе берлинских записок. Решение было достигнуто излюбленным методом Лагранжа — вариацией произвольных постоянных. Решение неоднородного уравнения Лагранж ищет в виде $y(x) = C'(x)z'(x) + \ldots + C^{(n)}(x)z^{(n)}(x)$, где $z', \ldots, z^{(n)}$ — решения однородного разностного уравнения. Для неизвестных функций $C'(x), \ldots, C^{(n)}(x)$ возникает система уравнений $\Delta C'(x) = \varphi^{(1)}(x)$, $\Delta C''(x) = \varphi^{(2)}(x), \ldots, \Delta C^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$, где $\varphi^{(k)}(x)$— известные функции. Отсюда нужные функции $C^{(k)}(x)$ определяются методом суммирования. Несколько ранее та же задача была по-другому решена Лапласом в «Miscellanea Taurinensia» за 1766—1769 гг. и в статье, подготовленной, вероятно, в 1771 г. и опубликованной в «Mém. prés. par div. sav» (1773)1776). Между прочим, в последней из упомянутых статей Лаплас указал, что можно, не нарушая общности, принимать постоянную разность аргумента равной единице, в чем за ним последовали и другие ученые.

Нелинейные разностные уравнения

Вкратце остановимся на результатах, полученных в XVIII в. в решении нелинейных разностных уравнений. Такие уравнения возникали при интегрировании уравнений с частными производными и при решении функциональных уравнений. Последние нередко появлялись при изучении итерационных процессов в задачах приближенного анализа. Для иллюстрации приведем прием, с помощью которого Лаплас свел к разностному функциональное уравнение

$$\Phi[\varphi(x)] = H(x)\Phi[\psi(x)] + X(x),$$

где φ, ψ, H, X — заданные функции, а Φ — неизвестная функция (Mém. de math. et phys. présentés par divers, savants, (1773) 1776). Основная идея состоит в том, что функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ рассматриваются как значения новой неизвестной функции u_z в соседних узлах. С этой целью и делаются подстановки $u_z = \psi(x)$, $u_{z+1} = \varphi(x)$. Обращение первого из этих равенств $x = \Gamma(u_z)$ дает $u_{z+1} = \varphi[\Gamma(u_z)] = \Pi(u_z)$. Эта нелинейная рекуррентная формула определяет u_z как функцию z, следовательно, и остальные функции определяются как функции z. Поэтому подстановка в исходное уравнение приводит к уравнению в конечных разностях

$$y_{z+1} = L_z y_z + z_z,$$

где y_z соответствует $\Phi(u_z)$. В этой же работе Лаплас исследует уравнение $f(mx) = f(x^n) - p$, где m, n, p — постоянные. Аналогичный прием, т. е. подстановки $mx = u(z)$ и $x^n = u(z+1)$, приводит к нелинейному разностному уравнению $u(z+1) = \left[\frac{u(z)}{m}\right]^n$.

В некоторых случаях с помощью «метода дифференцирования» нелинейные разностные уравнения удавалось свести к линейным.

Приведем типичный пример, принадлежащий Монжу (Mém. Ac. Paris, (1783)1786). Требуется решить уравнение $(\Delta y)^2 = b^2$. Найдя почленно первые разности, Монж приходит к соотношению $\Delta^2 y\,[2\Delta y + \Delta^2 y] = 0$. Множитель $\Delta^2 y$ дает решение $y = Bx + A$ и в силу исходного уравнения $y(x) = \pm bx + A$. Второй множитель сразу же дает равенство $2y + \Delta y = C_1$, т. е. $y(x+1) + y(x) = C$. В результате Монж приходит к четырем решениям, которые он называет общими интегралами:

$$y(x) = \pm bx + A, \qquad y(x) = \pm(-1)^x \frac{b}{2} + C.$$

Из других методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, перенесенных на разностные, отметим метод интегрирующего множителя. В частности, член Берлинской академии швейцарец Жан Трамблей (1749—1811) с помощью множителя вида $P(x) + \Delta P$ вновь получил решение неоднородного линейного уравнения $\Delta y + M(x)y = N(x)$ (Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1799—1800)1803). Умножение уравнения на $P + \Delta P$ показывает, что левая часть результата этого умножения становится полной разностью произведения Py, если P удовлетворяет разностному уравнению $\frac{\Delta P}{P + \Delta P} = M$. Последнее с помощью подстановки $P = e^t$ Трамблей сводит к простому разностному уравнению $\Delta t = \ln\frac{1}{1-M}$, решаемому далее методом суммирования. Окончательное решение исходного разностного уравнения, полученное Трамблеем, с точностью до обозначений совпадает с указанным выше решением Лагранжа (вместо символов разности Δ и суммирования Σ Трамблей пишет соответственно δ и S).

Следуя Лагранжу в теории особых решений, Жак Шарль (1746—1823), профессор физики в Парижском Музее искусств и ремесел, распространил на разностные уравнения понятие особого интеграла (Mém. Ac. Paris, (1786)1788). Укажем схему рассуждения. Если $v = 0$ интеграл разностного уравнения $z = 0$, то последнее возникает, говорит Шарль, при исключении постоянной интегрирования из уравнений $v=0$ и $\delta v = 0$, где δv — вариация v, возникающая при вариации x и y в разностном смысле при постоянном a. Если же варьируется и a, то получают соотношение $\Delta v = \delta v + R\Delta a$. Поэтому если оказывается, что $R = 0$, то в результате исключения $a = a(x)$ вновь приходят к уравнению $z = 0$, как и при постоянном a. Таким образом, особый интеграл получается путем исключения a из равенств $v = 0$, $R = 0$. Отличие от случая дифференциальных уравнений, замечает Шарль, состоит в том, что a приходится теперь находить из уравнения, содержащего не только a, но и Δa. В силу этого в особый интеграл вновь вводится произвольное постоянное. Шарль поясняет этот прием на примере, являющемся разностным аналогом уравнения Риккати: $gy = x\Delta y + \frac{(\Delta y^2)}{4n^2}$, $\Delta x = g$, для которого общий интеграл имеет вид $gy = 2nax + a^2$. Метод дифференцирования (в разностном смысле) приводит для определения $a = a(x)$ к уравнению $2n(x + g) + 2a + \Delta a = 0$.

Дифференциально-разностные уравнения

В конце XVIII в. начинается исследование таких разностных уравнений, в которых значения x не образуют арифметической прогрессии. Другими словами, в таких уравнениях разность Δx рассматривается как заданная функция x. Так, Монж в связи с изучением произвольных функций, входящих в интегралы уравнений с частными производными (Mém. de math et phys. présentes par Savants divers, 1780), рассмотрел уравнение $\Delta y + Ay + B = 0$ в предположениях: 1) $\Delta x = a + bx$, 2) $\Delta x = ax^n - x$. В первом из этих случаев он использовал подстановку $a + bx = e^{\omega}$, во втором — подстановку $x^n = e^{\omega}$, дающую уравнение $\Delta\omega = (n - 1)\omega + n \ln a$. Этой задачей занимался одновременно организатор и первый президент Итальянского общества наук Антонио Марио Лорньа (1735—1796), считая, что Δx есть заданная функция $X = X(x)$ (Mem. Mat. Fis. Soc. It., 1782). Последовательные значения $y, y', y'', \ldots$, возникающие при таком определении разности, понимались в том смысле, что последующее значение возникало из предыдущего путем замены x на $x + X(x)$, таким образом, если $y = y(x)$, то $y'(x) = y(x + X(x))$, $y''(x) = y'(x + X(x))$ и т.д.

Вместе с этим новым направлением на рубеже XVIII и XIX вв. начинается изучение обширного класса так называемых дифференциально-разностных уравнений, первые примеры которых были рассмотрены Кондорсе (Mém. Ac. Paris, (1771)1774), Лапласом (там же, (1779)1782) и Лорньа (Mem. Mat. Fis. Soc. It., 1788). Такие уравнения наряду с разностями неизвестных функций содержат их дифференциалы или производные. Вследствие того что дифференциалы считались бесконечно малыми разностями, подобные уравнения и получили название уравнений со смешанными разностями. Первые попытки их классификации, произведенные в 1806 г. парижским ученым Ж. Б. Био, связаны с алгебраическим источником их возникновения. Существенную роль в этой трактовке Био имели приемы Лагранжа построения особых решений уравнений с помощью метода вариации произвольных постоянных Поясним основное содержание этого алгебраического подхода.

Первый — самый простой класс уравнений — возникает в трактовке Био следующим образом. Пусть задано соотношение $V(x, y, a, b) = 0$, где a и b — произвольные постоянные. Введя обозначения $y_1 = y + \Delta y$, $x_1 = x + \Delta x$, $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dy_1}{dx} = p_1$, т. е. $p_1 = \frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx}$, и предполагая, что Δx фиксировано, Био ставит задачу исключения произвольных постоянных из системы трех равенств:

$$V(x, y, a, b) = 0, \qquad V(x + \Delta x, y + \Delta y, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Результат исключения будет представлять, очевидно, соотношение вида $F(x, y, y + \Delta y, p) = 0$, т. е. дифференциально-разностное уравнение первого порядка. Из самого построения следует, что соотношение $V(x, y, a, b) = 0$ определяет функцию $y = y(x, a, b)$, удовлетворяющую полученному дифференциально-разностному уравнению, по терминологии Био — интеграл этого уравнения.

Второй подход таков. Исходным является соотношение $u_1(x, y, x_1, y_1, a) = 0$. Дифференцируя полным образом по x, получаем соотношение

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + p\frac{\partial u_1}{\partial y} + p_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} = 0.$$

Исключая из этих двух уравнений постоянную a, находим связь между x, y, y_1, p и p_1, т. е. также дифференциально-разностное уравнение первого порядка. Существенно отметить различие от предыдущих построений. Оно объясняется тем, что в этом втором случае выражения $\partial u_1/\partial y$ и $\partial u_1/\partial y_1$ будут содержать результаты последовательного применения операций дифференцирования и взятия разностей.

Третий способ интересен для перенесения на эти уравнения метода вариации произвольных постоянных. В этом случае исходным является уравнение $u\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a(x)\right) = 0$, причем $a(x) = a(x_1)$.

Одним из истоков возникновения уравнений со смешанными разностями явилось стремление синтезировать результаты математического анализа и исчисления конечных разностей.

В третьем томе не раз упоминавшегося «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» С. Лакруа (изд. 2, Париж, 1819), содержащем превосходное изложение исчисления конечных разностей и специальную главу об уравнениях со смешанными разностями, это стремление высказано уже со всею определенностью.

Другой источник был связан с отдельными задачами геометрии и физики малых колебаний. В этом отношении должны быть отмечены не только исследования Кондорсе 1771 г., но и значительно более ранняя работа И. Бернулли (1728) о колебаниях струны.

В заключение отметим, что уравнения со смешанными разностями образуют простейший класс так называемых дифференциально-функциональных уравнений, т. е. таких уравнений, где производные неизвестной функции и сами функции входят при разных значениях аргумента.

Для пояснения рассмотрим простейший пример: пусть

$$\frac{dy}{dx} = f(x, \Delta y),$$

где $\Delta y = y(x+h) - y(x)$. Заменяя значение Δy, получаем

$$\frac{dy}{dx} = f[x, y(x+h) - y(x)].$$

В более общем случае имеют, например, уравнение

$$\frac{dy(x)}{dx} = f[x, y(x), y(x+\tau(x))],$$

где $\tau(x)$ — заданная функция, определяющая отклонение аргумента. При $\tau(x) < 0$ имеют уравнение с запаздывающим аргументом, при $\tau(x) > 0$ — с опережающим. В динамике к уравнениям с запаздыванием приходят в том случае, если скорость или ускорение зависят от более раннего состояния системы. Эти уравнения весьма важны и в современной теории автоматического регулирования, поскольку при автоматическом регулировании любой системы неизбежно некоторое запаздывание на сигналы управления. Методы решений дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами интенсивно разрабатываются в наше время.