СЕДЬМАЯ ГЛАВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Структура и особенности анализа в XVIII в.

Заканчивая второй том, мы привели слова Лейбница, в которых он выражал надежду еще в XVII в. довести до завершения, по крайней мере в главном, «анализ чисел и линий», с тем чтобы сосредоточить усилия человеческого разума на физике (см. т. II, стр. 287). Так Лейбниц писал в 1691 г., т. е. всего через семь лет после выхода в свет знаменитого мемуара по дифференциальному исчислению. Прошло немного времени, и Лейбниц убедился, что до завершения анализа очень далеко. В 1708 г. он уже предупреждал: «Не следует удивляться, что анализ бесконечно малых делает только первые шаги и что мы совсем не хозяева положения ни в квадратурах, ни еще менее в обратной задаче касательных и, в еще меньшей мере, при решении дифференциальных уравнений. . .»[1]. И в самом деле, все XVIII столетие прошло в постоянном распространении и обогащении математического анализа, в значительной мере обусловленном запросами механики и затем математической физики, особенно теории колебательных процессов.

Мы уже отмечали некоторые характерные черты развития математического анализа в рассматриваемое время. Одной из них было его разветвление на несколько наук — отделение от основного ствола, дифференциального и интегрального исчисления, новых больших отделов — теории дифференциальных уравнений, в свою очередь расчленившейся на учение об обыкновенных дифференциальных уравнениях и уравнения с частными производными, вариационного исчисления, теории специальных функций, начал теории функций комплексного переменного. Выделяется также, хотя это не нашло внешнего выражения в тогдашней терминологии (так долго обстояло дело и с дифференциальными уравнениями), учение о бесконечных рядах. В рамках дифференциального и интегрального исчисления в качестве нового отдела вырастает анализ функций многих переменных.

Другой особенностью анализа XVIII в. являлось его постепенное преобразование в науку, принципиально независимую от геометрии и механики, а в смысле общности и абстрактности своих идей им предшествующую. Мы видели, что еще анализ бесконечно малых Ньютона и Лейбница нес яркую печать своей кровной связи с механикой и геометрией. Это относится не только к основным понятиям флюенты, флюксии и мо-

---

[1] Цит. по публикации: *P. Costabel.* De Scientia infiniti. In: Leibniz. Aspects de l'Homme et de l'Oeuvre. Paris, 1968, p. 115.

мента или же дифференциала и интеграла, но и к математическому мышлению в целом, которое часто обращалось к пространственным или физическим представлениям и аналогиям, как к средству вывода и обоснования. Конечно, у обоих основоположников исчисления бесконечно малых, особенно у Лейбница, уже отчетливо намечалась и тенденция к его трактовке, как самостоятельной, собственно аналитической науки. В XVIII в. эта тенденция становится господствующей. Понятия анализа все более выступают как своего рода алгебраические формы, обладающие прежде всего арифметическим содержанием, а некоторые соответствующие геометрические или физические представления (например, наклон касательной или скорость) — лишь как их конкретные интерпретации. Этот процесс алгебраизации и арифметизации, особенно усилившийся в XIX в., имел величайшее значение для дальнейшего развития математики в целом.

Становление анализа как самостоятельной науки отразилось на содержании основных монографий и учебных руководств. Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению И. Бернулли и учебник дифференциального исчисления Лопиталя, составленные в конце XVII в., включали очень небольшое число аналитических понятий, обычно поясняемых на чертежах, и очень ограниченный запас общих теорем и правил, но зато множество геометрических и физических, более всего — механических или оптических, задач (см. т. II, стр. 267—270, 284—285). Первый том «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлера, так же как его курсы дифференциального исчисления (1755) и интегрального исчисления с теорией дифференциальных уравнений (1768—1770), были изложены чисто аналитически и в них отсутствовали какие-либо геометрические и механические интерпретации или приложения (ср. стр. 246). Поучительно в этом отношении сравнить и построение первого курса вариационного исчисления «Метода нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума» (1744) Эйлера, где геометрические представления играли существенную роль, как это видно из названия труда, с чисто аналитическим изложением предмета в более поздних мемуарах Лагранжа и того же Эйлера, опубликованных в 60-е годы (ср. гл. X). Строго аналитически построена была и «Теория аналитических функций» (1797) Лагранжа, где приложения к геометрии и механике были выделены особо (см. стр. 285). Как говорилось в первой главе, начиная с 30-х годов XVIII в., сама теоретическая (аналитическая) механика превращается в своеобразный отдел анализа, который в конце концов выдвигается как универсальный метод исследования природы. Лаплас был уверен в принципиальной возможности — для бесконечного разума — выразить дифференциальными уравнениями все законы мира (см. стр. 9). Фурье в своей «Аналитической теории тепла» (Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822) заявил: «Математический анализ столь же обширен, как и сама природа; он определяет все чувственные отношения, изменяет времена, пространства, силы, температуры» [1].

Это изменение положения анализа среди других математических наук сопровождалось переоценкой, точнее сказать, обесценением доказательств, состоящих в обращении к интуитивно-физической или геометрической наглядности. Правда, Маклорен в «Трактате о флюксиях» (1742) еще исходил из аксиом механического характера, но большинство математиков следовало иному пути. Даламбер счел нужным освободить метод

[1] *J. B. Fourier.* Oeuvres, v. I. Paris, 1888, p. XXIII.

пределов Ньютона от понятий движения и скорости, принадлежащих менее отвлеченной, чем анализ, науке — механике. Во введении к «Теории аналитических функций» Лагранж, в противоположность Ньютону и Маклорену, подчеркивал, что «вводить в исчисление, имеющее предметом только алгебраические величины, движение, значит вводить в него чужеродную идею», и добавлял: «мы отнюдь не обладаем достаточно четким понятием о том, что есть скорость точки в любое мгновение, в случае когда скорость переменная»[1]. Для Ньютона производная какой-либо величины была скорость ее течения, для Лагранжа скорость изменения величины — ее производной по времени.

Впрочем, ученые XVIII в. не питали какого-либо недоверия к механической или геометрической интуиции, ограниченность которой обнаружилась много позднее. В безусловном существовании таких величин, как площадь или длина непрерывной кривой и других, аналогичных, никто не сомневался. Некоторые математики по-прежнему считали правомерным доказывать аналитические предложения с помощью обращения к пространственным представлениям. Так, С. Е. Гурьев (1811) и французский ученый, особенно известный своими работами по механике, Л. Пуансо (1815) доказывали существование производной (непрерывной) функции всюду, за исключением, быть может, отдельных значений аргумента, ссылаясь на «очевидное» наличие касательной к (непрерывной) плоской кривой во всех ее точках, за исключением, быть может, отдельных точек, где касательная не определена или образует прямой угол с осью абсцисс. И все же геометрическая аргументация, как таковая, удовлетворяла далеко не всех. Так, выдающийся французский математик и физик А. М. Ампер предпринял попытку аналитически доказать дифференцируемость, вообще говоря, непрерывной функции (1806). Другое доказательство, принадлежащее французскому математику Ж. Ф. М. Бине, привел в своем курсе анализа Лакруа.

Ярко и последовательно выразил убеждение в необходимости самостоятельного обоснования анализа знаменитый чешский мыслитель Бернард Больцано (1781—1848), последний в ряду великих математиков-любителей. Философ и богослов по образованию, Больцано в течение пятнадцати лет с 1805 г. занимал в Пражском университете кафедру истории религии. В 1820 г. власти навсегда отстранили его от преподавания за пропаганду свободомыслия в общественных и религиозных вопросах. Свою концепцию математики и, в частности, анализа Больцано высказал в брошюре, посвященной доказательству того свойства непрерывной функции одного переменного, что при перемене знака она по крайней мере один раз принимает нулевое значение. Полное название этого небольшого, но чрезвычайно богатого новыми идеями сочинения таково: «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» (Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege. Prag, 1817).

По времени брошюра Больцано выходит за границы рассматриваемой нами эпохи, и мы не можем здесь разбирать самое доказательство, для которого автору потребовалось ввести новое, современное определение

[1] *J. L. Lagrange*. Théorie des fonctions analytique. Paris, 1813, p. 3.

непрерывной функции, теорему о верхней грани (так называемую теперь теорему Больцано — Вейерштрасса) и общий признак сходимости последовательности (так называемый критерий Больцано — Коши). Мы коротко остановимся только на общей установке этого труда, великолепно выразившего основные тенденции реформы анализа, подготовленной его развитием в XVIII в., но осуществленной лишь в XIX столетии.

Перечисляя многочисленные доказательства теоремы, которой посвящен его труд, среди них Кестнера, Клеро, Лакруа и Лагранжа, Больцано разделяет их на две группы. Доказательства одной группы основаны на представлении, что непрерывная линия, чьи ординаты сперва положительны, а затем отрицательны (или наоборот), должна пересекать ось абсцисс в какой-либо точке между этими ординатами. В другой группе доказательств дело сведено к рассмотрению прямолинейного движения двух тел, из которых одно сначала находится позади другого, а затем впереди, так что первое в какой-то момент проходит мимо второго. Соглашаясь с очевидностью таких геометрических или механических положений, Больцано писал: «Но столь же очевидно также, что нетерпимым нарушением хорошего метода является, когда истины чистой (или общей) математики (т. е. арифметики, алгебры или анализа) желают вывести из соображений, которые принадлежат только прикладной (или частной) ее части, а именно геометрии... Подобное геометрическое доказательство, как в большинстве случаев, так и в настоящем, составляет настоящий круг. Ибо, хотя геометрическая истина, на которую здесь ссылаются..., вполне очевидна, а значит не нуждается в доказательстве для уверения, она тем не менее нуждается в обосновании» [1]. Эта истина не принадлежит к числу «простых» или «основных», но есть «производная истина» или теорема, «объективное обоснование» которой и состоит в том общем свойстве непрерывных функций, о котором идет речь. Совершенно сходно отвергает Больцано методологическое и логическое значение механических доказательств, ибо «понятие *времени*, а тем более *движения* столь же чужеродно в общей математике, как и понятие пространства» [2].

Программная по существу брошюра Больцано не привлекла внимания, какого заслуживала (хотя возможно, что она не осталась без влияния на формирование взглядов Коши), а многие другие свои замечательные открытия в теории функций действительного переменного он изложил в рукописях, прочитанных только через несколько десятков лет. Но одновременно с Больцано к реформе анализа на тех же началах приступили Гаусс и Коши. При этом как раз Коши, который не только применял свои идеи в специальных работах, как Гаусс, но и распространял их с кафедры и в целом ряде возникших из лекций печатных курсов, особенно содействовал реформе, за которой во второй половине XIX в. необходимо последовала более глубокая арифметизация анализа, т. е. сведение в конечном итоге его понятий и их отношений к свойствам множества натуральных чисел. Принципиальное значение имело при этом построение на рубеже 60-х и 70-х годов новых теорий действительного числа. В ходе теоретико-функциональных исследований выяснилось, что в ряде фун-

---

[1] См. *Э. Кольман*. Бернард Больцано. М., 1955, стр. 171—172 (в этой книге помещен полный русский перевод цитируемой брошюры Больцано.)
[2] Там же, стр. 173.

Б. Больцано
(с литографии И. Крихубера, сделанной в 1849 г.
по портрету Г. Гольпейна 1839 г.; хранится в Архиве
Австрийской национальной библиотеки

даментальных вопросов внушаемые всем со школьной скамьи геометрические представления отказываются служить и могут даже ввести в заблуждение. Так, около 1870 г. Вейерштрасс построил пример непрерывной и вместе с тем нигде не дифференцируемой на отрезке функции, т. е. непрерывной плоской кривой, ни в одной точке некоторой дуги не имеющей определенной касательной. Подобные конструкции были невообразимы и немыслимы для разума, опиравшегося только на привычную пространственную интуицию [1].

Наконец, третьей особенностью анализа XVIII в. было, как выразился в предисловии к своему введению в дифференциальное и интегральное исчисление — «Алгебрическому анализу» (Analyse algèbrique. Paris, 1821) Коши, недостаточно осмотрительное употребление «наведений» и «суждений, извлекаемых из алгебраического обобщения», постоянная готовность «дать безграничный простор алгебрическим формулам, между тем как в действительности большая часть этих формул справедлива только

[1] На сорок лет ранее другой такой пример построил Больцано, но он долгое время оставался никому, в том числе Вейерштрассу, не известным. Сам Больцано доказал недифференцируемость построенной им функции на некотором всюду плотном множестве точек.

при известных условиях и то для некоторых значений количеств, в них заключающихся» [1]. Как в арифметике и алгебре первоначально механически распространяли свойства целых чисел на дроби, положительных чисел — на отрицательные и действительных чисел — на мнимые, так и в анализе формально переносили свойства конечных выражений на бесконечные, сходящихся рядов на расходящиеся, интегралов непрерывных функций на несобственные и т. д. Сравнивая положение дел в конце XVII и в XVIII вв., А. Н. Колмогоров пишет: «Если при создании анализа бесконечно малых сказывалось неумение логически справиться с идеями, имевшими полную наглядную убедительность, то теперь открыто проповедуется право вычислять по обычным правилам с лишенными непосредственного смысла математическими выражениями, не опираясь ни на наглядность, ни на какое-либо логическое оправдание законности таких операций» [2].

Грубых ошибок при этом обычно избегали, руководясь чутьем, но иногда наталкивались на противоречия и парадоксы, вызывавшие попытки устранить первые и объяснить вторые. Несмотря на преобладающий формальный подход к разработке и применению аппарата анализа, в XVIII в. широко велось также изучение его оснований. И хотя окончательные результаты получить здесь не удалось, но были существенно подготовлены как реформа, начатая Больцано, Гауссом и Коши, так и некоторые еще более поздние исследования, например в теории суммирования расходящихся рядов.

Руководства Эйлера по анализу

Первое место в разработке дифференциального и интегрального исчисления, как и всего анализа в целом, принадлежало в течение почти пятидесяти лет рассматриваемой эпохи Эйлеру. Его шеститомная трилогия (один том которой мы подробно рассмотрели ранее) имела особенное значение в математическом образовании нескольких поколений ученых. В ней он оригинально переработал огромную сумму знаний во всех отделах анализа, в ней, как впрочем, и в других работах, поставил целый ряд проблем, долгое время продолжавших привлекать внимание современников и потомства. Очень значительная часть изложенных в трилогии результатов принадлежала при этом самому Эйлеру. Ранее других вышло «Введение в анализ бесконечных» (Introductio in analysin infinitorum, t. 1—2, Lausannae, 1748). Первый том «Введения в анализ бесконечных» содержит изложение теории функций без средств дифференциального исчисления — общие вопросы и исследование основных классов элементарных функций с широким применением бесконечных рядов, произведений и непрерывных дробей; второй том — аналитическую и алгебраическую геометрию (см. гл. V). Впрочем, в первом томе рассматриваются также некоторые задачи теории чисел (см. гл. III), а во втором продолжается разбор понятия функции и исследуются некоторые трансцендентные кривые. Через семь лет в Берлине увидело свет «Дифференциальное исчисление» (Institutiones calculi differentialis, 1755) в двух частях: в первой было изложено само исчисление в узком смысле слова, а во второй —

---

[1] *О. Л. Коши.* Алгебрический анализ. Перевод Ф. Эвальда, В. Григорьева, А. Ильина. Лейпциг, 1864, стр. VI.
[2] *А. Н. Колмогоров.* Математика. Большая советская энциклопедия. Изд. 2, т. 25, стр. 474.

его применение к теории рядов, алгебраических и трансцендентных уравнений, разысканию экстремумов и (предельных) значений неопределенных выражений, а также к некоторым другим вопросам. Геометрическим приложениям дифференциального исчисления Эйлер предполагал посвятить отдельную монографию, но написал лишь часть ее, изданную посмертно (1862). Наконец, почти пятнадцать лет спустя появилось «Интегральное исчисление» (Institutiones calculi integrali, v. 1—3. Petropoli, 1768—1770). Содержание этого руководства гораздо шире, чем говорит теперешнему читателю его название. Интегрирование функций одного переменного (опять-таки без приложений в геометрии) составляет лишь первый раздел и небольшую часть второго раздела первого тома; второй же раздел отведен интегрированию обыкновенных дифференциальных уравне-

Титульный лист первого тома
«Введения в анализ бесконечных» Л. Эйлера (Лозанна, 1748)

INTRODUCTIO

IN ANALYSIN

INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, *& Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

ний первого порядка. Во втором томе рассмотрены уравнения высших порядков и в третьем томе — уравнения с частными производными. В третьем же томе, в специальном большом приложении по-новому изложено, в развитие идей Лагранжа, вариационное исчисление, которому Эйлер за четверть века до того посвятил свой основоположный «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» (1744; см. гл. X).

Трилогия Эйлера явилась основой последующих руководств и преподавания. И хотя в изложение многих вопросов были затем внесены радикальные изменения, ее влияние заметно даже в учебниках нашего

Титульный лист «Дифференциального исчисления» Л. Эйлера (1755)

INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.

времени. Успех книг Эйлера объяснялся как богатством содержания, так и замечательным порядком, простотой и ясностью (в рамках тогдашних требований к строгости) изложения, всегда поясняемого превосходными многочисленными примерами. Для Эйлера было характерно такое освещение вопроса, при котором читатель как бы соучаствует с автором в его решении, вместе преодолевая встречающиеся попутно трудности. Чтение руководств Эйлера не утрачивает познавательной ценности и в наши дни. Это особенно относится, пожалуй, к первому тому «Введения в анализ бесконечных». Здесь молодой любитель математики может познакомиться в легко доступной и увлекательной форме со многими интереснейшими задачами, которые при их современной трактовке требуют глубокой специальной подготовки.

Титульный лист первого тома «Интегрального исчисления» Л. Эйлера (Петербург, 1768)

INSTITVTIONVM

CALCVLI INTEGRALIS

VOLVMEN PRIMVM

IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. [illegible]RVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI

Impens. Academiae Imperialis S[illegible]m

1768.

Развитие понятия функции

В предисловии к «Введению в анализ бесконечных» Эйлер впервые отчетливо выразил ту мысль, что анализ есть общая наука о функциях, что, как он писал, «весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций» [1].

Мы знаем, что И. Бернулли определил функцию как количество, составленное каким угодно способом из переменной и постоянных (см. т. II, стр. 147). В первой главе первого тома «Введения в анализ бесконечных» Эйлер, уточняя определение своего учителя, подчеркнул, что функции задаются формулами: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного и чисел или постоянных количеств» [2]. При этом делается шаг вперед принципиальной важности; независимая переменная рассматривается как совокупность всех действительных и мнимых чисел, так что функции комплексного переменного сразу вводятся на равных правах с функциями действительного переменного.

Но о каких способах составления аналитических выражений идет речь? Этот вопрос — в другой терминологии — возникал еще в XVII в. В V определении «Истинной квадратуры круга и гиперболы» (1667) Дж. Грегори писал, что одна величина называется составленной (compositum) из других, если получается из них с помощью четырех элементарных действий, извлечения корня или какой-нибудь другой мыслимой операции (quacunque imaginabili operatione); при этом он имел в виду переход к пределу последовательности (ср. т. II, стр. 151) [3]. Эйлер в добавление к приведенному определению называет алгебраические действия, из трансцендентных — показательную и логарифмическую операции и к ним присоединяет еще «бесчисленные другие, доставляемые интегральным исчислением» [4], подразумевая при этом и интегрирование дифференциальных уравнений (см. стр. 247). Далее Эйлер различает явные функции и неявные, зависящие от решения уравнений, и затем формулирует предложения о существовании обратной функции и функции, заданной параметрически (если y и x суть функции z, то y есть функция x и x есть функция y). Мы сейчас увидим, как все такие способы задания функций подводятся Эйлером под его первое определение, а пока отметим, что его классификация функций вся целиком вошла в употребление. В частности, функции делятся еще на однозначные и многозначные и выделяются классы четных и нечетных функций. В V главе рассмотрены функции многих переменных и, среди них, однородные функции.

В IV главе различные аналитические способы задания функций одного переменного Эйлер сводит к одному. Универсальной и наиболее удобной для выражения функций формулой объявляется, со ссылкой на всю практику вычислений, бесконечный степенной ряд вида

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$$

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I. Перевод Е. Л. Пацановского под редакцией И. Б. Погребысского. М., 1961, стр. 19.

[2] Там же, стр. 24.

[3] *M. Dehn, E. Hellinger.* On James Gregory's Vera Quadratura. In: *James Gregory.* Tercentenary memorial volume. London, 1939, p. 477.

[4] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 25.

Впрочем, добавляет Эйлер, для большей общности утверждения нужно допустить любые (рациональные) показатели и тогда уже «не будет никакого сомнения в том, что всякая функция может быть преобразована в такое бесконечное выражение

$$Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\ldots,$$

где показатели α, β, γ, δ и т.д. обозначают любые числа» [1]. Действительно, перечисленные Эйлером ранее операции, да и подавляющее большинство других известных тогда способов задания зависимостей, приводят к функциям, аналитическим во всей области их существования, кроме, быть может, отдельных случаев, когда они раскладываются в ряд по дробным или отрицательным степеням аргумента. Мы применили здесь слово «аналитический», которым в XVIII в. называли любые функции, употребительные в анализе (см. стр. 285), в нашем современном смысле: теперь аналитической называют функцию, представимую в области ее существования степенным рядом с натуральными показателями.

Однако, когда Эйлер писал первый том «Введения в анализ бесконечных», он уже знал, что в математике встречаются и не «аналитические» функции. В начале второго, геометрического тома, где естественно речь идет о функциях действительного переменного, плоские кривые и соответственно функции одного переменного подразделяются на непрерывные (continuae) и разрывные (discontinuae) или смешанные (mixtae). Эта терминология имела смысл, отличный от современного. Эйлер называл непрерывной линию или функцию, заданную во всей области определения одним и тем же аналитическим выражением, а разрывной или смешанной — линию, состоящую из дуг нескольких различных кривых, заданных каждая различными выражениями. Непрерывность означала, таким образом, неизменность аналитического закона, определяющего функцию или линию. В таком понимании две ветви гиперболы $y = 1/x$ с бесконечным разрывом при $x = 0$ образуют непрерывную линию (пример самого Эйлера), между тем как два встречающихся в начале координат луча с уравнениями $y = -x$ при $x < 0$ и $y = x$ при $x > 0$ составляют разрывную линию (ср. стр. 252). Класс функций, непрерывных в смысле Больцано — Коши, Эйлер особо не выделил и его свойства не исследовал, хотя в отдельных случаях, например, излагая методы приближенного интегрирования, учитывал непрерывность и наличие разрывов в этом современном смысле (см. стр. 346).

Различение непрерывных и разрывных функций основывалось у Эйлера на убеждении, которое разделяли и другие математики того времени, что задание непрерывной функции в каком-либо промежутке однозначно определяет ее значение повсюду. В статье «Об употреблении разрывных функций в анализе» (De usu functionum discontinuarum in analysi. Novi Commentarii, (1765) 1767) он писал, что все части непрерывных кривых соединены между собой теснейшим образом, так что ни в одной из частей не может произойти изменения без нарушения связи непрерывности. С другой стороны, все были убеждены, что совокупность функций, заданных в различных промежутках различными уравнениями, нельзя выра-

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 67. Это утверждение, восходящее к Ньютону и Лейбницу (см. т. II, стр. 227 и 265), выражало общую точку зрения математиков XVIII в. Напомним, что почти одновременно с Эйлером его высказал Даламбер (стр. 73).

зить одним аналитическим законом. И в этой же статье Эйлер указывал, что обыкновенно в анализе и в высшей геометрии имеют дело с непрерывными функциями, но в недавно открытом и еще мало разработанном интегрировании уравнений с частными дифференциалами дело обстоит иначе.

К расширенному пониманию функции Эйлер пришел еще в «Методе нахождения кривых линий» (1744), где ему понадобилось произвольно варьировать экстремальные линии на сколь угодно малых участках (см. стр. 459). Но с особенной ясностью необходимость в разрывных функциях обнаружилась при исследовании задачи о малых плоских колебаниях струны, которой Эйлер, вслед за Даламбером, занялся в конце 40-х годов. Задача выражается уравнением $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, общее решение которого Даламбер получил в виде суммы произвольных функций $y = f_1(x + at) + f_2(x - at)$. В конкретных случаях эти функции определяются по начальной форме струны и начальным скоростям ее точек. Эйлер считал, что эта форма, как и распределение скоростей, могут быть графически представлены любыми (кусочно-гладкими) кривыми, какие только можно вообразить себе начерченными «свободным влечением руки». А такие произвольные линии — разрывные, так как их нельзя, вообще говоря, выразить с помощью какого-либо одного аналитического уравнения,— даже в таком простом случае, когда в начальном положении струна, защемленная в средней точке, оттянута от прямолинейного состояния и имеет форму ломаной из двух отрезков. Более того, произвольная кривая может и не состоять из конечного числа дуг непрерывных линий.

Эту мысль Эйлер высказал в статье «О колебании струны», представленной им Берлинской академии в мае 1748 г. (Nova Acta Eruditorum, 1749; Mém. Ac. Berlin, (1748) 1750); она естественно распространялась и на другие задачи математической физики. Даламбер, в отличие от Эйлера, полагал, что допустимые начальные условия и соответственно решения уравнений с частными производными должны быть ограничены значительно более узким классом функций. Вспыхнувший между Даламбером и Эйлером спор вскоре осложнился выступлением Д. Бернулли, который предложил, исходя из физических соображений и принципа колебаний, общее решение задачи в виде тригонометрического ряда (1755). Д. Бернулли утверждал, что любая плоская кривая может быть выражена рядом по синусам, с чем не согласились ни Даламбер, ни Эйлер. Вслед за этим в знаменитом споре о струне приняли участие почти все крупные математики второй половины XVIII в. (см. стр. 416 и след.). Эйлер оставался на своих позициях до конца. В третьем томе «Интегрального исчисления» (1770), содержащем методы интегрирования уравнений с частными производными, он писал: «в то время как прежде рассмотренные интеграции давали только непрерывные функции, в данном случае в анализе появляются также разрывные функции, что до сих пор многим видным математикам представляется противоречащим его принципам. Особенная сила интеграций, рассматриваемых в этой книге, в том и состоит, что при них могут встречаться и разрывные функции; так что надо полагать, что благодаря этому существенно новому исчислению границы анализа значительно расширяются» [1].

Спор об объеме понятия функции и о классах функций, выразимых как суммы степенных или тригонометрических рядов или с помощью

[1] *Л. Эйлер*. Интегральное исчисление, т. III. Перевод Ф. И. Франкля. М., 1958, стр. 28.

еще каких-либо других операций анализа, имел чрезвычайное значение для развития оснований математики. К нему восходит развитие теории рядов Фурье, обобщения понятия интерала и вообще значительная часть теории функций действительного переменного. Мы еще вернемся к некоторым из выдвинутых в ходе дискуссий вопросов, которые были точнее поставлены и удовлетворительно решены только в XIX и XX вв., здесь же добавим только следующее.

Настаивая на необходимости расширения понятия функции, Эйлер был прав. Но он ошибался, думая, что функции, заданные в каком-либо промежутке несколькими различными формулами, не могут быть выражены в нем одной формулой. Впервые на это обратил внимание Жак Шарль, который показал, что функцию, определенную двумя или большим числом частных законов, скажем ту же ломаную, составленную из отрезков двух прямых, можно всегда выразить также одним общим законом (Mém. de math. et de phys. présentés par divers savants, 1785). Позднее, в 1807 г. Фурье показал, что разрывные, по Эйлеру, функции можно бывает (на любом конечном промежутке) представить одним аналитическим выражением — тригонометрическим рядом (ср. стр. 317). Тем самым разделение функций на непрерывные и смешанные, в смысле Эйлера, утрачивало значение. Если ограничиться рассмотрением функций на конечном промежутке, то и любая проведенная «свободным влечением руки» гладкая кривая без вертикальных касательных представима рядом Фурье, ибо такая кривая соответствует непрерывной функции с ограниченной и кусочно-непрерывной производной. Правда, произвольная непрерывная в данном промежутке непрерывная функция непредставима, вообще говоря, ее рядом Фурье, который может расходиться на этом промежутке в бесконечном множестве точек. Зато такая функция может быть представлена суммой равномерно сходящегося к ней ряда целых многочленов,— это доказал Вейерштрасс (1885). И вместе с тем Эйлер был опять-таки прав, утверждая, что его разрывная функция не выражается в общем случае степенным рядом: ведь функция, непрерывная в смысле Больцано — Коши и дифференцируемая, вообще говоря, неаналитическая.

Любопытно, что Эйлеру были известны примеры функций, выраженных одной формулой, но нигде не аналитических. Еще в переписке 1727—1728 гг. с И. Бернулли и затем во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) он рассмотрел функцию $y = (-1)^x$, график которой состоит из бесчисленного множества точек, лежащих всюду плотно на прямых $y = -1$ и $y = 1$, но, как он выражался, нигде не смежных (функция принимает действительные значения только при значениях x, равных несократимой дроби с нечетным знаменателем) [1]. Впрочем, такие парадоксальные, по выражению самого Эйлера, случаи в то время не беспокоили математиков, ибо не играли в их творчестве сколько-нибудь заметной роли.

Произведенное Эйлером выделение аналитических функций явилось событием величайшей важности, и мы увидим, что еще в XVIII в. были обнаружены некоторые основные их свойства. Одно из них, свойство единственности, было упомянуто выше. В XIX в. было доказано, что аналитическая функция определяется во всей области ее аналитичности, если заданы ее значения в каком бы то ни было промежутке (свойством единственности обладают и так называемые квазианалитические функции).

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. II, стр. 275—276.

Итак, определение функции, данное в первом томе «Введения в анализ бесконечных», оказалось слишком узким для анализа в целом. Это побудило Эйлера дать другое, более общее определение, которое, впрочем, он использовал уже ранее. Речь идет о концепции функции, как произвольно заданного соответствия между элементами множеств значений двух переменных величин, концепции, существовавшей издавна, но никогда еще отчетливо не сформулированной, поскольку в ней не нуждались. В первой главе «Введения в анализ бесконечных» Эйлер несколько раз обращается к исследованию свойств функций, аналитическое выражение которых заранее неизвестно, как в случаях функции обратной для данной, неявной функции или функции, заданной параметрически. Рассуждения, с помощью которых Эйлер обосновывает при этом существование функции в этих случаях, вовсе нестроги, но в данной связи интересно, что функция в них выступает просто как некоторое соответствие. Аналогично обстоит дело во второй и третьей главах, где разъясняется, что одна и та же функция может быть представлена с помощью бесконечного числа различных преобразуемых друг в друга аналитических выражений; общий субстрат всех этих выражений есть некоторое соответствие между элементами числовых множеств.

Свое новое определение функции Эйлер сформулировал в предисловии к «Дифференциальному исчислению» (1755): «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других» [1]. В цитированном определении ничего не говорится о способе вычисления значений функции. Лакруа в своем курсе анализа специально подчеркнул, что этот способ может и не быть известен: «Всякая величина,— писал он,— значение которой зависит от одной или нескольких других величин, называется их функцией, независимо от того, известны или неизвестны действия, с помощью которых следует от последних переходить к первой» [2]. Таким образом, классические определения функции, данные Н. И. Лобачевским (1834) и П. Лежен-Дирихле (1837), из которых второе перешло в позднейшие руководства, преемственно связаны с дефиницией, принадлежащей Эйлеру. Но математики рассматриваемого времени были далеки от мысли о тех особенностях в поведении функций, какие были обнаружены позднее, и, например, они считали само собой разумеющимся, что любая функция имеет на конечном интервале только конечное число максимумов и минимумов [3].

Новое определение функции, ничем не ограничивающее в принципе способ ее задания, удовлетворяло возросшим потребностям анализа, в котором все чаще встречались зависимости, аналитически не выраженные или даже, быть может, невыразимые. Это определение впоследствии оказалось логически уязвимым. Еще Г. Ганкель в 1870 г. отмечал чисто номинальный характер формулировки Дирихле, в которой ничего не говорится о том, как может быть установлено правило или закон соответствия между значениями функции и аргумента. Современный математико-логи-

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление. Перевод, статья и примечания М. Я. Выгодского. М.—Л., 1949, стр. 38.
[2] *S. F. Lacroix.* Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. 1. Éd. 2. Paris, 1810, p. 1.
[3] Ср. там же, стр. 241.

ческий анализ выявил трудности, кроющиеся в таком номинальном и вместе с тем претендующем на безграничную всеобщность определении. При всем том оно сыграло в истории математики положительную роль, раскрывая, казалось бы, безбрежный простор для все более сложных и смелых конструкций теории функций действительного переменного конца XIX и начала XX в., о которых и не думали Эйлер и его ближайшие преемники.

Проблемы обоснования анализа

Разработка инфинитезимальных методов всегда сопровождалась исследованием их логической правомерности и применяемых в них основных понятий. Во втором томе мы видели, что уже вскоре после выхода в свет мемуара Лейбница о «Новом методе» (1684) ему пришлось встать в защиту дифференциального исчисления от критики со стороны Б. Нивентейта (1695), который не замедлил выступить с контрвозражениями (1696), ставшими затем предметом обстоятельного разбора в «Ответе на вторые замечания по поводу принципов дифференциального исчисления Нивентейта» (Responsio ad ... B. Nieuwentijt considerationes secundas circa calculi differentialis principia editas. Basileae, 1701) Я. Германа. Мы упоминали там и о происходившей на рубеже XVII и XVIII вв. в Парижской академии наук дискуссии, главными участниками которой явились М. Ролль и П. Вариньон (см. т. II, стр. 281—282). Споры по этим вопросам, достигавшие порой высокого накала страстей, велись в печати, устно и в переписке. Метод флюксий, восторжествовавший в Англии, при жизни Ньютона не подвергался публичной критике,— от этого его некоторое время ограждал ставший почти непререкаемым авторитет автора «Математических начал» [1]. Первая треть XVIII в. прошла в области «метафизики исчисления бесконечно малых» (выражение Даламбера) довольно спокойно, если не считать отдельных споров, относящихся к применению расходящихся рядов, к которым мы обратимся позднее (стр. 300).

Вместе с тем ни метод пределов и флюксий Ньютона, ни дифференциальное исчисление Лейбница не находили единодушного признания. Едва-едва зарождающиеся или исчезающие начала текущих величин, мгновенные приращения, находящиеся на неуловимой грани между бытием и небытием, предельные значения отношений величин при их становлении нулями, систематические открытия точных результатов с помощью, казалось бы, неточных уравнений, возникающих при отбрасывании ничтожно малых величин, применение несравнимых величин (в смысле аксиомы Евдокса — Архимеда) — все это порождало недоумения, которые не могли долго оставаться скрытыми. Математики должны были снова обратиться к исследованию фундаментальных понятий и принципов анализа, особенно принципа замены инфинитезимальных величин им эквивалентными, выраженного в постулатах Иоганна Бернулли — Лопиталя (см. т. II, стр. 284). Особые хлопоты доставила та трудность, что дифференциал функции $y = f(x)$ мыслили и определяли как ее бесконечно малое приращение, но вычисляли как главную часть этого приращения, ли-

[1] Впрочем, высокий авторитет Ньютона не мог уберечь от неправильного словоупотребления и даже изложения основных идей теории флюксий в сочинениях целого ряда третьестепенных английских авторов, применявших, например, в одном и том же смысле термины бесконечно малое приращение или же момент и флюксия.

нейную относительно $\Delta x = dx$. Таким образом, одновременно принимали, что $dy = \Delta y$ $(= y'\Delta x + \varepsilon\Delta x)$ и $dy = y'\Delta x$.

Распространено мнение, что в XVIII в. уделяли мало внимания обоснованию анализа и что этот период, если воспользоваться крылатым выражением Ф. Клейна, был в развитии математики творческим, но не критическим. Представление это ошибочно. Математики того времени, в том числе самые выдающиеся, видели многие логические недостатки тогдашней системы анализа. Правда, инфинитезимальные процедуры нередко применялись слишком неосторожно, с точки зрения идеалов строгости, выработанных в следующем столетии, но это объяснялось не столько беззаботностью исследователей, сколько сравнительной безопасностью самих процедур в границах области изучавшихся тогда функций, почти без исключения аналитических. Вместе с тем, как мы увидим, математики XVIII в. оставались далеки от единодушия в философских вопросах анализа — единодушия, которое было достигнуто, казалось бы, навсегда в последней трети XIX в., но вскоре затем было вновь нарушено под напором ошеломляющих парадоксов теории множеств.

Карл Маркс, специально изучавший историю проблем обоснования анализа вплоть до Лагранжа, ярко обрисовал положение дел в первые десятилетия XVIII столетия в своих математических рукописях: «Итак, сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому» [1]. Такие отклики раздались ровно через 50 лет после опубликования мемуара Лейбница о «Новом методе» в философском лагере.

«Аналист» Беркли

В 1734 г. английский философ, выдающийся представитель субъективного идеализма, епископ Джордж Беркли (1685—1753) выпустил памфлет, известный под сокращенным названием «Аналист». Беркли преследовал при этом не одни научные цели, но и стремился своей критикой принципов анализа подорвать влияние свободомыслящих ученых, указывавших на противоречия в принципах богословия,— считается, что брошюра была обращена к Э. Галлею. Вот полное заглавие сочинения: «Аналист или рассуждение, обращенное к неверующему математику, где исследуется, более ли ясно воспринимаются или более ли очевидно выводятся предмет, принципы и умозаключения современного анализа, чем религиозные таинства и догматы веры» (The Analyst: or, a discourse adressed to an infidel mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles and inferences of the modern analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith. London, 1734). Следует указать, что развиваемая здесь Беркли концепция математического финитизма следовала из его философской системы, которую он сам охарактеризовал афоризмом «существовать — значит быть воспринимаемым»,

---

[1] *К. Маркс.* Математические рукописи. М., 1968, стр. 169.

esse — percipi. Бесконечное, как чувственно невоспринимаемое, не существует ни в большом, ни в малом. С точки зрения Беркли, не обладала реальным бытием, например, одна десятитысячная часть дюйма, и тем более не могло быть речи о бесконечной делимости какой-либо протяженной величины. Эти идеи Беркли подробно развил еще в «Трактате о началах человеческого познания» (A treatise concerning the principles of human understanding. London, 1710), где в § 123—132 выражено и отношение автора к современной ему высшей математике.

Но каковы бы ни были философские предпосылки и идеологические цели Беркли, его «Аналист» содержал остроумную и во многом справедливую критику, и Ф. Кеджори не без основания сравнил его аргументацию с бомбардировкой математического лагеря.

Возражения Беркли были направлены в равной мере против метода флюксий и исчисления бесконечно малых. Метод анализа он считал несогласным с логикой и писал, что, «как бы он ни был полезен, его можно рассматривать только как некую догадку; ловкую сноровку, искусство или скорее ухищрение, но не как метод научного доказательства» [1]. Невозможно понять, что такое приращение текущих величин в самом начале их зарождения или исчезновения, «это ни конечные величины, ни бесконечно малые, ни даже ничто. Не могли ли бы мы их назвать призраками почивших величин?» [2] Невозможно, далее, представить себе мгновенную скорость, т. е. скорость в данное мгновение и в данной точке, ибо понятие движения включает понятия о (конечных) пространстве и времени. В предложенном Ньютоном выводе флюксии степенной функции x^n Беркли усматривал нарушение логики. Ведь сперва составляется отношение приращения функции $(x+o)^n - x^n$ к приращению аргумента o, т. е. $nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \ldots$ к o или же $nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \ldots$ к 1, а затем принимается, что приращение исчезает, так что последнее предельное отношение оказывается равным отношению nx^{n-1} к 1. Однако, замечал Беркли, если при выводе какого-нибудь предложения принималось некоторое допущение, а в конце это допущение отвергается или заменяется противоположным, то все рассуждение теряет силу. «Когда он (Ньютон. — *Ред.*) говорит, пусть приращения исчезнут, т. е. пусть они станут ничем, т. е. пусть уже не будет приращений, то предыдущее допущение, что приращения были чем-то, что были приращения, отбрасывается, однако же последствия этого допущения, т. е. полученное в силу него выражение, сохраняются. Это... ложный способ рассуждения» [3]. И как вообще можно говорить об отношении между вещами, не имеющими величины? В этом возражении Беркли основывался на обычном в то время отождествлении понятий нуля и «ничего»; между тем нуль и равное нулю приращение существуют в такой же мере, как любое другое число и приращение, и представляют собой «нечто». Правда, Ньютон не разъяснил удовлетворительным образом, какой смысл надлежит приписывать неопределенному символу 0/0, который выражает отношение приращений флюенты и аргумента при их исчезновении, поскольку в его концепции переменные достигают своих предельных значений (см. т. II, стр. 242).

Как же с помощью анализа получаются правильные результаты? Беркли пришел к мысли, что это объясняется наличием в аналитических

---

[1] The Works of *G. Berkeley*, v. III. Ed. A. C. Fraser, London, 1901, p. 36.
[2] Там же, стр. 44.
[3] Там же, стр. 28.

выводах двух противоположных и взаимно уничтожающихся ошибок. Эту идею он пояснил на примере построения касательной TB в точке B параболы $y^2 = px$ (рис. 26), где $x = AP$, $y = PB$. В дифференциальном исчислении кривая рассматривается как многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон, а касательная как продолжение какой-либо такой стороны. В таком случае дуга BN, где N — точка, бесконечно близкая к B, есть прямой отрезок и треугольник TPB, где TP — подкасательная,

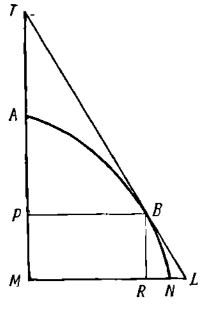

Рис. 26

подобен бесконечно малому треугольнику BRN, где $BR = PM = dx$ и $RN = dy$. Следовательно,

$$TP = y\,\frac{dx}{dy}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по правилам дифференциального исчисления

$$pdx = 2ydy, \qquad (2)$$

так что

$$TP = \frac{2y^2}{p} = 2x. \qquad (3)$$

Точность последнего равенства не вызывала сомнений: еще древние греки доказали без употребления принципов дифференциального исчисления, что подкасательная к параболе $y^2 = px$ равна удвоенной абсциссе точки касания.

На самом деле, указывал Беркли, оба уравнения (1) и (2) неверны. Первое ложно потому, что треугольник TPB подобен не фигуре BRN, но треугольнику BRL, где L — точка пересечения продолженной касательной и продолженной ординаты кривой, точным же является уравнение

$$TP = \frac{ydx}{dy + z}, \qquad (1')$$

где $z = NL$. Ложно и уравнение (2), основанное на отбрасывании высших степеней дифференциалов, а точно уравнение

$$pdx = 2ydy + (dy)^2, \qquad (2')$$

и поэтому на самом деле

$$TP = \frac{ydx}{\frac{pdx}{2y} - \frac{(dy)^2}{2y} + z}. \qquad (3')$$

Однако уравнения (3) и (3′) совпадают, ибо $z = (dy)^2/2y$, как это следует из 33-й теоремы первой книги «Конических сечений» Аполлония, в которой синтетически доказано, что прямая, проходящая через точки B и T так, что $TA = AP$, касается параболы AB в точке B. Таким образом, заключал Беркли, благодаря двойной ошибке приходят если не к научному познанию, то к истине. Впоследствии некоторые крупные математики пришли к выводу, что компенсация ошибок составляет движущую силу анализа и является вместе с тем строго научным методом познания, об этом говорится далее.

По мнению Беркли, высказанному еще в философском трактате 1710 г., можно было бы вовсе обойтись без нового анализа. «При тщательном исследовании скажется,— писал он,— что ни в каком случае не необходимо пользоваться бесконечно малыми частями конечных линий или вообще количеств или представлять их себе меньшими, чем наименьшее ощущаемое» [1]. С таким заключением математики, разумеется, согласиться не могли, но «действительно им крайне необходимо было найти защиту от философски-теологически-юмористических атак знаменитого епископа Беркли» [2]. Недаром с ними пришлось считаться ученым такого ранга, как Маклорен и Эйлер.

Определение предела

«Аналист» Беркли немедленно вызвал многочисленные отклики и возражения, прежде всего в Англии, где в том же 1734 г. с защитой метода флюксий выступили секретарь Лондонского королевского общества любитель математики, по специальности врач, Джемс Джюрин (1684—1750) и дублинский преподаватель математики Джон Уолтон, которым Беркли ответил в брошюре «Защита свободомыслия в математике» (A defence of free-thinking in mathematics. Dublin. 1735). Вслед за тем в полемику вступил талантливый математик — самоучка Бенджамин Робинс (1707—1751), автор упоминавшегося ранее труда по артиллерии (ср. стр. 35) и изобретатель баллистического маятника. В «Рассуждении о природе и истинности методов флюксий, а также первых и последних отношений сэра Исаака Ньютона» (A discourse concerning the nature and certainty of sir Isaac Newtons methods of fluxions, and of prime and ultimate ratios, 1735) Робинса интересны определение предела и замечания о моментах величин. Робинс называет последней величиной или пределом переменной величины ту определенную величину, к которой «переменная может приблизиться с любой степенью близости, хотя она и не может никогда стать ей абсолютно равной» [3]. Затем доказываются предложения об отношении последних величин, когда сами переменные находятся в постоянном отношении, и о единственности последней величины (предела). Наряду с определением предела для величин дается отдельное определение последнего отношения для переменного отношения двух величин. В случае первого определения Робинс замечает, что к нему подходили еще Л. Валерио и А. Таке (ср. т. II, стр. 131—134); второе определение он связывает с раз-

---

[1] *Дж. Беркли.* Трактат о началах человеческого знания. Перевод Н. Г. Дебольского. СПб., 1905, стр. 163—164.
[2] *Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики. Перевод И. Г. Башмаковой под редакцией К. А. Рыбникова. М., 1963, стр. 205.
[3] Цит. по книге: *F. Cajory.* A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. Chicago and London, 1919, p. 97.

витием идей Ньютона. Он особо предупреждает, что выражение «последнее отношение исчезающих величин» надлежит понимать лишь фигурально, ибо на деле имеется в виду не последнее отношение, но некоторое фиксированное количество, от которого переменное отношение может отличаться менее, чем на любое сколь угодно малое данное количество, но которому это переменное отношение никогда не становится равным.

Поскольку со времени Ньютона (действительное) число отождествлялось с отношением, именно второе определение являлось арифметическим. Что касается первого определения, то, как и у Валерио и других математиков XVII в., оно возникло прежде всего из рассмотрения задач на измерение геометрических фигур по методу исчерпывания и относилось к последовательностям величин. Именно поэтому предельная величина обязательно оказывается внешней по отношению к последовательности значений переменной, которая к тому же явно или молчаливо предполагается монотонно возрастающей и убывающей, наподобие последовательностей вписанных в круг или описанных около него правильных многоугольников с безгранично возрастающим числом сторон. Только что приведенный пример служит Робинсу для иллюстрации этой в сущности расплывчатой идеи предела, охватывающей не только величины — длины, площади и т.д. фигур, но и самые «формы переменных фигур». Какие парадоксы могут встретиться при неосторожном употреблении «приближения с любой степенью близости», в те времена не подозревали; теперь с ними знакомят школьников с помощью элементарных софизмов, вроде известного «доказательства» равенства длины гипотенузы прямоугольного треугольника сумме его катетов. Различение пределов величин и отношений, так же как ограничение, по крайней мере в теоретическом плане, пределами монотонных последовательностей, члены которых заведомо не принимают своего предельного значения, сохранялось в течение десятилетий.

Впрочем, Джюрин, который вскоре вслед за Робинсом сформулировал определения предела переменной величины и переменного отношения, высказал, в противовес ему, мнение, что существуют переменные, достигающие своего предела; именно: если процесс изменения величины или отношения длится конечное время, то предел достигается, а в противном случае не достигается (The Republick of letters, 1735). Такую концепцию предела Джюрин усматривал у самого Ньютона, ссылаясь на примеры из «Математических начал». Так, процесс образования вписанных и описанных около данной криволинейной трапеции прямолинейных фигур можно мыслить завершенным, скажем, в течение одного часа, и тогда «в мгновение, когда истекает час, нет уже более какой-либо вписанной или описанной фигуры; но каждая из них совпадает с криволинейной фигурой, которая есть предел, limes curvilineus, которого они тогда достигают» [1]. А вот равный единице предел отношения двух неограниченно возрастающих с постоянной разностью величин является недостижимым (ср. т. II, стр. 239 и 242). Мы не будем останавливаться на дальнейшей полемике между Робинсом и Джюрином, которая не принесла чего-либо нового.

Что касается ньютонова описания моментов величин как их мгновенных приращений, Робинс находил его, быть может, темным, но по существу этот термин употребляется просто ради большей краткости. Интересно замечание Робинса о выделении в приращении величины той его части, с

[1] *F. Cajory.* A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse, p. 103.

помощью которой выражается предел отношения приращений: «При определении последних отношений между одновременными разностями величин часто требуется предварительно рассмотреть каждую из разностей отдельно, чтобы найти, сколько из этих разностей необходимо взять, чтобы выразить последнее отношение» [1]. Например, моментом произведения AB называется лишь часть приращения $Ab + Ba$, где a и b суть приращения соответственно A и B, а не все приращение $Ab + Ba + ab$ (ср. т. II. стр. 243). Однако до выделения понятия дифференциала как главной линейной части приращения, Робинс не дошел.

Маклорен и метод исчерпывания

«Аналист» Беркли дал ближайший повод для появления и фундаментального «Трактата о флюксиях» (A treatise of fluxions, V. 1—2. Edinburgh, 1742) К. Маклорена. Место этого выдающегося труда в истории анализа не ограничивается своеобразным изложением его принципов. Трактат представлял собой полный курс анализа и многие приложения к геометрии и механике и содержал целый ряд открытий, более долговечных, чем попытка автора укрепить фундамент метода флюксий. Здесь мы рассмотрим только те его отделы, которые непосредственно относятся к основаниям анализа и которые были подготовлены вскоре после того, как Маклорен познакомился с памфлетом Беркли; лишь позднее, по совету читателей его первого опыта, включавшего только главы 1—4 первой книги и главу 1 второй книги, он существенно расширил план своего труда. Бо́льшая часть первого тома была набрана еще в 1737 г.

Когда математиков XVII в. упрекали за нестрогость их инфинитезимальных выводов, они нередко отвечали, что все найденные таким образом результаты можно проверить с помощью приведения к нелепости по способу древних греков (ср. т. II, стр. 281). Маклорен решил такую проверку основных предложений анализа произвести раз и навсегда. Во введении к трактату он излагает в обобщенной форме основные результаты и схемы доказательств Евклида и Архимеда. Здесь же он делает несколько критических замечаний о применении чисто инфинитезимальных представлений в XVII в. [2]; несколько более подробно разбирается при этом весьма слабая попытка построить арифметику актуально бесконечно больших и обратных им бесконечно малых величин в «Началах геометрии бесконечного» (Eléments de la géométrie de l'infini. Paris, 1727) секретаря Парижской академии наук и талантливого популяризатора естественнонаучных знаний Бернара де Фонтенелля (1657—1757). В этой связи Маклорен ссылается на знаменитого Джона Локка (1632—1704), сенсуалистическая теория познания которого оказала влияние на его воззрения.

В первой главе первой книги трактата Маклорен доказывает по методу исчерпывания основные общие теоремы анализа, выраженные в терминах геометрии и кинематики. Он начинает с характеристики математиче-

---

[1] *F. Cajory.* A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse, p. 99.

[2] Следует иметь в виду, что под бесконечно малыми Маклорен, как и большинство ученых XVIII в., понимал величины, исчезающие в том неопределенном смысле, который включал и актуально бесконечно малые, отличные от нуля, и величины, становящиеся в конце концов нулями. (При написании этого раздела были учтены еще не опубликованные устные сообщения М. М. Коренцовой.— *Ред.*)

ских наук как наук о взаимных отношениях величин и обо всех их свойствах, которые можно подчинить измерению и вообще регулярному определению. Опять-таки со ссылкой на Локка он замечает, что можно иметь ясное понятие об основании отношения каких-либо вещей, не имея точной или адекватной идеи о самих вещах, и вообще идеи об отношениях часто яснее идей о вещах — этим в некоторой степени объясняется специфическая очевидность математики. Далее он замечает, что нет величин, которые мы могли бы себе представить яснее, чем ограниченные части пространства и времени, сосуществующие в случае пространства и непрерывно текущие в случае времени. Благодаря движению эти части могут взаимно измерять друг друга; кроме того, пространство, последовательно описываемое движением, можно представлять себе текущим, как и время. Понятие скорости является для Маклорена, как и Ньютона, столь же интуитивно ясным и начальным, как пространства и времени. В ответ на возражение (Беркли), будто понятие мгновенной скорости опирается на предположение, что возможно движение в мгновение времени и в точке пространства, Маклорен замечает, что любое движение происходит за конечное время и на конечном пространстве и что скорость в данное мгновение можно представить с помощью конечного движения в течение конечного времени. Именно: скорость или же флюксия любой текущей величины или же флюенты «всегда измеряется тем приращением или уменьшением (пространства.— *Ред.*), которое было бы произведено за данное время этим движением, если бы оно равномерно продолжалось с этого мгновения без всякого ускорения или замедления; или она может быть измерена величиной, произведенной за данное время равномерным движением, равным производящему движению в это мгновение» [1]. Эта попытка выразить мгновенную скорость неравномерного движения через скорость равномерного движения не содержала, впрочем, указания, как действительно вычисляется первая: для этого нужно было бы определить, какое равномерное движение считается «равным» данному неравномерному в данное мгновение.

Высказав еще некоторые натурфилософские соображения о производящих величины движениях, Маклорен формулирует четыре аксиомы, согласно которым пространство, описываемое ускоренным (соответственно: замедленным) движением, больше (соответственно: меньше) пространства, описываемого за то же время равномерным движением со скоростью, равной начальной, и оно меньше (соответственно больше) пространства, описываемого за то же время равномерным движением со скоростью, равной конечной. За этим следует 15 теорем о свойствах прямолинейного движения, каждая из которых с большой подробностью доказывается методом исчерпывания. Эти теоремы выражают некоторые общие свойства интегралов и производных непрерывных функций. Так, в теореме III доказано, что из тождества на некотором промежутке двух (дифференцируе-

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. 57. Аналогичная трактовка мгновенной скорости встречается у представителей оксфордской школы XIV в. (ср. т. I, стр. 274). Так, Уильям Гейтесбери (около 1313—1372) в «Правилах решения софизмов» (Regule solvendi sophismata) писал: «В неравномерном движении скорость в какое-либо мгновение измеряется путем, какой был бы описан быстрее всего движущейся точкой, если бы она равномерно двигалась некоторое время с той же степенью скорости, с какой она движется в это данное мгновение» (цит. по книге: *M. Clagett.* The science of mechanics in the middle ages. Madison — Wisconsin, 1959, p. 241). Мы уже отмечали генетическую связь кинематических концепций анализа XVII—XVIII вв. с оксфордскими калькуляциями и парижской теорией широт форм (т. II, стр. 205).

мых) функций следует тождество их производных: «Если пространства, описываемые в одинаковое время двумя равномерными или переменными движениями, всегда между собою равны, то в любое мгновение времени должны быть равными скорости этих величин» [1]. Эта теорема, говорит Маклорен, столь очевидна, что доказательство ее может показаться лишним, но он считает нужным дать ее полный вывод, так как она принадлежит к основным и справедлива для движения по любым кривым. В теореме IV доказано соответствующее обратное предложение для двух данных тождественно равных скоростей. Теоремы V и VI трактуют о дифференцировании и интегрировании произведения функции на постоянный множитель, теоремы VII и VIII — о дифференцировании и интегрировании суммы или разности функций. Доказательство каждой теоремы проводится с большой подробностью, причем — за исключением последней — по отдельности для равномерного, непрерывно (continually) ускоренного и непрерывно замедленного движения. Учитывается и случай, когда время движения разделяется на конечное число частей, в течение каждой из которых движение относится к одному из этих видов.

При этом Маклорен обсуждает возможность изменения скорости движения конечным скачком, что соответствует существованию неравных левой и правой производных в данной точке. Такое поведение скорости, по его мнению, возможно в отдельные мгновения.

В дальнейшем приводятся, среди прочего, XI теорема, равносильная правилу дифференцирования функции от функции, и XIII теорема, содержащая оценку определенного интеграла снизу и сверху, причем только для монотонной функции: «пространство, описываемое постоянно ускоренным или замедленным движением, находится к пространству, описываемому за то же время каким-либо равномерным движением, в отношении, которое заключено между отношениями скоростей этих движений в начале движения и их отношениями в его конце» [2]. Если, скажем, скорость v в промежутке времени (t_1, t_2) монотонно возрастает от v_1 до v_2, а скорость равномерного движения принята равной единице, то это предложение можно записать в виде

$$v_1(t_2 - t_1) < \int_{t_1}^{t_2} v dt < v_2(t_2 - t_1).$$

В конце первой главы вводятся флюксии высшего порядка.

Это общее введение в метод флюксий изложено более чем на ста страницах, причем только в одном месте, при разборе теоремы XIV, мельком упоминается ньютоново понятие предела. Само это понятие Маклорен не подверг специальному исследованию, но, как видно из всего дальнейшего изложения, он, подобно Робинсу, считал, что переменная не достигает своего предела.

В семи предложениях трех следующих глав выведены флюксии некоторых геометрических величин и среди них — площади прямоугольника, криволинейной трапеции в прямоугольных декартовых координатах, криволинейного сектора в полярной системе, объема тела вращения. Насколько громоздко было изложение у Маклорена, можно судить по теореме III

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. 61.
[2] Там же, стр. 99.

о производной произведения двух функций: «Если флюксии прямых линий AD и AL представлены DG и LM, то флюксия прямоугольника AE, построенного на AD и AL, точно измеряется суммой прямоугольников EG и EM, когда эти линии совместно возрастают или убывают, или же разностью EG и EM, когда одна из этих линий убывает, между тем как другая возрастает» [1] (рис. 27). При доказательстве различаются случаи, когда стороны AP, AQ вспомогательного прямоугольника AR одновременно возрастают или убывают при равномерном движении точек P, Q, когда при том же условии одна из сторон возрастает, а другая убывает и, наконец, когда точки P, Q движутся произвольно. Рассуждение, чисто словесное,

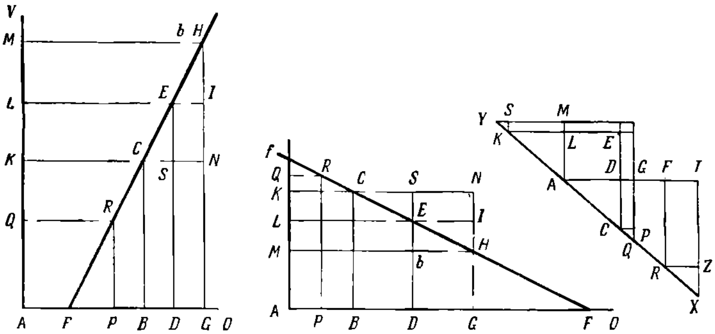

Рис. 27

в манере древних, занимает полных три страницы, а с дополнениями и разъяснениями — почти пять.

Вычислив еще флюксии логарифма, который определяется по Неперу, т. е. кинематически (см. т. II, стр. 59), Маклорен переходит к приложениям, охватывающим огромный круг вопросов анализа, геометрии и механики (касательные, экстремумы, асимптоты, кривизны, многочисленные задачи механики, включая гидромеханику и теорию потенциала, проблемы вариационного исчисления). Касательная к кривой определяется как такая прямая, что между ней и кривой через их общую точку нельзя провести какую-либо другую прямую; аналогично вводится понятие о круге кривизны. В этих приложениях нередко употребляется ньютоново понятие о пределе, как при рассмотрении площадей между бесконечными ветвями плоских кривых и их асимптотами, так и при определении понятия суммы сходящегося ряда (ср. стр. 301). В XII главе первой книги Маклорен обращается к методам бесконечно малых и пределов, развивая замечания, которые он уже сделал в предисловии и введении к труду. При изложении принципов анализа следует избегать постулатов исчисления бесконечно малых, но, когда эти принципы уже доказаны, «краткие и сжатые, хотя и менее точные, способы выражаться могут быть допущены» [2] и метод бесконечно малых «можно рассматривать как легкий и удобный прием для различения тех частей элементов, которые надлежит отбрасывать, и тех, которые надлежит сохранять при определении точной флюксии

[1] *C. Maclaurin*. A treatise of fluxions, v. I, p. 126.
[2] Там же, т. I, стр. 3.

величины, или темпа (rate) ее возрастания или убывания»[1]. В оглавлении, где некоторые параграфы специально озаглавлены, имеется такой характерный заголовок одного из параграфов XII главы: «О согласии между методами флюксий и бесконечно малых»[2]. Что касается метода пределов Ньютона, то Маклорен с самого начала объявлял его строгим и изящным, но он считал лучшим начать с метода, менее далекого от античного, дабы начинающим, для которых предназначен, главным образом, трактат, было легче перейти к методу Ньютона. В XII главе, между прочим, Маклорен опровергает критические замечания Беркли против данного Ньютоном вывода флюксии степенной функции.

Только заложив в первой книге трактата синтетико-кинематический фундамент метода флюксий и уже показав его многочисленные применения, Маклорен переходит к исчислению флюксий как таковому. Это происходит в середине второго тома, где начинается вторая книга «О вычислениях по методу флюксий». Здесь Маклорен указывает, что ему еще остается изложить важную часть этого учения, вклад которого в геометрию и познание природы (philosophy) «основан в большей мере на легкости, краткости и большом развитии методов вычисления, или алгебраической части»[3]. Вновь, но уже в алгебраических обозначениях, выводятся с помощью приведения к нелепости основные правила дифференцирования, на странице 591 появляется обозначение флюксий с помощью точек, а затем немалая часть предыдущего материала получает новое выражение. Впрочем, здесь имеются и совершенно новые результаты, в частности знаменитый ряд Эйлера — Маклорена (см. стр. 307).

Попытка Маклорена построить новое исчисление на старом фундаменте успеха не имела. Если у автора хватало энергии и терпения для выражения новых идей modo geometrico-mechanico, то для большинства читателей оно являлось трудно преодолимым барьером. Маклорен пошел почти против всего течения современного ему анализа, и в этом за ним последовать не могли даже сторонники метода пределов и флюксий Ньютона.

«Исчисление нулей» Эйлера

Во второй половине XVIII в. разработка оснований анализа велась главным образом на континенте Европы. «Аналист» и возбужденная им полемика несомненно получили здесь широкую известность. Бюффон, о котором уже говорилось ранее (стр. 140), в предисловии к своему французскому переводу «Метода флюксий» Ньютона (1740) упоминал о выступлении Беркли: «Все было спокойно в течение нескольких лет, как вдруг в самой Англии появился доктор, враг науки, объявивший войну математикам... И он заявляет нам, что исчисление бесконечного ошибочно, ложно, подозрительно неясно, что принципы его недостоверны и что оно приводит к цели лишь случайным образом»[4]. С трактатом о флюксиях Маклорена вскоре стало возможным познакомиться не только в оригинале, но и по французскому переводу, изданному в 1749 г. Впоследствии о спорах, возбужденных Беркли, упомянул в третьем томе своей «Истории математики» (Париж, 1802) Ж. Э. Монтюкла.

---

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. IV—V.
[2] Там же, т. II, стр. 759.
[3] Там же, т. II, стр. 575.
[4] *I. Newton.* La méthode des fluxions. Paris, 1740, p. XXV—XXVI.

Интерес к проблемам обоснования анализа стимулировался, помимо спора, разгоревшегося в Англии, всей духовной обстановкой эпохи Просвещения и характерным для нее стремлением философски осмыслить принципы научного познания. Несомненное значение имела также подготовка руководств, с одной стороны, а с другой — статей для «Энциклопедии», издававшейся Дидро при участии Даламбера. Характерно, что единственный, кажется, конкурс на чисто математическую тему, объявленный в XVIII в., был конкурс Берлинской академии наук, выдвинувшей в 1786 г. проблему ясного и строгого построения теории математической бесконечности. «Метафизикой» исчисления бесконечно малых занялись почти все крупнейшие математики: Эйлер, Даламбер, Лагранж, а кроме них еще многие — Люилье, Карно, Арбогаст, Лакруа, Гурьев и другие.

Эйлер был непосредственно задет в ходе полемики между Джюрином и Робинсом. В своей «Механике» (1736) Эйлер постоянно оперировал бесконечно малыми величинами. Робинс в 1739 г. обвинил автора «Механики» в ряде ошибок, проистекающих из «приверженности к принципам, которые он впитал под руководством того неловкого вычислителя (inelegant computist), который был его наставником» [1], т. е. И. Бернулли. Обвинение в ошибках было неверным, но Эйлер действительно первоначально стоял на тех же принципиальных позициях, что и И. Бернулли или же Лопиталь. В Архиве Академии наук СССР хранится незаконченная рукопись Эйлера, озаглавленная «Calculus differentialis». Это написанный, вероятно, еще до 1730 г. набросок начальных глав «Дифференциального исчисления», изданного четверть века спустя. Основной замысел в обоих случаях одинаков — это трактовка дифференциального исчисления как специального случая исчисления конечных разностей, имеющего место, когда разности бесконечно малы. Поэтому первая из четырех глав рукописи отведена исчислению конечных разностей. Правила дифференцирования выводятся из формул конечных разностей с помощью принципа отбрасывания высших бесконечно малых, а последние рассматриваются как величины, которые меньше любой данной величины и значения которых нельзя указать. Любопытно, что, характеризуя бесконечно малые тем же термином inassignabiles, которым нередко пользовался Лейбниц, Эйлер обозначал их, как Ньютон, символом o. Принцип отбрасывания доказывается в рукописи следующим образом: «Величина не увеличивается и не уменьшается при прибавлении или отнимании других величин, по сравнению с ней бесконечно малых. Ибо если бы она увеличивалась или уменьшалась, то прибавляемые или отнимаемые величины имели бы к ней отношение, которое можно указать, то есть конечное отношение, вопреки предположению. Отсюда следует, что бесконечно малые в сравнении с конечными можно отбрасывать. Значит $x \mp o = x$, если o бесконечно мала в отношении к x» [2].

---

[1] Цит. по книге: *F. Cajory*. A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse, p. 139—140. Брошюра Робинса должна была привлечь внимание Эйлера, имя которого стояло в ее заглавии: «Замечания о Трактате о движении г. Эйлера, Полной системе оптики д-ра Смита и Опыте об отчетливом и неотчетливом видении д-ра Джюрина» (Remarks on Mr. Euler's Treatise on motion, Dr. Smith's Compleat system of optics, and Dr. Jurin Essay upon distinct and indistinct vision. Loudon, 1739). Мы упоминали, что в 1745 г. Эйлер перевел на немецкий язык книгу Робинса по артиллерии (см. стр. 35).

[2] Архив Академии наук СССР, ф. 1, оп. 1, № 158, л. 52.

Труды по теории флюксий и споры вокруг них явно отразились на взглядах Эйлера. Во «Введении в анализ бесконечных» (1748) он предпочел обойтись без определения инфинитезимальных величин и без предварительного установления их свойств: в предисловии он писал, что развил в книге целый ряд вопросов, «благодаря которым читатели незаметно и как бы сверх ожидания могут освоиться с идеей бесконечного» [1]. Но в «Дифференциальном исчислении» (1755) мы находим уже новую концепцию анализа[2]. Теперь он развивает своеобразное «исчисление нулей» (термин не Эйлера, но современных историков математики), вводя в исчисление бесконечно малых Лейбница идеи метода флюксии Ньютона [3]. Дифференциальное исчисление Эйлер определяет как «*метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых какими-либо функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, дается исчезающее приращение*» (курсив Эйлера.— *Ред.*) [4]. Таким образом, впервые объявляется, что именно производная является, по выражению Эйлера, «истинным объектом» дифференциального исчисления, между тем как дифференциалу отводится, в сущности, вспомогательная роль. Вместе с тем производная определяется не через понятие скорости, как в методе флюксий, но арифметически, как предел отношения конечных приращений, которые «становятся все меньшими и меньшими, и тогда мы найдем, что их отношение все более и более приближается к некоторому определенному пределу, которого они достигают, однако, лишь тогда, когда полностью обращаются в нуль» [5]. Как видно, Эйлер примыкает к Ньютону и в том, что мыслит переменные величины, имеющие предел, достигающими, вообще говоря, своих предельных значений. Выдвинув понятие предела на передний план, Эйлер все же не занялся разработкой самой теории пределов, он даже обходится без дефиниции этого понятия. Для вычисления производных и дифференциалов применяется, как и ранее, принцип отбрасывания бесконечно малых, только обоснование его дается в рамках исчисления нулей.

В соответствии со своей трактовкой процесса стремления к пределу Эйлер считает бесконечно малую величину равной нулю. Он отвергает «особую категорию бесконечно малых величин, которые якобы не полностью исчезают, но сохраняют некоторое количество, которое, однако, меньше, чем всякое могущее быть заданным» [6], ибо отбрасывание слагаемых такого рода нарушало бы совершенную точность анализа. Он отвергает и объяснение точности результатов компенсацией одних ошибок дру-

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 19.

[2] Тремя годами ранее эта концепция была неполно и неточно изложена в брошюре богослова Г. В. Клемма (1725—1775) «Письмо о некоторых парадоксах аналитического исчисления, адресованное г. Эйлеру...» (Lettre sur quelques paradoxes du calcul analytique adressée à Monsieur Euler... Tubingue, 1752). Эйлер, который весьма невысоко ценил математические знания Клемма, не мог быть доволен этим изложением, основанным на отдельных беседах с ним.

[3] Сравнивая различия в терминологии и символике между аналистами Англии и других стран Европы, Эйлер отдавал предпочтение наименованиям первых (например, «текущим» величинам перед «переменными») и обозначениям вторых. Но, добавлял он, множество книг, написанных в той и другой менере, делает согласование обеих теорий бесполезным. См.: *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 103; *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I. Перевод С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского. М., 1956, стр. 10—11.

[4] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 39.

[5] Там же, стр. 41.

[6] Там же, стр. 40.

гими; напротив того, получение правильных результатов без такого рода компенсации убедительно показывает, что «количества, которыми пренебрегают, надлежит считать совершенно и абсолютно равными нулю» [1]. Дифференциальное исчисление безошибочно просто потому, что бесконечно малые суть абсолютные нули. И предел отношения $\Delta y/\Delta x$ при обращении Δx в нуль вычисляется вполне точно, когда в частном, уже сокращенном на Δx, это приращение полагается равным нулю. Вместе с тем предел $\Delta y/\Delta x$ можно рассматривать как отношение двух равных нулю дифференциалов, как дробь dy/dx, где $dy = 0$ и $dx = 0$.

Принципы исчисления нулей Эйлер изложил в третьей главе «Дифференциального исчисления». Прежде всего он оспаривает то возражение, что говорить о делении нуля на нуль не имеет смысла. Нули можно сравнивать между собой двояко. Арифметическое отношение двух нулей есть отношение равенства, т. е. их разность есть нуль. Но геометрическое отношение двух нулей не есть отношение равенства и может иметь любое значение, ибо произведение любого числа на нуль равно нулю. В символах, поскольку для всякого n

$$n \cdot 0 = 0,$$

то

$$0 : 0 = n : 1,$$

где n — какое угодно число. Это замечание Эйлера не находится в противоречии и с нашей современной концепцией: в кольце действительных чисел символ $0/0$ можно принять равным любому его элементу [2].

Но в дифференциальном исчислении,— и это основной пункт концепции Эйлера,— частное двух нулей, выступающее под видом отношения двух бесконечно малых приращений функции и ее аргумента, или же их дифференциалов, перестает быть неопределенным. При буквальном понимании некоторые высказывания Эйлера звучат в настоящее время непривычно. Различные бесконечно малые или нули, говорит он, следует, во избежание путаницы, обозначать различными символами, например dx, dy и т. д., ибо они могут иметь различные отношения. Когда обозначения фиксируются, неопределенность исчезает: так, отношение $adx : dy$, где a — конечное отличное от нуля число, уже перестает быть неопределенным, но равно $a : 1$. После этого основные правила вычисления дифференциальных отношений формулируются как в форме принципа отбрасывания бесконечно малых, так и в форме, соответствующей предельному переходу:

$$a \pm ndx = a \quad \text{и} \quad \frac{a \pm ndx}{a} = 1,$$

а также при $n > m$

$$adx^m \pm bdx^n = adx^m \quad \text{и} \quad \frac{adx^m \pm bdx^n}{adx^m} = 1.$$

В некоторых трудах по истории математики все эти рассуждения Эйлера до сих пор характеризуются как полностью лишенные строгости и

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 40—41.

[2] Ср., например, *И. В. Проскуряков.* Понятие множества, группы, кольца и поля.— В кн.: Энциклопедия элементарной математики, т. I. М.—Л., 1951, стр. 115.

даже смысла [1]. Однако обороты речи, характерные для XVIII в., не должны скрывать реального математического содержания концепции Эйлера, вовсе не вступающей в конфликт с логикой и здравым смыслом. Отношение двух нулей у него есть не что иное, как предельное значение функции $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, предполагаемой непрерывной для всех рассматриваемых значений аргумента, включая $x = x_0$, а его правила учат, в частности, находить искомое предельное значение, подставляя $\Delta x = 0$ в разложение этой дроби по степеням Δx. В сущности, такая же ситуация имела место в методе флюксий Ньютона, и мы на ней уже останавливались (см. т. II, стр. 242—244) [2]. Еще Л. Карно с полным основанием писал (1813), что сторонники понимания бесконечно малых как нулей «среди всех отношений, которые эти количества способны иметь в качестве нулей..., рассматривают только те, которые определены законом непрерывности» [3], т. е. законом, по которому непрерывно изменяются Δx и Δy; различием этих законов объясняется и необходимость в различном обозначении нулевых бесконечно малых.

К изложению свойств бесконечно малых Эйлер присоединяет аналогичный разбор свойств бесконечно больших величин и действий над ними; бесконечно большая величина при этом определяется прежде всего как частное от деления конечной величины, не равной нулю, на бесконечно малую, т. е. нуль.

Исчисление нулей образует лишь одну из опор концепции анализа Эйлера, другой служит представление функций степенными рядами, которое играет основную роль уже в фактическом вычислении дифференциалов и их отношений, т. е. производных. Поскольку дифференциальное исчисление определяется как частный случай метода разностей, наступающий, когда разности, вначале предполагаемые конечными, становятся бесконечно малыми, две первые главы монографии содержат элементы исчисления конечных разностей (см. шестую главу этого тома).Формулы конечных разностей служат отправным пунктом изучения природы дифференциалов любого порядка в IV главе рассматриваемого труда: дифференциал функции, в согласии с традицией школы Лейбница, определяется как ее бесконечно малая разность. Если разложение конечной разности какой-либо функции y по степеням ω, конечной разности аргумента x, дано

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \ldots,$$

где P, Q, R, ... — функции x, то dy находится непосредственно, без отыскания предела отношения $\Delta y/\Delta x$. Здесь вступает в действие принцип отбрасывания бесконечно малых, который Эйлер без каких-либо пояснений распространяет на бесконечное число членов степенного разложения (аналитической) функции, порядок малости которых бесконечно возрастает. Именно: если бесконечно малые приращения Δy и ω обозначить соответственно dy и dx, то все члены ряда, следующие за первым, как исчезающие

[1] *Carl B. Boyer.* The history of the calculus and its conceptual development. N. Y., 1959, p. 246; *E. T. Bell.* The development of mathematics. N. Y.— London, 1945, p. 288.

[2] Ср. *А. Н. Колмогоров.* Ньютон и современное математическое мышление.— В сб.: Московский университет — памяти Исаака Ньютона. М., 1946, стр. 36.

[3] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. Перевод Н. М. Соловьева под редакцией А. П. Юшкевича. Изд. 2. М.—Л., 1936, стр. 257.

в сравнении с ним, могут быть отброшены [1] и значит $dy = Pdx$. Таким образом, «для нахождения... дифференциала y достаточно знать одну только функцию P», и «если известна конечная разность какой-либо функции, то очень легко найти ее дифференциал» [2]. Именно так выведены в двух следующих главах дифференциалы степенной функции, частного, логарифмической функции $\left(\text{исходя из разложения } \ln(x+dx) - \ln x = \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \ldots\right)$, синуса, косинуса и некоторых других функций. Отсюда было уже недалеко до прямого определения производной, как коэффициента линейного члена ряда Тейлора. Именно так поступил затем Лагранж в надежде освободить тем самым анализ от пределов и бесконечно малых (см. стр. 288). Для объяснения природы высших дифференциалов d^2y, d^3y,... Эйлер привлек разложения по степеням приращения аргумента конечных разностей функции высших порядков $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ..., из которых и получаются соответствующие дифференциалы при бесконечно малом $\omega = dx$. И так как n-я разность есть разность $(n-1)$-й разности, то $d^n y$ есть $d\,(d^{n-1}y)$.

Ряд Тейлора Эйлер привлек и для решения некоторых вопросов дифференциального исчисления, например для исследования функций на экстремум посредством оценки знака разности

$$f(x \pm \omega) - f(x) = \pm \frac{dy}{dx}\omega + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\omega^2}{2} \pm \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\omega^3}{6} + \ldots$$

при достаточно малых значениях ω. При этом, как и в некоторых других случаях, использовалось предложение, согласно которому при достаточно малом ω (абсолютная) величина какого-либо члена ряда может быть сделана больше (абсолютной) величины суммы всех следующих за ним членов [3]. Это предложение Лагранж возвел в ранг одного из основных принципов своей системы анализа.

В главе XIV второй части «Дифференциального исчисления» Эйлер вернулся к вопросу о природе и вычислении дифференциалов в «особых» случаях. Это случаи, когда для некоторого значения аргумента один или несколько начальных членов разложения приращения функции обращаются в нуль или же когда появляются бесконечные члены. Теперь бесконечно малое приращение функции при $\omega = dx$ называется «истинным» или «полным» дифференциалом функции и записывается в виде

$$d\cdot y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \ldots,$$

а также

$$d\cdot y = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \ldots$$

Не входя в подробности, заметим, что подход Эйлера к «особым» случаям отличается от общепринятого тогда, да и ныне. Например, если при $x = a$ исчезает только первый член, т. е. $p = 0$, то вторым членом пренебрегать в выражении для разности функции уже нельзя; в этом случае в соответствии с определением дифференциала как бесконечно малого приращения и с принципом отбрасывания бесконечно малых $dy = {}^1/_2\, qdx^2$. Вообще

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 103.
[2] Там же, стр. 105.
[3] Там же, стр. 387—389.

если при $x = a$ обращаются в нуль первые $n - 1$ производных, то dy будет пропорционален dx^n. Любопытно брошенное здесь мимоходом замечание, что «ни для какой функции количества x (отличной от постоянной.— *Ред.*) полный дифференциал никогда не исчезает вполне» [1], т. е. невозможно обращение в нуль всех ее производных: мы вновь встретим его в несколько иной форме у Лагранжа (см. стр. 300). Если какой-либо член ряда Тейлора обращается в бесконечность, нахождение дифференциала по обычному способу Эйлера вообще невозможно. Здесь один из примеров таков: $y = (x - a)^{3/2} + a\sqrt{a}$, так что $p = \frac{3}{2}\sqrt{x-a}$, $q = \frac{3}{4\sqrt{x-a}}$ и т. д. «Поэтому если положить $x = a$, то получим, правда, $p = 0$, но все следующие члены будут бесконечными, поэтому дифференциал dy в этом случае вовсе нельзя будет определить» [2]. Эйлер вычисляет приращение функции непосредственно, подставляя в функцию вместо x значения a и $a + dx$, что дает ему $dy = dx\sqrt{dx}$.

Охарактеризованные нами идеи Эйлера оказали значительное влияние на дальнейшие работы по основаниям анализа. Это относится, в частности, к выдвижению на первый план производной как предела отношения $\Delta y/\Delta x$ и к широкому применению ряда Тейлора. Но понимание бесконечно малых как нулей, при всем авторитете Эйлера, могло явиться только недолгим этапом в истории этого понятия и не привлекло большого числа сторонников. Дифференциал, рассматриваемый как нуль, был практически бесполезен в анализе и его приложениях, а исчисление нулей в целом маскировало фактические предельные переходы. С самого возникновения дифференциального исчисления решающим было то, что при бесконечно малом приращении аргумента (и производной, неравной нулю) дифференциал функции аппроксимирует ее приращение с точностью до высшей бесконечно малой. Отождествление дифференциала и приращения функции приводило к логическим трудностям, но отождествление дифференциала и нуля (хотя бы и нуля как последнего значения некоторой переменной), с одной стороны, лишало это понятие анализа его особенно ценных свойств, а с другой — вовсе не освобождало математику от необходимости применять выражение вида $P\omega$ при малых, но отличных от нуля значениях приращения аргумента ω. В анализе и его приложениях на каждом шагу приходится иметь дело с допредельными приближениями величин и их оценками в форме неравенств, а не только с предельными равенствами. Такие оценки в XVIII в., да и позже, производились, правда, без ε, δ-техники Вейерштрасса, часто на глаз, но это не меняет сути дела: оперировали при этом не с нулевыми бесконечно малыми, а с произвольно малыми величинами. Разумеется, так поступал и Эйлер, но с его точки зрения дифференциал функции мог быть использован для приближенного вычисления ее конечного приращения лишь косвенным образом: если ω, приращение аргумента x, «будет чрезвычайно малым, так что в выражении $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3$ и т. д. члены $Q\omega^2$ и $R\omega^3$, а тем более остальные станут столь малыми, что в вычислении, где не требуется высшая точность, ими можно пренебречь по сравнению с первым членом $P\omega$, то по известному дифференциалу можно приближенно найти конечную разность, которая $= P\omega$» [3]. Эти слова следует понимать не в том смысле, что сам диффе-

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 473.
[2] Там же, стр. 345.
[3] Там же, стр. 105.

ренциал Pdx дает приближение для конечной разности, но в том, что приближение получается из его формулы Pdx при замене нулевого dx на ω. Эйлер здесь снова подчеркивает, что дифференциалы суть нули, а не «неопределенно малые» приращения, как считают некоторые.

Вместе с тем в других местах «Дифференциального исчисления» дифференциал понимается как ненулевая величина, например, при выводе ряда Тейлора в III главе второй части, где значения x, $x + dx$, $x + 2\,dx$,... очевидным образом различаются между собой в арифметическом отношении.

Разбирая концепцию Эйлера, Карно, которого мы уже цитировали, писал, что в анализе можно по желанию рассматривать бесконечно малые и как нули, и как неопределенно малые, но последняя точка зрения предпочтительнее, ибо, «приписывая бесконечно малым количествам значение нуля, ... совершают бесполезное действие», и «вопрос мне кажется разрешенным более общим образом, если оставить неопределенными те количества, которые нет никакой нужды определять» [1].

Метод пределов Даламбера

Вскоре после выхода «Дифференциального исчисления» Эйлера Даламбер выступил с предложением основать анализ на понятиях предела и производной, не употребляя, впрочем, этого последнего термина. Свои воззрения Даламбер рассматривал как развитие идей исчисления флюксий Ньютона, но он внес то новое, что освободил их от механических или квазимеханических представлений. Это было связано как с общими тенденциями развития анализа на материке Европы, так и с классификацией наук, принятой Даламбером: он исходил из того положения, что достоверным познанием мы обладаем лишь в области абстрактных понятий и чем более опытных элементов входит в какую-либо науку, тем более сложны ее понятия, так что математика предшествует механике [2]. Популярное изложение собственной концепции Даламбер дал в статьях «Дифференциал» (Différentiel) и «Предел» (Limite), напечатанных соответственно в четвертом (1759) и девятом (1765) томах французской «Энциклопедии», и в некоторых других работах.

Имея в виду распространенные тогда понятия о бесконечно малых, Даламбер заявлял, что в принципе дифференциальное исчисление в них не нуждается: либо бесконечно малые разности в действительности не существуют, либо нет нужды полагать, что они существуют. В частности, он считал лишенным смысла определение бесконечно малой как величины, исчезающей не до того, как она исчезла, и не после того, но в самый момент ее исчезновения. Величина есть либо нечто, либо ничто; в первом случае

---

[1] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 259—260.

[2] Л. Карно, с характерной для него широтой взглядов, считал такой довод против введения в анализ понятия скорости недостаточно основательным, так как «Наша классификация наук в достаточной мере произвольна. Мы помещаем математику впереди механики, исходя из степени простоты, но высшие разделы первой гораздо более абстрактны, чем элементарные отделы второй. И так как, по словам Лагранжа, каждый «имеет, или думает, что имеет, ясное представление о скорости», то определять флюксии посредством скоростей вовсе не значит идти в направлении, противном духу математики» (*Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 246—247). Однако такое определение не соответствовало общему духу развития математики в XVIII в.

она еще не исчезла, а во втором она совсем исчезла; допущение промежуточного состояния между этими двумя — химера [1]. На самом деле «в дифференциальном исчислении речь идет вовсе не о бесконечно малых величинах, но только о пределах конечных величин. Слова „бесконечно малые" используются лишь для сокращения выражений»[2]. Конечно, Даламбер пользовался потенциальными бесконечно малыми и бесконечно большими, но явного определения их не сформулировал, а в отдельных случаях его обороты речи при буквальном понимании могут дать повод к недоразумениям, например, когда он писал, что «Бесконечность, рассматриваемая в анализе, есть собственно предел конечного, т. е. граница, к которой всегда стремится конечное, никогда к ней не приходя, но о которой можно предположить, что конечное приближается к ней все ближе и ближе, хотя и никогда не достигает» [3].

В анализе нет необходимости дифференцировать отдельные величины, дифференцирование же уравнений состоит только в отыскании предела отношения между конечными приращениями двух входящих в них переменных [4]. Для отыскания касательной, понимаемой как предел секущих, или же экстремума, требуется вычислять не dy, но dy/dx и далее оперировать с этой последней величиной. Это разъясняет всю тайну дела: называемые бесконечно малыми величины всегда «следует считать поделенными на другие почитаемые бесконечно малыми величины, и они при этом выражают не бесконечно малые и даже не дроби с бесконечно малыми числителями и знаменателями, но предел отношения конечных величин» [5]. Явного определения дифференциала Даламбер не дает, но из текста цитируемой статьи следует, что для него dy и dx — просто величины, частное которых равно пределу, обозначаемому dy/dx.

Понятие предела определено в «Энциклопедии» следующим образом: «Говорят, что одна величина является пределом другой величины, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы мала ни была последняя, причем, однако, приближающаяся величина никогда не может превзойти величину, к которой приближается. Таким образом, разность этой величины и ее предела абсолютно неуказуема». И к этому добавлено: «предел никогда не совпадает или не становится равным величине, для которой он является пределом» [6]. В статье не определены по отдельности предел величины и предел отношения, как поступали Робинс, Джюрин, но по существу идея предела и здесь не арифметизирована (ср. стр. 260). Для иллюстрации приведены последовательности вписанных и описанных около круга многоугольников и частных сумм убывающей геометрической прогрессии. Из текста следует, что переменная мыслится изменяющейся монотонно, хотя это и не оговорено в определении. По недосмотру отсутствует указание, что предел есть вели-

---

[1] См. его «Разъяснение метафизических начал исчисления бесконечно малых» (Eclaircissement sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal, 1759) в книге: *D'Alembert*. Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires, t. II. Paris, an XIII (1805).

[2] «Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, arts et métiers», t. IV, art. Différentiel. Статьи по математике «Энциклопедии» были переизданы в «Encyclopédie méthodique ou par ordre des matières». Nouv. éd., Padoue, 1787—1790.

[3] *D'Alembert*. Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires, t. II, p. 346.

[4] Ср. *De Bougainville*, Traité du calcul intégral, v. 1. Paris, 1754, p. VIII.

[5] «Encyclopédie», t. IV, art. Différentiel.

[6] «Encyclopédie», t. IX, art. Limite. Эта статья написана совместно Даламбером и аббатом де ла Шапелем (1710—1792), автором «Оснований геометрии» (Institutions de géométrie. Éd. 1. Paris, 1746), где идея предела применялась в манере Стевина и Григория Сен Венсана.

чина постоянная,— пробел, отмеченный С. Е. Гурьевым (см. стр. 276). Из теорем приведены две: о единственности предела и о пределе произведения,— вторая используется для доказательства того, что площадь круга выражается произведением полуокружности на радиус.

Хотя Даламбер полагал, что «метафизика дифференциального исчисления, о которой так много писали, еще важнее и, быть может, с большим трудом поддается разработке, чем сами правила этого исчисления» [1], он лично ограничился общей характеристикой метода пределов, предоставив его дальнейшую разработку и применение к построению системы анализа другим. При этом, как мы увидим, идеи Даламбера получили первоначально весьма одностороннее развитие.

Первым курсом анализа, в котором по крайней мере отчасти были воплощены мысли Даламбера, явились «Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению» (Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris, 1777) Жака Антуана Кузена (1739—1800). Эта книга была сочувственно встречена не только французскими читателями, о чем говорит второе издание 1796 г.; в 1801 г. она вышла в Петербурге в русском переводе С. Е. Гурьева. Но особенно интересны два сочинения, представленные на конкурс Берлинской академии наук 1786 г. Одно из них, написанное Люилье, содержало изложение анализа на основе теории пределов, в другом, принадлежащем перу Л. Карно, существенно использовались ее понятия и предложения.

Инициатором конкурса был Лагранж, в то время состоявший директором Математического класса Берлинской академии. В вопросах обоснования анализа Лагранж не разделял взглядов ни Эйлера, ни Даламбера. В заметке, напечатанной во втором томе «Miscellanea Taurinensia» (1760—1761), он высказал убеждение, что исчисление бесконечно малых есть по существу исчисление компенсирующихся ошибок и «исправляет само собой принимаемые в нем ложные допущения» [2]. Этот тезис Лагранж иллюстрировал примером касательной к кривой, т. е. в сущности примером Беркли, но с тем различием, что у Беркли речь шла о касательной к конкретной параболе и были проведены все вычисления (см. стр. 258), между тем как Лагранж ограничился замечанием общего характера, относящимся к любым кривым. Со ссылкой на заметку Лагранжа идея компенсации ошибок была упомянута в посмертном издании довольно распространенного учебника астронома Николая Луи де Лакайля (1713—1762) [3]; ее разделяли и некоторые другие ученые. В 70-е годы Лагранж пришел к мысли заменить исчисление бесконечно малых новой теорией производных функций, о которой будет рассказано далее, но он до конца жизни полагал, что дифференциальное исчисление, как таковое, основано на компенсации ошибок. Именно этим объясняется формулировка темы берлинского конкурса 1786 г., объявленного в 1784 г. Чтобы обеспечить за математикой присущую ей издревле ясность принципов, строгость доказательств и точность теорем, академия предлагала представить «*ясную и точную теорию того, что в математике называют бесконечным*. Известно, что высшая геометрия постоянно принимает *бесконечно большие* и *бесконечно малые*. Однако древние геометры и даже аналисты тщательно

---

[1] «Encyclopédie», t. IV, art. Différentiel.

[2] *J. L. Lagrange*. Oeuvres, v. VII. Paris, 1877, p. 598.

[3] *N. L. de la Caille*. Leçons élémentaires de mathématiques. Paris, 1770, p. 337. Это издание представляло собой переработку преподавателем математики аббатом Жозефом Франсуа Мари (1738—1801) курса, впервые вышедшего в 1741 г.

избегали всего, что касается бесконечного, и великие современные аналисты признают, что выражение *бесконечная величина* противоречиво. Академия поэтому желает получить объяснение того, как из противоречивого допущения было выведено столько истинных теорем и чтобы был указан верный, ясный, словом подлинно математический принцип, который мог бы заменить *бесконечное*, не делая слишком трудным или слишком долгими производимые с помощью этого средства исследования»[1].

На конкурс было представлено 21 сочинение. По мнению академии, т. е. фактически Лагранжа, ни одно не отвечало ее пожеланиям полностью, ни в одном не было объяснено, «как из противоречивого допущения было выведено столько истинных теорем». Все же одна из работ, наиболее удовлетворяющая другим предъявленным требованиям, была выделена и автор ее премирован. Лауреатом оказался Симон Люилье (ср. стр. 203), автор «Элементарного изложения начал высших исчислений» (Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin, 1786).

По словам самого Люилье, его труд представлял собой «развитие мыслей ..., которые г. Даламбер высказал лишь в виде наброска и как бы предложил в статье о дифференциале в Энциклопедии и в своем сборнике»[2]. В первой главе книги метод пределов действительно получает некоторое развитие. К двум теоремам о пределах, приведенным Даламбером, Люилье добавляет теорему о пределе отношения двух переменных величин и впервые вводит знак предела в виде lim (ср. стр. 280); впервые же производная какой-либо функции P — у Люилье «дифференциальное отношение» (rapport différentiel) — обозначается $\lim\frac{\Delta P}{\Delta x}$ и символ $\frac{dP}{dx}$ рассматривается как единое целое, а не дробь. Термином «бесконечно малая величина» Люилье не пользуется, сохраняя его для обозначения актуально бесконечно малых; нет у него и понятия о дифференциале. Переменную, стремящуюся к нулю, он называет «переменной величиной, не имеющей предела малости (или которая может быть сделана меньше какой бы то ни было указанной величины)»[3]. Он выводит также теорему о сумме нескольких бесконечно малых для частного случая: любая функция $Q = Bx^b + Cx^c + \ldots + Nx^n$, где $0 < b < c < \ldots < n$ и x «не имеет предела малости», может быть сделана меньше какой бы то ни было данной величины. В этом, собственно, и состоял весь вклад Люилье в общую теорию пределов. Предел определялся все еще только для монотонного случая, и в определении сохраняется условие недостижимости предела. Кроме того, подобно Робинсу, Люилье по отдельности определял и рассматривал пределы величин и пределы отношений, и подобно Маклорену, истинной строгости доказательств стремился достичь с помощью метода исчерпывания,

---

[1] «Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres (1784)». Berlin, 1786, p. 12—13.

[2] *L'Huilier*. Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin, 1786, p. 167. Мы благодарны г. Р. Жакелю (Мюлуз), любезно приславшему нам полную фотокопию этой редкой книги.

[3] *L'Huilier*. Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, p. 21. В другом месте этой книги Люилье предлагает ввести для обозначения переменных инфинитезимальных величин новые термины infinible и infiniblemen petit. Слово infinible, по его мнению, выражает свойство незавершенности (la faculté de ne pouvoir pas être terminé), между тем как слово infini — состояние завершенности (там же, стр. 147). Напомним, что выдающийся московский математик и педагог И. И. Жегалкин (1869—1947) рекомендовал вместо «бесконечно малая» величина говорить «бесконечно умаляющаяся».

причем в каждом выводе различал случаи возрастания и убывания величины или отношения.

Впрочем, в латинском дополненном издании «Элементарного изложения» (Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae, 1795) Люилье пошел несколько далее. Он расширил понятие о пределе, показав на примерах сходящихся знакочередующихся рядов, что переменная может стремиться к пределу не монотонно. Кроме того, он привел здесь общие теоремы о сумме или разности бесконечно малых, а также о произведении бесконечно малой на какое-либо число.

В последующих главах книги Люилье содержится систематическое изложение начал дифференциального и интегрального исчисления, включая теорию рядов, и их применений к геометрии, а также, в меньшей мере, к механике. Глава XI содержала критику воззрений на природу актуально бесконечных величин, в частности Фонтенелля (ср. стр. 261), и исчисления нулей Эйлера. В целом Люилье сумел удовлетворительно для своего времени реализовать в учебном плане идеи Даламбера, хотя он и не обогатил их сколько-нибудь существенно.

В России пропагандистом метода пределов выступил С. Е. Гурьев. Главный труд Гурьева «Опыт о усовершении елементов геометрии» (СПб., 1798), не раз упоминавшийся выше, был посвящен вопросам обоснования и преподавания математики. Его подготовка к печати вызвала споры в Петербургской академии наук. Гурьев выступил с возражениями против употребления Эйлером расходящихся рядов и против одного его доказательства теоремы о биноме. Фусс, Румовский и другие академики потребовали исключения из сочинения Гурьева этих возражений, и ему пришлось уступить.

Центральное место в «Опыте» занимает систематическое приложение метода пределов в школьном курсе геометрии. В этой своей части книга Гурьева оказала несомненное влияние на последующие руководства, хотя его собственные учебники (СПб., 1804—1807; СПб., 1811), очень растянутые и трудные, успеха не имели. С помощью метода пределов Гурьев пытался более строго доказать ряд теорем анализа, прежние доказательства которых считал неудовлетворительными. Так, в одной статье 1797 г., опубликованной в 1802 г. в «Nova Acta» (1795—1796), он заново вывел условие полного дифференциала функции двух переменных и теорему о равенстве смешанных производных второго порядка. Заслуживает внимания содержащееся в этой статье обобщение простейших теорем о предельных переходах — пределе суммы, разности, произведения и т. д., именно общее правило вычисления предела функции путем подстановки в функцию предельного значения аргумента: «согласно 12 вспомогательным истинам метода пределов, видно, что если над какой-либо увеличивающейся или уменьшающейся величиной, имеющей предел, производят некоторую операцию, то результат этой операции имеет пределом результат той же операции, произведенной над пределом увеличивающейся или уменьшавшейся величины» [1]. Сформулированное только что свойство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, характерное для функций, непрерывных при $x = x_0$ в смысле Больцано — Коши, не согласуется, впрочем, с представлением, что переменная не может принимать своего предельного значения.

Метод пределов Гурьев использует и в большом курсе «Оснований

[1] «Nova Acta Academiae Petropolitanae», t. XIII (1795—1796), 1802, p. 157.

дифференциального исчисления» (СПб., 1811), где, между прочим, предел обозначается первой буквой этого слова, например:

$$e = \prod\left[1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\right].$$

Бесконечно малые в явном виде в этом руководстве не применяются, дифференциалы же dy, dx вводятся как произвольные числа, отношение которых равно пределу частного $\Delta y/\Delta x$. В самом начале «Оснований» Гурьев геометрически обосновывает существование этого предела у функций, представимых (непрерывными) плоскими кривыми (ср. стр. 243); такое рассуждение содержалось еще в ненапечатанной части рукописи его «Опыта». Упомянем, что один из последователей Гурьева П. А. Рахманов применил для вывода теорем о пределах приемы и обозначения, сходные с употребительными ныне. Вот два примера из его «Новой теории содержания и пропорции геометрической» (1803), о которой уже говорилось во второй главе. Теорему о пределе суммы Рахманов доказывает, выбирая произвольно малое положительное ε и считая взятые им три переменные X, Y, Z меньшими соответствующих пределов A, B, C, так: можно одновременно сделать:

$$A - X < \varepsilon/3, \qquad B - Y < \varepsilon/3, \qquad C - Z < \varepsilon/3,$$

и, следовательно,

$$(A + B + C) - (X + Y + Z) < \varepsilon.$$

При доказательстве теоремы о пределе произведения возрастающих переменных используются неравенства:

$$AB - BX < \varepsilon/2 \qquad \text{и} \qquad BX - XY < \varepsilon/2,$$

где второе, например, выводится из того, что можно сделать $B - Y < \varepsilon/2A$ и что $X < A$.

Даламберу и его последователям принадлежит заслуга дальнейшей разработки учения о предельных переходах в рамках чистого анализа. Но в той конкретной форме, которую метод пределов приобрел в рассматриваемое время, он еще не имел преимуществ в смысле строгости перед исчислением бесконечно малых. Определение предела, ограниченное монотонными переменными, было недостаточным: ведь ни сумма, ни произведение двух монотонных величин, из которых одна возрастает, а другая убывает, не являются, вообще говоря, монотонными. Арсенал понятий и общих теорем метода пределов оставался очень невелик, и его едва хватало только для передоказательства уже известных предложений. Новые широкие перспективы открылись, когда Больцано и Коши установили основной критерий сходимости последовательности и применили его: первый — при исследовании свойств непрерывных функций, а второй — при построении теории сходящихся рядов и в доказательстве теоремы о существовании интеграла.

Но самым уязвимым пунктом теории пределов второй половины XVIII в. являлся отказ от употребления алгоритма бесконечно малых Лейбница. Это отметил еще Карно в сочинении, представленном на конкурс Берлинской академии 1786 г., и ту же мысль он подчеркивал в своих «Размышлениях». «Методу пределов,— писал Карно,— свойственно одно серьезное затруднение, не имеющее места в анализе бесконечно малых; именно, в нем нельзя, как в этом последнем, отделять бесконечно малые количества друг от друга, и так как эти количества в нем всегда связаны друг с другом, то невозможно ни использовать при вычислениях (combinaisons) свойства, принадлежащие каждому из них в отдельности, ни подвергать уравнения, в которых они встречаются, преобразованиям, способствующим их исключению» [1]. Как мы сейчас увидим, Карно принадлежит своеобразная попытка освободить метод пределов от этих ограничений.

Метод пределов и теория компенсации ошибок Карно

Как мы уже писали, Берлинская академия наук в 1786 г. объявила, что ни в одной из поступивших на ее конкурс работ не было разъяснено, как в исчислении бесконечно малых из противоречивых допущений выводятся правильные теоремы. Это суждение, однако, не было вполне беспристрастным. Одно из сочинений Л. Карно, именно «Рассуждение о теории математического бесконечного» (Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique), содержало ответ на этот вопрос,— ответ, очевидно, не удовлетворивший академию, т. е. фактически Лагранжа, но совершенно недвусмысленный. Карно подробно аргументировал как раз тот тезис, который сжато высказал в заметке 1760—1761 гг. Лагранж: исчисление бесконечно малых основано на общем принципе компенсации ошибок, которая в определенных условиях необходимо приводит к точным результатам.

Одной из руководящих идей Карно, которую он проводил как в оставшемся неопубликованным «Рассуждении» [2], так и в возникших на его основе «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно малых» (Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Paris, 1797; 2e éd., 1813), была следующая: все инфинитезимальные методы в идейном смысле представляют собой один и тот же метод, рассматриваемый с различных точек зрения. «Это,— как писал он во втором издании „Размышлений“,— все тот же метод исчерпывания древних, более или менее упрощенный, более или менее удачно приспособленный к нуждам исчисления и, наконец, приведенный к регулярному, упорядоченному алгорифму» [3]. В «Рассуждении» и первом издании «Размышлений» сопоставлялись исчисление Лейбница, исчисление исчезающих величин Эйлера, метод пределов и метод неопределенных коэффициентов; во втором издании анализируются еще метод исчерпывания, метод неделимых и теория аналитических функций Лагранжа. Каждый метод может быть с пользой применен в тех или иных случаях, но наиболее удобным и плодотворным является «регулярный, упорядоченный алгорифм» исчисления бесконечно малых. Мы уже приводили критические высказывания Карно об исчислении нулей (стр. 272) и о методе пределов. Главной задачей Карно было полное обоснование

---

[1] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 243.

[2] Рукопись «Рассуждения» хранится в Центральном архиве Германской академии наук в Берлине (Zentrales Archiv der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sign. A. A. W: 1261—62. Preisschrift № 5 für das Jahr 1786). Фиксимиле рукописи опубликовано в книге: *Ch. C. Gillispie.* Lazare Carnot savant... with fascimile reproduction of his unpublished writings on mechanics and the calculus and an essay concerning the latter by A. P. Youschkevitch. Princeton, 1971.

[3] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 265.

исчисления Лейбница в его классической форме, в которой дифференциал определяется как бесконечно малое приращение, бесконечно малая дуга кривой отождествляется со стягивающей ее хордой и т. д.

Краеугольным камнем концепции Карно служила последовательная трактовка бесконечно малой величины, как переменной, значения которой сколь угодно приближаются к нулю, и, вместе с тем, как разности между переменной и ее пределом, если такой предел существует. В этом отношении Коши не добавил ничего нового. Теперь такая трактовка представляется естественной, но для XVIII в. она была отнюдь не тривиальна и впервые ставила на принципиально одинаковый уровень строгости метод пределов и метод бесконечно малых. В самом начале «Рассуждения» Карно указывает, что точное понятие бесконечно малой весьма просто и непосредственно связано с понятием предела, которое столь ясно, что математики обыкновенно даже считают излишним его определять. Объединяя термином «инфинитезимальные величины» бесконечно малые и бесконечно большие, он дает здесь следующее определение: «Те инфинитезимальные величины, предел или последнее значение которых есть 0, называются бесконечно малыми»[1]. Во втором издании «Размышлений» бесконечно малая определяется непосредственно и понятие предела рассматривается значительно позднее, но здесь также неоднократно подчеркивается, что каждое из обоих понятий приводится к другому. Поэтому «ошибочно полагать, будто метод пределов является более строгим, чем метод обыкновенного анализа бесконечно малых»[2]; если точен первый, в чем никто не сомневается, значит точен и второй.

Другая руководящая идея Карно состояла, как сказано, в том, что исчисление бесконечно малых основано на общем принципе компенсации ошибок. При доказательстве этого принципа он в «Рассуждении» и издании «Размышлений» 1797 г. пользовался понятиями и предела и бесконечно малой, а в издании 1813 г.— только вторым. Прежде всего Карно различает систему означенных величин (quantités désignées) — это наши постоянные $a, b, c, \ldots$ и переменные $x, y, z, \ldots$ и систему вспомогательных или неозначенных величин, которые, как он выражается, в соответствии с условиями задачи «нечувствительными степенями» (par degrés insensibles) приближаются к означенным, т. е. отличаются от последних бесконечно мало. Далее вводится понятие несовершенного уравнения (équation imparfaite), которое в «Рассуждении» и первом издании «Размышлений» определяется как приближенное уравнение, точное в пределе или такое, что отношение обеих частей его имеет пределом единицу, а во втором издании «Размышлений» — как уравнение, погрешность которого бесконечно мала. Затем эффект компенсации ошибок поясняется на примере построения касательной к окружности $y^2 = 2ax - x^2$, причем уравнения, соответствующие (1) и (2) в аналогичном примере Беркли (стр. 258), оказываются несовершенными. Самый принцип компенсации доказан в «Рассуждении» в серии пяти теорем. Согласно первой, точное или несовершенное уравнение при замене какой-либо переменной на другую, разнящуюся от нее бесконечно мало, переходит либо в точное, либо, по меньшей мере, в несовершенное уравнение. Доказательство проводится в терминах ме-

[1] *L. Carnot.* Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique, p. 9. Прямого определения понятия предела Карно здесь не дает, но с достаточной полнотой и ясностью описывает его в § 1, 4 и 5.

[2] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 275.

тода пределов. Вторая теорема гласит, что уравнение, содержащее только означенные количества, не может быть несовершенным. Из этих предложений следует третья теорема: уравнения (1), полученные из точных или несовершенных уравнений посредством преобразований, при которых они не перестают быть по меньшей мере несовершенными, и (2), содержащие лишь означенные количества, являются совершенно точными. Затем формулируется аналогичная теорема для исчисления исчезающих величин Эйлера и, путем объединения двух последних предложений, получается теорема пятая, содержащая «основной принцип исчисления бесконечного»: «Если дано уравнение, обе стороны которого разнятся между собой бесконечно мало ..., то какую-либо входящую в них величину можно заменить другой, бесконечно мало от нее отличной, причем от этого не произойдет никакой ошибки в означенном результате; и дело обстоит также во всех предложениях, которые можно выразить подобного рода уравнениями» [1].

Метод пределов Карно, подобно Люилье и независимо от него, дополнил специальным знаком предела в виде буквы L и теоремой о пределе отношения, которую записал в виде $L\,\frac{Y}{Z}=\frac{LY}{LZ}$ и считал действительной также для исчисления нулей, когда $LY=LZ=0$ [2]. Кроме того, в «Рассуждении» впервые появляется теорема о равенстве предела означенной величины ей самой, т. е., в частности, о пределе постоянной величины; в первом издании «Размышлений» Карно пояснил, что для этого понятие предела нужно толковать расширительно.

Особый интерес представляет попытка Карно дополнить метод пределов так, чтобы в нем оказалось возможным отделять бесконечно малые друг от друга и оперировать с ними по отдельности. К числу основных понятий анализа Карно относил и производную, которую назвал «дифференциальным моментом» (moment différentiel) функции и обозначал символами вроде $L\,\frac{dy}{dx}$. Это необычное для нас обозначение связано было с тем, что Карно не отличал бесконечное малое приращение величины от ее дифференциала и определил дифференциальный момент как предел отношения дифференциала функции к дифференциалу аргумента. Для дифференциального момента Карно употреблял и другое обозначение Dy, которое иногда применял раньше Иоганн I Бернулли, а после Карно — Арбогаст. Чтобы отделить друг от друга в выражениях вида $L\,\frac{dy}{dz}$ бесконечно малые dy и dz, Карно рассматривает переменные y и z как функции некоторого параметра, скажем x. Тогда, согласно теореме о пределе частного, $L\frac{dy}{dz}$ можно записать в виде $L\,\frac{dy/dx}{dz/dx}=\frac{Ldy/dx}{Ldz/dx}$, или, что то же, Dy/Dz. В этом последнем выражении мы имеем дело уже с дробью, где Dy и Dz отделены и вместе с тем характеристика D подчиняется тому же алгоритму, что и характеристика d в исчислении Лейбница. Таким образом, метод пределов, сохраняя свою точность, приобретает ту же алгоритмическую простоту, что исчисление бесконечно малых; все формальные приемы в обоих становятся тождественными при замене бесконечно малых

[1] *L. Carnot.* Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique, p. 61. Во втором издании «Размышлений» вся теория несовершенных уравнений изложена в терминах исчисления бесконечно малых.

[2] В соответствии со смыслом, какой придается в нем символу 0/0.

дифференциалов соответствующими конечными дифференциальными моментами. Здесь возникает такая же ситуация, как в методе флюксий Ньютона, где нашей производной dy/dz соответствует отношение флюксий y/z, причем y и z зависят от универсального параметра «времени t». Во всех преобразованиях флюксии $\dot{y}$, $\dot{z}$ играют ту же роль, что наши дифференциалы dy, dz. Как заметил А. Н. Колмогоров, совпадение приемов исчисления флюксий с трактовкой дифференциала функции, как произведения ее производной на произвольное постоянное приращение аргумента, совершенно естественно: если взять $\Delta t = 1$, то $dx = \dot{x}\Delta t = \dot{x}$ и $dy = \dot{y}\Delta t = \dot{y}$[1]. Эту мысль в других словах выразил Карно в § 142—143 второго издания «Размышлений».

Замысел Карно сообщить методу пределов алгорифмические свойства исчисления бесконечно малых является одной из наиболее интересных особенностей его «Рассуждения». В этом, как и в трактовке понятия бесконечно малого, Карно предвосхищал идеи реформы Коши, который также поставил перед собой цель сочетать строгость, присущую теории пределов, с простотой алгорифма бесконечно малых. Однако Коши для этого произвел гораздо более радикальную перестройку анализа. Устанавливая формальное тождество операций над символами Dy и dy, Карно еще не решил выдвинутую им задачу: ведь «отделены» были в символе $L\frac{dy}{dz}$ не бесконечно малые приращения или дифференциалы в его смысле слова, а конечные величины Dy и Dz, пропорциональные дифференциалам в нашем смысле слова. Вероятно, автор «Рассуждения» сам не был вполне доволен полученными в этом направлении результатами. Во всяком случае эту часть рукописи он полностью исключил из печатного текста «Размышлений».

При подготовке к печати первого издания «Размышлений» (1797) Карно внес и некоторые другие изменения, сохраняя, однако, при обосновании принципа компенсации ведущее место за понятием предела; многие пассажи рукописи вошли в книгу целиком. «Размышления» быстро приобрели широкую известность. Лакруа с похвалой отозвался о них в предисловии к своему трактату и кратко изложил ее принципиальные установки; на протяжении короткого времени появились португальский (1798), немецкий (1800), английский (1800—1801), итальянский (1803), а затем и русский (1823) переводы. Но, разумеется, теория несовершенных уравнений, не уступая в строгости другим концепциям анализа того времени, и не превосходила их в этом. Достаточно сказать, что область применения общего принципа компенсации оставалась неопределенной и не было средств выяснить, какой класс задач выражается несовершенными уравнениями и каков класс допускаемых в теории преобразований. Впрочем, центральное в теории Карно понятие несовершенного уравнения естественно утратило значение в теории пределов Коши: сам Карно в обоих изданиях «Размышлений» отметил, что в методе пределов такие уравнения заменяются совершенно точными.

На втором издании «Размышлений» (1813), существенно переработанном и дополненном, мы можем не задерживаться, так как основное его отличие от первого издания и «Рассуждения» было уже отмечено.

---

[1] *А. Н. Колмогоров.* Ньютон и современное математическое мышление.— В сб.: Московский университет — памяти Ньютона, стр. 40.

Теория производных функций Лагранжа

В XVIII в. были сделаны также попытки обоснования анализа с помощью средств, которые представлялись чисто алгебраическими. Здесь следует прежде всего назвать английского математика-самоучку Джолана Ландена (1719—1790), имя которого носит одно важное преобразование в теории эллиптических интегралов. Свои взгляды Ланден изложил в книге «Рассуждение о разностном анализе: новая ветвь алгебраического искусства» (A discourse concerning residual analysis: a new branch of algebraic art. London, 1758). Понятию производной у Ландена соответствует «специальное значение» частного $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ при $y=x$, для которого он ввел особый знак; так, в случае x^3 специальным значением частного $\frac{y^3-x^3}{y-x}=y^2+xy+x^2$ является $3x^2$. Для степенной функции $x^{m/n}$, где m, n — целые числа, Ланден доказывал формулу[1]

$$\frac{y^{m/n}-x^{m/n}}{y-x}=x^{\frac{m}{n}-1}\frac{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots+\left(\frac{y}{x}\right)^{m-1}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2m}{n}}+\ldots+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{(n-1)m}{n}}};$$

положив $y=x$, он вывел таким образом производную степенной функции с рациональным показателем. Он пытался обобщить свой вывод и на иррациональные показатели, беря для примера показатель $\sqrt{2}$, рассматриваемый как «последнее значение» своих десятичных приближений 1, $\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$ и т. д. Отыскание же производной любой функции сводилось в принципе к почленному дифференцированию степенного ряда, поскольку заранее предполагалось, что разность $f(y)-f(x)$ разлагается по степеням разности $y-x$. По существу Ланден доопределял функцию $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ для значения $y=x$ по непрерывности, подобно Ньютону и Эйлеру,— еще Лакруа в своем «Трактате» указывал, что разностный анализ сводится к методу пределов. Лагранж, который развил собственную алгебраическую концепцию анализа несколько позднее, писал, что Ландену действительно удалось избежать бесконечно малых и исчезающих количеств, но характеризовал приемы и применения разностного анализа как «затруднительные и мало естественные»[2].

Центральную мысль своей теории производных функций Лагранж впервые высказал в мемуаре «О новом роде исчисления, относящегося к дифференцированию и интегрированию переменных величин» (Sur une nouvelle espèce du calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1772) 1774). Эта мысль заключается в следующем: при записи разложения функции u от $x+\xi$ по степеням ξ в форме

$$u+u'\xi+\frac{u''}{2}\xi^2+\frac{u'''}{2\cdot 3}\xi^3+\ldots$$

функции u, u', u'', u''', ... последовательно получаются одна из другой, на-

---

[1] Эта формула для положительных m, n легко выводится путем деления y^m-x^m на $y-x$, а также на $y^{m/n}-x^{m/n}$, после чего немедленно распространяется на отрицательные показатели.

[2] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques. Paris, 1813, p. 4.

чиная с u', по одному и тому же правилу: каждая из них есть коэффициент при первой степени в разложении по степеням ξ, ей предшествующей. Таким образом, все эти функции могут быть произведены (dérivées) из начальной u с помощью повторного применения операции разложения в степенной ряд — операции, которую Лагранж считал чисто алгебраической.

Функции u', u'', u''', ... Лагранж назвал производными от начальной; обозначения $\varphi' x = \frac{d\varphi x}{dx}$, $\varphi'' x = \frac{d\varphi' x}{dx}$ и т. п., без скобок, он применил еще ранее в одной статье, напечатанной в «Miscellanea Taurinensia», 1760—1761. Мы отмечали ранее, что еще Эйлер в 1755 г. особенно подчеркивал возможность нахождения производной из разложения в степенной ряд (см. стр. 269). Лагранж положил эту идею в самое основание анализа. Развернутое построение системы анализа на этой основе Лагранж дал только четверть века спустя, но еще до того два математика, вероятно, вдохновляемые мемуаром Лагранжа 1772 г., развили, каждый по-своему, начала такого построения. Первым из них был Кондорсе, который в 1778—1782 гг. готовил энциклопедический курс анализа под названием «Трактат по интегральному исчислению» (Traité du calcul intégral), оставшийся незаконченным. Рукопись и некоторое число уже набранных ее листов хранятся в библиотеке Национального института в Париже. К ним приложена записка Лакруа, где, между прочим, сказано: «Изложение начал дифференциального исчисления, полностью содержащееся в отпечатанных листах, будучи независимым от какого-либо понятия о *бесконечно малых* и о *пределах*, показалось бы новым в случае публикации, ибо тогда по этому вопросу был известен только мемуар Лагранжа, помещенный в томе Берлинской академии за 1772 г.» [1]. Наряду с этим Лакруа отмечал большую сложность вычислений Кондорсе в сравнении с изложением в позднейших трудах Лагранжа. Мы можем ограничиться указанием, что Кондорсе вводил последовательные производные точно так же, как Лагранж (ср. стр. 288), и что он один из первых, если не первый, стал употреблять термин «аналитическая функция».

Другим единомышленником Лагранжа явился Франсуа Луи Антуан Арбогаст (1759—1803), воспитанник университета в Страсбурге, профессор математики в различных учебных заведениях Эльзаса, член Института, т. е. Академии наук в Париже, и в 1793—1795 гг. депутат Национального конвента, активно участвовавший в реформе народного образования. В апреле 1789 г. Арбогаст представил Парижской академии «Опыт о новых началах дифференциального и интегрального исчисления, независимых от теорий бесконечно малых и пределов» (Essai sur les nouveaux principes du calcul différentiel et de calcul intégral, indépendants de la théorie des infiniment petits et de celle de limites). Работа была передана на заключение Лежандру и Лагранжу, которые представили свой отзыв в мае. Отзыв, по-видимому, пропал, а рукопись не увидела света и хранится в настоящее время во Флоренции [2]. Сжатое изложение принципов этого труда, публикации которого помешали перерыв в 1790 г. издания ученых записок Парижской академии, затем бурные политические события того времени и, наконец, выход в 1797 г. «Теории аналитических функций»

---

[1] Эта записка Лакруа находится в начале первого из трех томов, содержащих как рукописи Кондорсе, так и набранные листы (Bibliothèque de l'Institut de France, MS, № 877—879). Оценка того же труда имеется во введении Лакруа к «Traité du calcul différentiel et du calcul intégral», t. 1, Ed. 2, p. XXII—XXIV.

[2] Biblioteca Laurentiana, Codex Ashburnham, Appendix, sign. 1840.

Лагранжа, Арбогаст дал в предисловии к своей книге «Об исчислении дериваций» (Du calcul des dérivations. Strasbourg, an VIII [1] (1800).

«Опыт» Арбогаста состоит из двух отделов. В первом определяются дифференциалы различных порядков через коэффициенты ряда Тейлора, а самый ряд выводится при двух предположениях: 1) что произвольная функция y представима обобщенным степенным рядом

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots,$$

где α, β, γ, ... — любые действительные числа, и 2) что биномиальное разложение справедливо для всех действительных показателей. Арбогаст записывает приращенное значение функции

$$y + \Delta y = A(x + \Delta x)^{\alpha} + B(x + \Delta x)^{\beta} + C(x + \Delta x)^{\gamma} + \ldots$$

в виде ряда по степеням Δx

$$y + \Delta y = \left\{\begin{matrix} Ax^{\alpha} \\ + Bx^{\beta} \\ + Cx^{\gamma} \\ + \ldots \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} Ax^{\alpha'} \\ + Bx^{\beta'} \\ + Cx^{\gamma'} \\ + \ldots \end{matrix}\right\} \Delta x + \frac{1}{1\cdot 2} \left\{\begin{matrix} Ax^{\alpha''} \\ + Bx^{\beta''} \\ + Cx^{\gamma''} \\ + \ldots \end{matrix}\right\} \Delta x^2 + \ldots,$$

где $x^{\alpha'}$, $x^{\alpha''}$, ... обозначают соответственно величины $\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2}$, ... и т. п. Обозначив выражения в фигурных скобках, после первого, равного y, через p, q, r, ..., Арбогаст получает

$$y + \Delta y = y + p\Delta x + \frac{1}{1\cdot 2} q\Delta x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} r\Delta x^3 + \ldots$$

и констатирует, что коэффициенты последнего ряда, начиная с члена второй степени, последовательно умноженные на 1.2, 1.2.3, ..., «производятся одни из других таким же способом и следуя тому же приему, как коэффициент при Δx производится из функции y» [2]. Выражения $p\Delta x$, $q\Delta x^2$, $r\Delta x^3$, ... Арбогаст называет первым, вторым, третьим, ..., дифференциалами функции y и затем применяет общеупотребительную символику. Далее Арбогаст утверждает, что при достаточно малом приращении Δx ряд Тейлора сходится, а каждый член его оказывается (по абсолютной величине) бо́льшим (абсолютной величины) суммы всех следующих за ним членов. На этой основе выведены главные правила дифференцирования функций одного переменного и приемы отыскания экстремумов. Во втором отделе содержатся начала теории соприкосновения плоских кривых и вычислены дифференциалы площади и длины дуги кривой в прямоугольных координатах.

---

[1] В этой книге строятся формальные алгоритмы дифференциального характера для разложений в степенные ряды различных функций одной или многих переменных, например, $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots)$. Деривации, которые Арбогаст обозначал символами D, D^2,..., D^n, представляют собой дифференциальные операторы типа производных и в простейшем случае функции $f(x)$ совпадают с ее производными. Довольно подробное изложение начал деривационного исчисления имеется в книге: *В. Я. Буняковский*. Лексикон чистой и прикладной математики, т. I. СПб., 1839, стр. 349—354.

[2] Цит. по докторской диссертации: *K. Zimmermann*. Arbogast als Mathematiker und Historiker der Mathematik. Heidelberg, 1934, S. 46. Фотокопия этой редкой работы была любезно предоставлена профессором Р. Татоном (Париж).

Лагранж высоко оценил работу Арбогаста и во введении к первому изданию «Теории аналитических функций» (1797), упомянув о своем мемуаре 1772 г., писал, что позднее Арбогаст представил Академии наук «*прекрасный мемуар*, в котором та же мысль изложена с принадлежащими ему развитиями и приложениями. *Это сочинение не оставляет ничего пожелать в вопросе, о котором идет речь*»[1]. Во втором издании той же книги (1813) приведенные курсивом слова отсутствуют[2]. И. Ю. Тимченко по этому поводу заметил, что «Лагранж, очевидно, принимал слишком близко к сердцу вопрос о приоритете теории аналитических функций»[3]. Впрочем, приоритет действительно принадлежал Лагранжу.

Полное название не раз цитированного труда Лагранжа выражает его основную установку: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин» (Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. Paris, 1797; 2-е пересмотренное и дополненное издание. Париж, 1813). Книга возникла в связи с тем, что Лагранж стал читать курс анализа в Политехнической школе; к ней очень близки «Лекции об исчислении функций» (Leçons sur le calcul des fonctions), напечатанные сперва в «Séances de l'Ecole normale», an IX (1801); второе значительно дополненное издание вышло в Париже в 1806 г.

«Теория аналитических функций» заключает, помимо введения, три части: 1) изложение теории и ее главных применений в анализе; 2) приложения к геометрии, 3) приложения к механике, причем во всей книге нет ни одного чертежа, как, впрочем, и в «Аналитической механике» Лагранжа. Введение к книге содержит сжатый историко-критический очерк существовавших в XVIII в. методов обоснования анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница Лагранж по-прежнему считал исчислением компенсирующихся ошибок; задачу общего доказательства неизбежности такой компенсации он считал нерешенной и после выхода в свет первого издания «Размышлений» (1797) Карно. В методе пределов Лагранж усматривал тот же недостаток, что и в концепции Эйлера: в обоих случаях дело приводится к рассмотрению отношений между нулями, а такое отношение перестает быть для разума ясной и точной идеей. Этим и другим методам он противопоставлял теорию аналитических функций. Необходимо, однако, напомнить, что в этот термин Лагранж вкладывал смысл, несколько отличный от современного. В «Рассуждении о предмете теории аналитических функций» (Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques. Journal de l'Ecole Polytechnique, an VII (1799) он разделяет все учение о функциях на две ветви. К первой относится алгебра, где изучаются лишь первоначальные функции, происходящие в результате алгебраических действий над переменными и числами. Вторая ветвь — это теория аналитических функций, в которой рассматриваются не только первоначальные функции, возникающие при любых вычисле-

---

[1] *J. L. Lagrange*. Théorie des fonctions analytiques. Paris, an V (1797), p. 5.
[2] *J. L. Lagrange*. Théorie des fonctions analytiques. Nouv. éd. Paris, 1813, p. 5.
[3] *И. Ю. Тимченко*. Основания теории аналитических функций, т. I, ч. I. Одесса, 1899, стр. 324.

ниях (Лагранж иногда называл функции expressions de calcul), но и их производные функции. Вместе с тем Лагранж, как и его предшественники, был уверен, что изучаемые в анализе функции, вообще говоря, являются аналитическими в том смысле слова, какой ему придал Вейерштрасс.

Начала своей теории Лагранж закладывает в первых двух главах труда, о котором идет речь. Он прежде всего желает обосновать постоянно обнаруживаемый в практике вычислений факт, что любая функция $f(x)$ при подстановке $x + i$ вместо x раскладывается в ряд вида

$$f(x+i) = f(x) + p(x)\,i + q(x)\,i^2 + \ldots$$

Сперва доказывается, что разложение не может содержать дробных положительных степеней i, за исключением отдельных особых значений x. Радикалы, содержащие i, рассуждает Лагранж, могут произойти только от радикалов, имеющихся в первоначальной функции $f(x)$. Но в таком случае допущение членов вида $ui^{m/n}$ приводит к нелепости: ряд $f(x) + pi + qi^2 + \ldots + ui^{m/n} + \ldots$, в котором все возможные значения $f(x)$ комбинируются с каждым из значений радикала $\sqrt[n]{i^m}$, дает для $f(x+i)$ больше различных значений, чем их имеет $f(x)$; между тем, если x и i остаются неопределенными, то число этих значений в обоих случаях должно быть одинаково. Лишь при отдельных определенных значениях x некоторые радикалы в $f(x)$ могут уничтожиться, сохраняясь в $f(x+i)$. Подобного рода исключительные случаи рассмотрены в V главе [1].

Затем Лагранж показывает, что разложение функции $f(x+i)$ не может, вообще говоря, содержать отрицательные степени i: член вида r/i^m при $i = 0$ стал бы бесконечным и, значит, должна была бы стать бесконечной при неопределенном x функция $f(x)$, между тем как это может случиться только при особых значениях x.

Подчеркнем еще раз, что Лагранж, как и все математики XVIII в., заранее принимал, что любая функция анализа представима рядом по каким-либо действительным степеням и в доказательстве, с его точки зрения, нуждалось только предложение, что такой ряд, вообще говоря, содержит лишь целые положительные степени, между тем как другие степени встречаются исключительно в разложениях, соответствующих изолированным особым значениям аргумента. В V главе «Теории аналитических функций» он писал, что «разложение $f(x) + i\,f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) +$ и т. д. может стать ошибочным для какого-либо данного значения x лишь в случае, если для этого значения x станет бесконечной одна из функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д., так же как и все следующие. Тогда, если n есть индекс первой ставшей бесконечной функции, разложение, о котором идет речь, должно будет содержать член вида i^m, где m — число, заключенное между $n-1$ и m. А если становятся бесконечными для одного и того же значения x все функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д., то разложение $f(x+i)$ содержит в этом случае отрицательные степени i» [2]. Более подробно последний случай Лагранж рассмотрел в VIII главе «Лекций об исчислении функций». Однако приведенные выше рассуждения Лагранжа опирались не только на допущение о представимости произвольной функции обобщенным сте-

---

[1] Если, например, $f(x) = (x - a)\sqrt{x - b}$, то при $x = b$ функция $f(b)$ обращается в нуль, между тем как $f(b+i)$ содержит радикал $f(b+i) = (b-a)\,i^{1/2} + i^{3/2}$.

[2] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 51.

пенным рядом, но и на уверенность в том, что выведенные посредством формальных алгебраических преобразований ряды представляют соответствующие функции, вообще говоря, повсюду, так что свойства, принадлежащие при каких-либо значениях x, i ряду, принадлежат и функции. Между тем Коши показал, что сходящийся ряд Тейлора не обязательно сходится к порождающей его функции, и тем самым выявил принципиальную недостаточность теории Лагранжа (см. стр. 300).

Установив общий вид степенного ряда, выражающего данную функцию, Лагранж переходит к рассмотрению его членов. Так как разность $f(x+i) - f(x)$ равна нулю при $i = 0$, то она может быть представлена в виде произведения целой положительной степени i на некоторую функцию $P(x, i)$, конечную при $i = 0$. Таким образом, можно положить $f(x+i) = f(x) + iP$. Если функция $P(x, i)$ при $i = 0$ обращается в $p(x)$, то аналогично $P = p + iQ$, где $Q(x, i)$ обращается в $q(x)$ при $i = 0$; при сходных обозначениях далее получается, что $Q = q + iR$, $R = r + iS$ и т. д., так что

$$f(x+i) = f(x) + iP = f(x) + ip + i^2Q = f(x) + ip + i^2q + i^3R = \ldots$$

и в итоге для разложения $f(x+i)$ получается тот ряд, какой был предположен вначале. Описанный прием может быть употреблен для непосредственного разложения рациональных функций, а также иррациональных алгебраических функций, что Лагранж иллюстрирует на примерах $1/x$ и $\sqrt{x}$. Коэффициенты разложения выступают при этом вычислении как «специальные значения» Ландена (стр. 282). Так, коэффициент p есть значение при $i = 0$ функции P или же равного ей выражения $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, в котором деление на i уже произведено.

Из способа образования ряда легко следует теорема: величине i всегда можно дать столь малое значение, чтобы каждый член ряда $f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$ оказался больше суммы всех следующих за ним членов, и то же справедливо для всех значений i, еще меньших, чем уже выбранное значение (разумеется, сравниваются абсолютные значения соответствующих величин). «Эту теорему,— писал Лагранж,— следует рассматривать как один из „фундаментальных принципов" его теории и ее молчаливо предполагают в дифференциальном и флюксионном исчислении»[1]. Последнее утверждение не вполне справедливо; Эйлер высказывал это предложение достаточно ясно, хотя и не в форме специальной теоремы (стр. 270), а Арбогаст и как общую теорему анализа (стр. 284). Впрочем, сам Лагранж, как мы вскоре увидим, пользовался не столько этой теоремой, сколько формулой Тейлора с остаточным членом. Нужно добавить, что вывод теоремы очевидным образом предполагает существование сходящегося к $f(x+i)$ ряда и Лагранж вовсе не имел в виду доказывать таким образом его сходимость[2].

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 16.

[2] Судя по некоторым выражениям Лагранжа, он не был до конца уверен в универсальности излагаемых методов. В конце рассматриваемой главы он подчеркивает, что прием последовательного определения членов степенного ряда и вытекающая из него теорема применимы постольку, поскольку функция x и i может быть приведена к ряду по целым положительным степеням i. «Ибо рассуждение..., с помощью которого мы доказали, что всякая функция $x + i$, вообще говоря, приводима к такому виду, не может быть применено к любой функции x и i». См. *Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 16.

В главе II устанавливается общий закон последовательного образования функций p, q, r, ..., порождаемых разложением в ряд $f(x+i)$. С этой целью в общую формулу

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ \ldots$$

вместо i подставляется $i+o$, что дает, если выписать только первые два члена каждой степени двучлена,

$$f(x+i+o) =$$
$$= f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \ldots + po + 2qio + 3\ ri^2o + 4\ si^3o + \ldots$$

Затем в ту же формулу вместо x подставляется $x+o$, причем первые два члена разложений функций f, p, q, r, ... по степеням o пишутся в виде $f(x+o) = f(x) + f'(x)\,o + \ldots$, $p(x+o) = p + p'o + \ldots$ и т. д., так что

$$f(x+o+i) =$$
$$= f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \ldots + f'(x)o + p'io + q'\,i^2o + r'i^3o + \ldots$$

Сравнение в обоих представлениях $f(x+i+o)$ членов, содержащих мно жители o, io, i^2o, ..., показывает, что

$$p = f'(x),\ q = p'/2,\ r = q'/3,\ s = r'/4,\ \ldots$$

Если для единообразия обозначить коэффициенты при первой степени приращения аргумента в разложении приращенной первоначальной функции $f(x)$ через $f'(x)$, в разложении функции $f'(x)$ через $f''(x)$, в разложении $f''(x)$ через $f'''(x)$ и т. д., то последние равенства можно переписать в виде:

$$p = f'(x), \qquad q = \frac{f''(x)}{2}, \qquad r = \frac{f'''(x)}{2\cdot 3}, \ldots,$$

а само разложение $f(x)$ примет вид

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)\,i + \frac{f''(x)}{2}i^2 + \frac{f'''(x)}{2\cdot 3}i^3 + \ldots$$ [1]

Функцию $f(x)$ Лагранж, как и в 1772 г., назвал начальной или первообразной (fonction primitive) по отношению к производимым из нее функциям $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., а эти функции — производными (fonctions dérivées), причем сокращенно именовал $f'(x)$ первой функцией, $f''(x)$ второй функцией, $f'''(x)$ третьей функцией и т. д., впоследствии стали говорить о первой, второй, третьей и т. д. производной или о производной соответственного порядка.

Общий прием дифференцирования состоит, таким образом, в нахождении линейного члена ряда Тейлора для данной первообразной функции. Именно так выведены основные формулы производных в III главе «Теории аналитических функций». Считая известными для любого действительного показателя первые два члена биномиального разложения $(x+i)^m = x^m + mx^{m-1}i + \ldots$ (ср. стр. 294), Лагранж получает производную сте-

---

[1] Аналогично вывел зависимость между коэффициентами ряда Тейлора Кондорсе в рукописи, упомянутой на стр. 283.

пенной функции. Для показательной функции $f(x) = a^x$, $f(x+i) = a^x a^i$, и если положить $a = 1 + b$, то

$$a^i = (1+b)^i = 1 + ib + \frac{i(i-1)}{2} b^2 + \ldots$$

или, располагая по степеням i и обозначая $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \ldots = A$, $a^i = 1 + Ai + \ldots$, поэтому $f'(x) = Aa^x$. Расходимость ряда, выражающего A, вне промежутка $-1 < b \leqslant 1$, не лишает в глазах Лагранжа вывод законной силы, но он тут же, найдя разложение

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \ldots,$$

полагает в нем $x = 1/A$, находит, что $a^{1/A} = e$, и затем, перейдя к логарифмам, получает, что A есть гиперболический логарифм a. Дифференцирование синуса и косинуса по формулам Эйлера сводится к рассмотренному выше. Мы покажем для образца еще вывод правила дифференцирования функции от функции. Положим, что $y = f(p)$, где p зависит от x; пусть приращению x на i соответствует приращение p на o. Тогда

$$f(p+o) = f(p) + of'(p) + \frac{o^2}{2} f''(p), + \ldots,$$

$$p + o = p(x+i) = p + ip' + \frac{i^2}{2} p'' + \ldots,$$

так что, подставляя $o = ip' + \frac{i^2}{2} p'' + \ldots$ в выражение для $f(p+o)$, найдем

$$f(p+o) = f(p) + ip'f'(p) + \frac{i^2}{2} [p'^2 f''(p) + p''f'(p)] + \ldots,$$

а следовательно, $y' = f'(p)p'$.

Центральное место в «Теории аналитических функций» занимает VI глава первой части (в «Лекциях об исчислении функций» ей соответствует IX лекция). Здесь Лагранж поставил вопрос об оценке в общей форме точности приближений, доставляемых суммой конечного числа членов ряда Тейлора, и вывел формулу Тейлора с остаточным членом, и, в частности, теорему о конечном приращении («формулу Лагранжа»), причем записал последнюю в виде

$$f(z+x) = f(z) + xf'(z+u),$$

где u — численно неизвестное значение аргумента, заключенное между 0 и x. Мы еще вернемся к этому вопросу (см. стр. 294 и след.), пока же ограничимся замечанием, что в последующем изложении Лагранж многократно применяет именно формулу Тейлора с остаточным членом и теорему о конечном приращении, сообщая исследованию близкий к современному характер и систематически подготовляя почву для развития «математики неравенств». Так он исследует во второй части «Теории» экстремумы функции, так он строит теорию соприкасания кривых или же вычисляет производную площади криволинейной трапеции по абсциссе в декартовых прямоугольных координатах и т. д. Задачу о касательной Лагранж решил, исходя, подобно Маклорену, из определения касательной в данной точке кривой, как прямой, между которой и кривой нельзя провести через эту точку какую-либо другую прямую. Допустим, что уравнение кривой есть $y = f(x)$ и данная точка $M(x_1, y_1)$, тогда сравнение в соседстве с точкой M разности ординат кривой и прямой $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ с разностью ординат кривой и какой-либо другой прямой $y - y_1 = k(x - x_1)$ показывает, что если вторая прямая, по предположению, проходит между кривой и первой прямой, то $k = f'(x_1)$, т. е. вторая прямая совпадает с первой, которая и является касательной.

В VI главе второй части рассматриваемого труда привлекает внимание доказательство «общей леммы», которая затем используется при оценке остатка формулы Тейлора и которая гласит, что функция $f(x)$, имеющая всюду на отрезке $(a, b;\ a < b)$ положительную производную $f'(x)$, на этом отрезке возрастает. По своему характеру это доказательство сходно с теми, какие получили распространение в анализе и теории функций в XIX в.; оно чисто аналитическое и опирается на содержательное рассмотрение свойств функций. Сперва Лагранж доказывает, как сказали бы мы теперь, что функция, производная которой в некоторой точке положительна, в этой точке возрастает: «Обратимся вновь к формуле $f(x + i) = fx + iP$, где P есть функция x и i, которая при $i = 0$ обращается в $f'x$ (парагр. 3, 8); очевидно, что если $f'x$ положительна, то значение P обязательно будет положительным от $i = 0$ до некоторого значения i, которое можно будет взять сколь угодно малым»[1]. Отсюда Лагранж делает вывод, что можно, поскольку $f'(x) > 0$ на всем отрезке, выбрать столь малое положительное i, что разность $f(x + i) - f(x)$ будет положительной для любых значений x. Поэтому полагая $a + (n + 1)i = b$, можно взять n столь большим и соответственно i столь малым, чтобы оказались положительными все разности $f(a + i) - f(a)$, $f(a + 2i) - f(i)$, ..., $f[a + (n + 1)i] - f(a + ni)$. Сложение этих разностей дает, что $f(b) - f(a) > 0$. Для нас возрастание $f(x)$ в точке x, где $f'(x) > 0$, следует из современного определения производной, для Лагранжа оно являлось следствием из равенства $f(x + i) - f(x) = Pi = pi + i^2Q$, установленного в § 3, на который он ссылается в приведенной цитате. Вторая часть рассуждения, т. е. переход к отрезку, представляет большие трудности, чем это могло казаться во времена Лагранжа, да и позднее: само существование одного определенного числа i, для которого все разности $f(x + i) - f(x) = Pi$ одновременно положительны, подлежит еще доказательству. В наших учебниках теорему о возрастании функции на отрезке доказывают совершенно независимо от теоремы о возрастании функции в точке, именно с помощью формулы конечных приращений (которая у Лагранжа основана на «общей лемме»).

Сочинение такого масштаба, как «Теория аналитических функций», естественно произвело сильное впечатление на современников. Но предложенное Лагранжем новое обоснование анализа не повлекло и не могло повлечь за собой отказа от разработанного на протяжении более чем столетия алгоритма исчисления бесконечно малых. В своей оценке теории Лагранжа Карно особенно подчеркивал это обстоятельство, ссылаясь к тому же на пример самого Лагранжа. В самом деле, в предисловии к новому, сильно переработанному изданию «Аналитической механики» (1788), которое вышло из печати в один год со вторым изданием «Размышлений» Карно (1813), Лагранж писал: «Мы сохранили обычные обозначения дифференциального исчисления, так как они соответствуют системе бесконеч-

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 63.

но малых величин, принятой в настоящем трактате. Если дух этой системы хорошо усвоен и если в точности ее результатов убедились с помощью геометрического метода первых и последних отношений или с помощью аналитического метода производных функций, то бесконечно малые величины можно применять в качестве надежного и удобного средства для сокращения и упрощения доказательств» [1]. Вместе с тем Карно отмечал, что Лагранж не смог обойтись и в самой теории производных функций без величин, которые «в продолжение всего вычисления ... всегда можно сделать сколь угодно малыми» [2], т. е. без величин бесконечно малых, в том смысле, который получал тогда все более широкое распространение.

«Математические начала» да Куньи

Оригинальное изложение анализа дал в конце XVIII в. португальский ученый Жосе Анастасио да Кунья (1744—1787), профессор математики университета в Коимбре, за свободомыслие отстраненный в 1778 г. по требованию инквизиционного трибунала, а затем, после двухлетнего тюремного заключения, директор одного колледжа. Для нужд преподавания да Кунья составил «Математические начала», полностью изданные уже после его смерти (Principios mathematicos, Lisboa, 1790). То был весьма сжато написанный энциклопедический курс элементарной и высшей математики в 21 книге, первые книги которого, по свидетельству ученика автора — Ж. М. де Абреу, выходили отдельными выпусками с 1782 г. Мы знакомы с этим трудом по французскому изданию де Абреу, который сам назвал свой перевод буквальным [3].

Более всего интересовали да Кунью вопросы обоснования математики. Об этом свидетельствуют многие отделы «Математических начал», а также упоминаемые во введении де Абреу к их французскому переводу названия нескольких других сочинений да Куньи, оставшихся, по-видимому, неопубликованными: «Предварительное рассуждение о первых началах геометрии», «О математической бесконечности», «Против метода первых и последних отношений зарождающихся и исчезающих величин Ньютона» [4].

Главные понятия анализа и алгоритм дифференцирования составляют предмет XV книги «Математических начал». Да Кунья выступает здесь как сторонник исчисления бесконечно малых, построенного на понятиях бесконечно малой и дифференциала, хотя употребляет частично и терминологию метода флюксий. Подобно Люилье, конкурсное сочинение которое ему, возможно, не было известно, он определяет бесконечно малую величину (во французском переводе infinitième) как «переменную, значение которой может всегда стать меньше любой данной величины» [5]. Аналогично определяется бесконечно большая величина. Термином предел он вовсе не пользуется. Особенно замечательно определение дифференциала функции $df(x)$, только терминологически отличающееся от его современ-

---

[1] *Ж. Лагранж.* Аналитическая механика, т. I, стр. 10.
[2] *Л. Карно.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, стр. 262.
[3] *J. A. da Cunha.* Principes mathématiques, traduits littéralement du portugais par J. M. d'Abreu. Bordeaux, 1811. Фотокопию этой книги нам любезно прислал профессор математики Ж. Г. Тейшейра (Лиссабон).
[4] Следует назвать еще изданный посмертно «Опыт о началах механики»: *J. A. da Cunha.* Ensayo sobre os principios de mechanica. London, 1807.
[5] *J. A. da Cunha.* Principes mathématiques..., p. 196.

ного определения, как части приращения $\Delta f(x)$ линейной относительно Δx и обладающей тем свойством, что при бесконечно малом Δx разность $\Delta f(x) - df(x)$ бесконечно мала по сравнению с Δx. Мы приведем это определение, появляющееся у да Куньи впервые, в его собственных словах, предупредив лишь, что дифференциал он называл флюксией, независимую переменную — корнем зависящей от нее функции, а для обозначения функций рекомендовал прописные греческие буквы:

«Если обозначить dx величину, взятую однородной с корнем x, и назвать ее *флюксией* этого корня, то обозначают также $d\Gamma x$ и называют флюксией Γx величину, которая делает отношение $d\Gamma x/dx$ постоянным, а $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma(x)}{dx} - \frac{d\Gamma x}{dx}$ бесконечно малой или нулем, если dx становится бесконечно малой и если все, что не зависит от dx, остается постоянным» [1]. Производная выступает только как отношение $d\Gamma x/dx$ и особого названия не получает. Всякая величина называется флюентой своей флюксии и вводится знак $\int$; далее определяются вторая, третья и т. д. флюксии (дифференциалы).

При выводе правил дифференцирования да Кунья иногда использовал разложения в бесконечные ряды, которые он получил ранее, в IX книге, и теорему о бесконечной малости многочлена $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ при бесконечно малом x, которую он доказал в случае конечного числа членов, но применял и к бесконечным степенным рядам. Мы приведем полностью исключительно лаконичный вывод дифференциала степенной функции: «$d(x^n) = nx^{n-1}dx$. Ибо, если dx бесконечно мала и то, что не зависит от dx, постоянно, то $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}\,[= nx^{n-1}]$ становится постоянной и $\frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} - \frac{nx^{n-1}dx}{dx}\left[= n\frac{n-1}{2}x^{n-2}dx + n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}x^{n-3}dx^2 + \text{и т. д.}\right]$ бесконечно малой» [2]. Формулу $d\ln x$ да Кунья немедленно вывел, почленно дифференцируя ряд $x = 1 + \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{6}(\ln x)^3 + \frac{1}{24}(\ln x)^4 + \ldots$ Из остального содержания XV книги мы упомянем еще теорему о непрерывности, как сказали бы мы, дифференцируемой функции (она используется тут же при дифференцировании произведения $x\Gamma x$), а также теоремы о дифференциале площади криволинейной трапеции и о дифференциале длины дуги плоской кривой в декартовых координатах. При формулировке и доказательстве последней теоремы да Кунья устанавливает, что дифференциал функции $f(x)$ геометрически представляется приращением ординаты касательной в соответствующей точке кривой с уравнением $y = f(x)$.

Как видно, при очень малом объеме — всего 12 страниц! — XV книга «Математических начал» да Куньи была насыщена новыми интересными мыслями и подходами, которые получили развитие в ходе реформы анализа XIX в. Да Кунья весьма оригинально построил и теорию показательной функции и логарифма в IX книге (см. стр. 321). Однако ни португальское, ни французское издания его труда не получили известности, какой заслуживали.

---

[1] *J. A. da Cunha.* Principes mathématiques..., p. 197. Как уже отмечалось, термины флюксия и дифференциал нередко употреблялись в XVIII в. один вместо другого. Ср. *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 10.

[2] Там же, стр. 198.