Эклектизм Лакруа

Оставляя пока в стороне разработку понятия об интеграле (см. стр. 344), мы можем подвести некоторый итог исследованиям по основаниям анализа, проведенным в рассматриваемую эпоху. На рубеже XVIII и XIX вв. в этой области сложилась довольно пестрая картина. Несколько методов конкурировали между собой, причем каждый, претендуя на совершенную строгость, сохранял право на существование и за другими в качестве более или менее удобного приема изложения и исследования. В глазах одних ученых безупречная строгость была присуща только методу пределов, другие отдавали предпочтение теории производных функций, все признавали практические достоинства исчисления бесконечно малых. Эта ситуация отражалась в преподавании и учебной литературе. Авторы многих курсов пошли по пути электрического соединения различных идей и процедур. Ярким представителем такого «прагматического» направления был, как уже упоминалось, Лакруа. В обширном введении к своему «Трактату» (т. I, изд. 2, 1810) он прежде всего разъясняет общие понятия о функциях и о разложениях в ряды. Отметим, в частности, что он проводит различие между функциональными рядами, которые представляют порождающую их функцию независимо от своей сходимости, и числовыми рядами, которые применимы для приближенного вычисления соответствующих величин лишь при условии их сходимости к последним. В качестве примера исследуется по Даламберу сходимость биномиального ряда (не полностью), а ряд $1 + 1\cdot 2x + 1\cdot 2\cdot 3x^2 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4x^3 + \ldots$ иллюстрирует случай степенных рядов, расходящихся для всех ненулевых значений аргумента. Далее несколько страниц отведено методу пределов и доказываются, как важнейшие, две теоремы: о единственности предела и о пределе частного. Рассмотрение «весьма общего выражения»

$$\frac{Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots}{A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \ldots},$$

в котором показатели α, β, γ, ..., α', β', γ', ... либо возрастают, либо убывают, при неограниченном уменьшении или увеличении x, дает повод к введению терминов бесконечное и бесконечно малое, а также принципа отбрасывания инфинитезимальных величин. Впрочем, элементарные теоремы об операциях с бесконечно малыми отсутствуют, так же как и явное определение бесконечно малой величины. Этим ограничивается собственно теоретическая часть введения и затем следует учение об элементарных функциях, по содержанию в большой мере совпадающее с первым томом «Введения в анализ бесконечных» Эйлера.

«Аналитическое изложение начал дифференциального исчисления» опирается у Лакруа в первую очередь на разложение разности функции по степеням произвольного приращения аргумента

$$u' - u = ph + qh^2 + rh^3 + \ldots,$$

причем функция p выступает и как предел отношения $(u' - u)/h$ и как коэффициент члена первой степени в разложении ph. Дифференциал функции du определяется как первый член разложения разности $u' - u$, так что, очевидным образом, $dx = h$ и, таким образом, функция p оказывается дробью du/dx, которую Лакруа называет дифференциальным коэффициентом (coefficient différentiel). Большинство правил дифференцирования выводится, так сказать, по Лагранжу с помощью разложений в ряды. Несколько далее общая форма степенного разложения произвольной функции устанавливается с помощью формальных преобразований, по основной идее близких к вычислениям Лагранжа, но несколько видоизмененных в одном пункте, где применяется биномиальное разложение [1]. В символике Лакруа решительно следует за Лейбницем и в отделе первой главы, озаглавленном «Размышления о метафизике дифференциального исчисления и о его обозначениях», подвергает специальной критике обозначения с помощью штрихов и индексов, предложенные Лагранжем [2].

Аналогичное смешение начальных положений методов пределов, бесконечно малых и производных функций с формализмом в применении бесконечных рядов предлагали читателям и другие популярные авторы того времени, например, воспитанники Политехнической школы и затем профессора математики Жан Луи Бушарла (1775—1848) и Луи Бенжамен Франкер (1773—1849), руководства которых, впервые вышедшие в середине 10-х годов, много раз переиздавались во Франции и, подобно курсу Лакруа, получили большое распространение в других странах, в том числе в России [3]. Но уже в это время на смену охарактеризованному эклектизму пришел необходимый синтез столь долго противоборствовавших идей: еще до 1820 г. другой воспитанник той же Политехнической школы О. Коши стал излагать с ее кафедры и вскоре опубликовал реформированную систему анализа, основанную на новой теории пределов и бесконечно малых, получившей затем общее признание.

Ряд Тейлора

Развитие исчисления бесконечно малых и его оснований шло в тесном взаимодействии с разработкой теории бесконечных степенных рядов. Как мы видели, ряд Тейлора явился краеугольным камнем конструкции анализа у Лагранжа. Мы обратимся теперь к общим вопросам теории рядов.

В предыдущем томе говорилось, что ряд Тейлора был, вероятно, известен Дж. Грегори и Ньютону (см. т. II, стр. 166 и 244) и что четверть века спустя Иоганн I Бернулли и Лейбниц пришли к ряду, из которого ряд Тейлора можно вывести с помощью весьма простого преобразования (т. II, стр. 273—274). Недавно д-р Т. Уайтсайд выяснил, что Ньютон действительно владел рядом Тейлора. В XIV предложении неопубликованного первого варианта «Рассуждения о квадратуре кривых», составленного между концом ноября 1691 г. и августом 1692 г., решается задача о выраже-

[1] Формула бинома используется примерно так же, как и у Арбогаста (ср. стр. 284), но Лакруа, который при этом ссылается на «весьма остроумные замечания» Пуассона, ограничивается употреблением двух первых членов биномиального ряда, приводя тут же их формальный вывод по Пуассону (цит. соч., стр. 163—164).

[2] В случае двух переменных Лагранж ставил штрихи или индексы сверху знака функции для дифференцирований по x и снизу для дифференцирований по y, вроде $f''(x, y)$, $f_{''}(x, y)$, $f'_{\prime}(x, y)$ и т. п., а при большем числе переменных указывал еще в скобках после знака функции соответствующие переменные, так что, например, для функции $f(x, y, z)$ производные второго порядка будут $f''(x)$, $f''(y)$, $f''(z)$, $f''(x, y)$, $f''(x, z)$, $f''(y, z)$.

[3] *J. L. Boucharlat.* Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris, 1815; *L. B. Francoeur.* Cours complet des mathématiques pures. Ed. 2. Paris, 1819. См. о них статьи И. И. Лихолетова и С. А. Яновской, а также А. П. Юшкевича, указанные в литературе.

нии с помощью «бесконечного сходящегося ряда» (series interminata convergens) какой-либо из двух флюент y, z, заданных уравнением, которое может содержать, кроме флюент, еще их флюксии. В случае, когда уравнение содержит только флюенты, Ньютон ранее применял свой метод параллелограмма (т. II, стр. 49); он показал также приемы решения отдельных видов дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов (т. II, стр. 246). В третьем королларии к XIV предложению рукописи, изученной Т. Уайтсайдом, Ньютон устанавливает, что если флюента y, в наших обозначениях являющаяся разностью вида $f(z) - f(0)$, представляется рядом $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \ldots$, то коэффициенты ряда определяются равенствами $\dot{y}/\dot{z} = a$, $\ddot{y}/\dot{z}^2 = 2b$, $\dddot{y}/\dot{z}^3 = 6c$, $\ddddot{y}/\dot{z}^4 = 24d$, $\overset{.....}{y}/\dot{z}^5 = 120e, \ldots$. Содержание четвертого королларии можно аналогично записать формулой

$$y\,[= \varphi(\omega + x) - \varphi(\omega)] = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}x + \frac{1}{2}\frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2}x^2 + \frac{1}{6}\frac{\dddot{y}}{\dot{x}^3}x^3 + \ldots$$

Ньютон применил найденную формулу степенного разложения к исследованию кривизны линий в косоугольных декартовых координатах. Можно думать, что дифференциальные свойства коэффициентов разложения функции в степенной ряд были ясны Ньютону еще ранее. В самом деле, в первом примере к X предложению второй книги «Математических начал натуральной философии» (1686) он раскладывает ординату некоторой полуокружности в точке с абсциссой $x + \alpha$ по степеням приращения абсциссы α и поясняет, что первый член ряда представляет собой ординату точки с абсциссой x, коэффициент второго члена дает наклон касательной в этой точке, коэффициент третьего члена определяет кривизну кривой в той же точке, а следующие коэффициенты определяют соответственно изменяемость кривизны, изменяемость этой изменяемости и т. д.[1] Читатель внесет необходимые поправки в сказанное нами по этому вопросу на стр. 244—245 второго тома[2].

Термин «ряд Тейлора» является, таким образом, исторически мало оправданным, хотя Тейлор, который пришел к нему самостоятельно, первым опубликовал его в VII теореме «Прямого и обратного метода приращений» (1715), а еще раньше сообщил о нем в письме к Дж. Мечину от 26 июля 1712 г. В пятой главе говорилось, что Тейлор вывел этот ряд из интерполяционной формулы Ньютона, полагая в ней приращения аргумента и функции исчезающими (см. стр. 225). Мы приведем собственную формулировку Тейлора, которую он дал, по отдельности для возрастающего и убывающего аргумента, во втором королларии к VII теореме: «В то самое время, как z при равномерном течении становится $z + v$, x становится $x + \dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot 2\cdot\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dot{z}^3}$ и т. д.», а «в то самое время, как z, убывая, становится $z - v$, x, убывая, становится $x - \dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot 2\cdot\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dot{z}^3}$ и т. д.»[3].

В «Прямом и обратном методе приращений» Тейлор использовал свою формулу при решении некоторых дифференциальных уравнений. Кроме

---

[1] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии. Перевод А. Н. Крылова. М.—Л., 1936, стр. 346.

[2] Всеми этими сведениями мы обязаны д-ру Уайтсайду, любезно сообщившему их в письме от 24 марта 1971 г. Рукопись будет издана во второй части шестого тома «The mathematical papers of I. Newton».

[3] *B. Taylor.* Methodus incrementorum directa et inversa. London, 1715, p. 23.

того, он применил ее к приближенному вычислению корней уравнений (Philos. Trans. 1717). Если известно приближенное значение x корня уравнения $f(z) = 0$, а истинное значение корня $z = x + h$, где h — малое число, то h приближенно вычисляется путем приравнивания нулю суммы первых трех членов разложения

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{2} h^2 + \ldots = 0,$$

после чего, если угодно, процесс повторяется. В сущности так поступал при решении численных алгебраических уравнений еще Галлей (1694), раскладывая многочлен $f(a + e)$, где a — приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$ и e — искомая поправка, по степеням e:

$$0 = f(a+e) = f(a) + se + te^2 + \ldots$$

и находя e из квадратного уравнения (см. т. II, стр. 49). По-видимому, как раз этот прием Галлея послужил отправным пунктом размышлений, которые привели Тейлора к открытию его ряда. В XI теореме «Прямого и обратного метода приращений» дан новый вывод ряда Лейбница — Бернулли, впрочем без ссылки на опубликованную Бернулли статью; связь между этим рядом и рядом Тейлора не отмечена.

Тейлор не мог еще оценить всей важности своего открытия, которое Кондорсе в 1784 г. назвал «теоремой Тейлора» и С. Люилье в 1786 г. «рядом Тейлора»; его значение раскрывалось постепенно на протяжении XVIII в.

Новый вывод предложил К. Маклорен во втором томе своего «Трактата о флюксиях» (1742). Предполагая, что величина y представима рядом по степеням z, а также молчаливо допуская возможность почленного дифференцирования такого ряда, Маклорен сперва записал разложение с неопределенными коэффициентами

$$y = A + Bz + Cz^2 + DZ^3 + \text{и т. д.},$$

а затем нашел A, B, C, D, ... путем последовательных подстановок $z = 0$ и дифференцирований. Результат, который мы теперь называем рядом Маклорена (сам он указывал на принадлежность теоремы Тейлору) [1], он записал в виде

$$y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1 \times 2\dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1 \times 2 \times 3\dot{z}^3} + \frac{\ddddot{E}z^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4\dot{z}^4} + \text{и т. д.},$$

где E, $\dot{E}$, $\ddot{E}$, ... суть значения y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, ... при $z = 0$. Тем самым Маклорен показал, что степенной ряд, выражающий аналитическую функцию, есть ее ряд Тейлора, другими словами, что такое разложение функции единственное. Мимоходом Маклорен указал, что в отдельных случаях, когда какой-либо коэффициент становится бесконечным, разложение невозможно. Вместе с тем он отметил, что ряд Тейлора также применим, когда функция y определяется неявным уравнением (affected equation), а во многих случаях и дифференциальным уравнением (fluxional equation). Примерами разложений служат показательная функция, синус, косинус, тангенс и секанс. Биномиальное разложение Маклорен вывел по методу неопределенных коэффициентов еще до общей формулы, предполагая известным

[1] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. II, p. 611.

правило дифференцирования степенной функции с целым положительным показателем. Этот результат он тотчас распространил на любой (в том числе бесконечный) целый многочлен, сославшись на Муавра, который сообщил эту теорему (с выводом для случая натуральных показателей) в «Philosophical Transactions» за 1697 г. [1] Связь между рядами Тейлора и Бернулли была Маклорену ясна.

В более привычной нам форме разложение какой-либо функции по степеням приращения аргумента a

$$y+\frac{ady}{1\cdot dx}+\frac{a^2d^2y}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{a^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}+\ldots$$

привел, со ссылкой на Тейлора, Эйлер в работе, посвященной выводу формулы суммирования (Commentarii (1736) 1741; ср. стр. 306); с помощью формальных преобразований он получил отсюда и ряд Бернулли. В «Дифференциальном исчислении» (1755) мы встречаем и запись Δy в виде

$$dy+\frac{1}{2}d^2y+\frac{1}{6}d^3y+\ldots$$

(ср. стр. 270). В III главе второй части этого сочинения разложение в степенной ряд выведено так же, как у самого Тейлора.

Иначе — именно повторным интегрированием — вывел ряд Тейлора Даламбер в VIII главе первой части «Исследований о различных важных вопросах системы мира» (Recherches sur les différents points importants du système du monde. 1e partie. Paris. 1754). Собственные обозначения Даламбера были малоудобны. Например, он обозначал последовательные производные рассматриваемой функции различными буквами (греческого алфавита); он не указывал пределы, в которых фактически интегрировал. В нашей символике выкладки Даламбера можно передать так. Допустим, что аргумент функции $f(x)$ получает малое приращение h, и положим $f(x+h)=f(x)+u$. Дифференцирование по h дает $f'(x+h)dh=du$, а после почленного интегрирования в пределах от 0 до h получается равенство $f(x+h)=f(x)+\int f'(x+h)\,dh$. Аналогично $f'(x+h)=f'(x)+\int f''(x+h)\,dh$, $f''(x+h)=f''(x)+\int f'''(x+h)\,dh$ и т. д. Последовательная подстановка выражений $f'(x+h)$, $f''(x+h)$, ... в предыдущие равенства приводит к разложению

$$f(x+h)=f(x)+\int f'(x)\,dh+\int dh\int f''(x)\,dh+\int dh\int dh\int f'''(x)\,dh+\ldots$$

или

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2f''(x)}{2}+\frac{h^3f'''(x)}{2\cdot 3}+\ldots$$

Здесь всюду возникает формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, который можно записать в виде $\int\limits_0^h\int\limits_0^h\ldots\int\limits_0^h f^{(n)}(x+h)\,dh^n$ или же $\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^h f^{(n)}(x+h-t)\,t^{n-1}\,dt$. Даламбер, однако, прошел мимо

[1] Само открытие Муавра относится к 1695 г. В том же году Лейбниц письменно известил И. Бернулли, что знает правило образования коэффициентов любой целой положительной степени любого многочлена (ср. стр. 98).

этого обстоятельства; его целью было разложение функции в бесконечный ряд по степеням малого приращения аргумента. Сходимость такого ряда к данной функции $f(x)$ казалась очевидной, а оценка точности приближения производилась, когда требовалось, без общих формул, применительно к случаю.

Вопрос об оценке точности приближений, доставляемых частными суммами членов ряда Тейлора, впервые общим образом поставил и решил Лагранж. Мы уже писали, что Лагранж впервые вывел формулу Тейлора с остаточным членом (см. стр. 289). Эту «новую и замечательную по своей простоте и общности теорему» Лагранж сформулировал в выражениях: «Если u обозначает неизвестную величину, заключенную в границах между 0 и x, то всякую функцию x и каких-либо других величин можно последовательно разложить по степеням x таким образом:

$$\begin{aligned} fx &= f_{\cdot} + xf'u, \\ &= f_{\cdot} + xf'_{\cdot} + \frac{x^2}{2} f''u, \\ &= f_{\cdot} + xf'_{\cdot} + \frac{x^2}{2} f''_{\cdot} + \frac{x^3}{2\cdot 3} f''' \quad \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

где величины $f_{\cdot}, f'_{\cdot}, f''_{\cdot}$ и т. д. суть значения функции fx и ее производных $f'x, f''x$ и т. д. при $x = 0$»[1], а также в виде:

$$\begin{aligned} f(z+x) &= fz + xf'(z+u), \\ &= fz + xf'z + \frac{x^2}{2} f''(z+u), \\ &= fz + xf'z + \frac{x^2}{2} f''z + \frac{x^3}{2\cdot 3} f'''(z+u) \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

За этой формой остаточного члена сохранилось имя Лагранжа. «Совершенство методов приближения, в которых применяются ряды,— писал он,— зависит не только от сходимости рядов, но еще от возможности оценить ошибку, происходящую от членов, которыми пренебрегают; и можно сказать, что в этом отношении почти все приближенные методы, употребляемые в геометрических и механических задачах, еще очень несовершенны. Предыдущая теорема во многих случаях сможет сообщить этим методам недостающее им совершенство, без чего их часто бывает опасно применять»[2].

Остаточный член формулы Тейлора был в глазах Лагранжа только средством оценки приближений, доставляемых рядом Тейлора, когда в нем отбрасываются члены, начиная с некоторого. Как мы знаем, в том, что ряд Тейлора какой-либо функции к ней, вообще говоря, сходится, Лагранж не сомневался. Он и теорему об остаточном члене формулировал для «всякой функции» и для любой частной суммы ряда. Допущение разложимости в ряд Тейлора лежало в самом начале вывода теоремы об остаточном члене, как и вообще в основе определения последовательности производных функций. Схема доказательства теоремы такова. Разложение

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \ldots$$

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 67—68.
[2] Там же, стр. 69.

подстановкой $x - i$ вместо x преобразуется в

$$f(x) = f(x-i) + if'(x-i) + \frac{i^2}{2} f''(x-i) + \ldots,$$

а это последнее подстановкой xz вместо i в

$$f(x) = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz) + \ldots,$$

при $z = 1$ только что записанный ряд будет рядом Маклорена. Далее, чтобы вывести формулу остатка для какого-либо определенного числа членов ряда, скажем для трех, Лагранж заменяет совокупность всех остальных членов выражением $x^3 R$, так что

$$f(x) = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz) + x^3R,$$

где R есть функция z, обращающаяся в нуль при $z = 0$. Дифференцирование по z приводит к равенству

$$R' = \frac{z^2}{2} f'''(x-xz),$$

и дело сводится к определению или оценке функции R по ее производной и условию, что она равна нулю при $z = 0$. Если обозначить наибольшее значение $\frac{f'''(x-xz)}{2}$ для всех значений z от 0 до 1 буквой M, а наименьшее — N, то лемма о возрастании функции с положительной производной (ср. стр. 290) позволяет установить, что значение R при $z = 1$ заключено между $N/3$ и $M/3$. Наконец, из соображений непрерывности Лагранж находит, что (при $z = 1$) $R = \frac{1}{2\cdot 3} f'''(u)$, где u — некоторое число между 0 и x; следовательно,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{1}{2\cdot 3} f'''(u).$$

Некоторые элементы приведенных рассуждений Лагранжа сохранились и в современных доказательствах [1]. Но в целом наш подход к проблеме принципиально отличается от подхода Лагранжа. Мы сперва доказываем, при тех или иных допущениях относительно дифференциальных свойств функции $f(x)$, формулу Маклорена (или Тейлора) с остаточным членом $f(x) = s_n(x) + r_n(x)$, где $s_n(x) = \sum \frac{f^m(0)}{m!} x^m$. Если $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то функция $f(x)$ представима (и притом единственным образом) своим рядом Маклорена (или Тейлора). По выражению А. И. Маркушевича, для Лагранжа первичным был ряд Тейлора, вторичным — формула Тейлора [2]; в нашем построении анализа ряд и формула поменялись местами. Таким изменением порядка мы обязаны Коши, который на конкретном примере показал, что ни существование производных любого порядка данной функции, ни даже сходимость ее ряда Тейлора еще не обеспечивают его сходи-

[1] В «Лекциях об исчислении функций» (1806) Лагранж видоизменил свой вывод; на этом мы останавливаться не будем.

[2] *А. И. Маркушевич*. Очерки по истории теории аналитических функций. М.—Л., 1951, стр. 44.

мости именно к данной функции. Этот пример, опубликованный в «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), был направлен непосредственно против концепции Лагранжа.

Функция Коши, определяемая для действительных значений аргумента условиями:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

имеет производные любого порядка, причем $\varphi^{(n)}(0) = 0$ при любом n. Рассматривая вопрос о значении дроби, числитель и знаменатель которой при некотором $x = a$ одновременно обращаются в нуль, Лагранж заявил, что случай, когда какая-либо функция $f(x)$ и все ее производные при $x = a$ обращаются в нуль, невозможен (если функция не есть тождественно нуль). В самом деле, писал он, такая функция в силу равенства $f(a + i) = f(a) + if'(a) + i^2/2\, f''(a) + \ldots$ была бы нулем для всех i, а это невозможно. Подобного рода утверждение встречается и у Эйлера (ср. стр. 271). Функция Коши опровергала это мнение; для нее все члены ряда Маклорена суть нули, т. е. ряд Маклорена сходится к нулю, а не к функции; остаточный же член всегда остается равным e^{-1/x^2}. Можно построить сколько угодно функций, ряд Маклорена которых имеет сумму, от них отличную: такой будет, например, функция $F(x) = \psi(x) + \varphi(x)$, где $\psi(x)$ — любая функция, которая разлагается в степенной ряд. В издании «Теории аналитических функций» 1813 г. Лагранж упомянул, что «некоторые геометры», видимо, допускают существование функций, которые вместе со всеми производными равны нулю при одном и том же значении аргумента [1]: не принадлежал ли к числу этих геометров Коши?

Проблемы сходимости рядов

Математики XVIII в., как и их предшественники в XVII в. отличали сходящиеся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, частные суммы которых $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ при $n \to \infty$ стремятся к конечному пределу s, от расходящихся. Более четкая формулировка этого различия и создание соответствующей терминологии связаны были, как это нередко случалось, с дискуссиями, развернувшимися вокруг одного парадокса. Профессор философии и затем математики Пизанского университета Гвидо Гранди (1671—1742) в «Геометрически изложенной квадратуре круга и гиперболы при помощи бесчисленных квадрируемых гипербол и парабол» (Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas et parabolas quadrabiles geometrice exposita. Pisis, 1703), указал, что из разложения путем деления $1/(1 + x)$ в ряд $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ при подстановке $x = 1$ возникает равенство $^1/_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Группируя члены справа попарно, он пришел к равенству $0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = {}^1/_2$ и истолковал его, как символ творения мира из ничего. Это вызвало оживленную полемику в печати и переписке, в которой приняли участие сам Гранди, Лейбниц, Вариньон, Николай I Бернулли и другие ученые. Лейбниц, отметив, что сумма ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ была бы нулем, если бы бесконечное чи-

---

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 49.

сло членов было четным, и единицей, если нечетным, указывал, что нет разумных оснований предпочтительно считать это число четным или же нечетным, и вместе с тем утверждал, что сумму следует принять равной $^1/_2$, как арифметической средней между 0 и 1 (Acta Eruditorum, 1712 и письма). В пользу такого решения он приводил аналогию с теорией вероятностей, которая учит принимать в расчет среднее арифметическое равнодостижимых величин; и в данном случае, говорил он, действует присущий природе вещей закон справедливости. Лейбниц сам называл такого рода аргументацию более метафизической, чем математической, но считал ее вполне убедительной. Вариньон, разбирая вопрос о биномиальном выражении для любых целых отрицательных показателей, высказал мнение о недопустимости рядов, которые мы называем расходящимися (Acta Eruditorum, 1712; Mém. Ac. Paris, 1715). Николай I Бернулли занял сходную позицию и в письме к Лейбницу от 7 апреля 1713 г. подчеркнул, правда, в недостаточно четкой форме, что следует учитывать остаток ряда, который он обозначил буквой R, от слова residuum [1]. В этом же письме, рассматривая примеры биномиальных разложений с дробным показателем, Николай I Бернулли употребил выражение «расходящийся ряд» (series divergens), не дав, впрочем, ему отчетливого определения [2]. В ответном письме от 28 июня Лейбниц применил выражение сходящийся ряд (series advergens) в современном смысле и дал ему пояснение: такой ряд, «который можно настолько продолжить, чтобы он отличался от какой-либо возможной (т. е. действительной.— *Ред.*) конечной величины на величину, меньшую заданной» [3]. Впоследствии в употребление вошел, впрочем, не термин advergens, а имеющий тот же смысл convergens, который в 1677 г. применил к последовательностям Дж. Грегори (см. т. II, стр. 151) [4] и затем употреблял Ньютон.

Таким образом, уже Лейбниц явно высказал определение сходящегося ряда и его суммы, которое в терминах теории пределов сформулировал Коши (1821). Аналогичное определение, правда в применении к знакоположительным рядам, мы находим у Маклорена, который писал: «Подобно тому, как прямая линия или фигура может непрерывно расти, никогда не достигая данной линии или площади, так существуют и ряды дробей, которые могут быть продолжены произвольно, но сумма членов которых всегда оказывается меньше некоторого конечного числа. Если разность между их суммой и этим числом убывает так, что при продолжении ряда может стать меньше любой сколь угодно малой данной дроби, это число есть *предел суммы ряда* и есть то, что понимают под значением ряда (the value of the progression) в предположении, что он продолжается бесконечно» [5].

---

[1] Тот же пример, что у Гранди, был разобран еще в третьей части «Арифметических предложений о бесконечных рядах и их конечной сумме» (1696) Я. Бернулли (ср. т. II, стр. 159). Поделив l на $m+n$ и приняв затем $m=n$, он получил $\frac{l}{2m}=\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\ldots$ Здесь, писал он, возникает не лишенный изящества парадокс, который объясняется тем, что остаток при делении в этом случае не уменьшается, а остается все время равным $+l$ или $-l$.

[2] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften, Bd. III. Halle, 1858, S. 982—984.

[3] Там же, стр. 985.

[4] Впрочем, математики XVIII в., в том числе Эйлер, иногда называли сходящимися ряды, члены которых по абсолютной величине неограниченно убывают. Мы пользуемся далее этим термином в нашем обычном смысле.

[5] *C. Maclaurin.* A treatise of fluxions, v. I, p. 289.

Такое же определение затем встречается в применении к убывающей геометрической прогрессии в статье «Предел» (Limite) в IX томе «Энциклопедии» (1765), написанной Даламбером и аббатом ла Шапделем.

Маклорен не ограничился определением понятия суммы ряда и тотчас применил его к выводу известного признака сходимости знакопостоянного ряда, который мы, вслед за Коши, выражаем чисто аналитически: ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_{m}^{\infty} f(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. Сам Маклорен выразил этот «интегральный признак» геометрически, сравнивая площадь между кривой $y = f(x)$ и ее асимптотой с площадью вписанной и описанной ступенчатой фигуры, соответствующей сумме членов ряда $\sum\limits_{m}^{\infty} f(n)$. Этот критерий Маклорен применил к доказательству расходимости гармонического ряда и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \zeta(k)$ при $k > 1$. Отправляясь от этого, он исследует также ряд с общим членом

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots}{ax^n + bx^{n-1} + \ldots},$$

где $x = 1, 2, 3, \ldots$, в зависимости от того, какое из условий $n - m \gtreqless 1$ имеет место. Кажется, это первый случай в литературе XVIII в., когда было рассмотрено большое число примеров на сходимость или расходимость рядов (мы привели только немногие).

Даламбер рассмотрел вопрос об условиях сходимости знакоположительного ряда, изучая разложение $(1 + \mu)^m$ при произвольном m («Математические сочинения». Opuscules mathématiques. Paris, v. II, 1768). Современный термин «признак сходимости Даламбера» исторически, по-видимому, не оправдан, Даламбер называет здесь ряд сходящимся (расходящимся), начиная с некоторого места, если члены его далее монотонно убывают (возрастают). Так, в случае разложения $\left(1 + \frac{200}{199}\right)^{1/2}$ вначале имеет место сходимость, расходимость же наступает с 300-го члена. При этом Даламбер указал, что ряд дает верные результаты только если он, начиная с некоторого члена и до бесконечности, сходится (в его смысле слова); в частности, биномиальный ряд сходится (также и в нашем смысле), когда $-1 < \mu < 1$. Вполне корректно высказал критерий сходимости, о котором идет речь, Варинг в «Аналитических размышлениях» (Meditationes analyticae, Ed. 1, Cantabrigae, 1776; Ed. 2, 1781): ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится (сходится), если отношение $u_n{:}u_{n+1}$ при бесконечно большом n меньше (больше) единицы. Формулировка этого критерия в терминах теории пределов принадлежит Коши (1821).

Эйлер, занимаясь исследованием гармонических рядов, привел необходимый критерий сходимости знакопостоянного ряда $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{kn} - s_n) = 0$, где k есть какое-либо фиксированное натуральное число, большее единицы, а s_n — n-я частная сумма ряда (Commentarii, (1734—1735) 1740; ср. стр. 339). Впрочем, соответствующее высказывание Эйлера неясно и иногда его толкуют в том смысле, что Эйлер высказал для знакопостоянного ряда необходимое и достаточное условие сходимости:

$$\lim_{n \to \infty} (s_{kn} - s_n) = 0,$$

где k принимает последовательно все натуральные значения $2, 3, 4, \ldots$ [1]

Что касается знакопеременных рядов, то, как уже говорилось (см. II, стр. 255), Лейбниц высказал носящий его имя признак сходимости ряда с чередующимися знаками в письме к И. Бернулли от 10 января 1714 г., опубликованном в их переписке тридцать лет спустя. Еще ранее тот же признак был сообщен в письме Лейбница к Я. Герману от 26 июня 1705 г. Заслуживает упоминания наблюдение, сделанное Гольдбахом: члены последовательности $1, 1/_2, 1/_3, 1/_4, \ldots$ можно так соединить знаками $+$ и $-$, чтобы сумма возникшего ряда оказалась равной любому действительному числу. Об этом Гольдбах дважды писал Эйлеру, 1 октября 1742 г. и летом 1752 г. [2] Риман в 1853 г. доказал теорему о возможности так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы новый ряд приобрел любую сумму или же расходился (опубл. 1867). Возможно, что ход мыслей в обоих случаях был одинаков.

Но если математики XVIII в. отличали сходящиеся ряды от расходящихся, если они установили несколько критериев сходимости и область сходимости отдельных разложений, все же в целом их подход к бесконечным рядам резко отличался от современного. Исходя из предполагаемого единства основных законов алгебры и анализа, математики XVIII в. формально переносили свойства конечных целых многочленов на бесконечные. Они могли быть различного мнения в вопросе о допустимости расходящихся рядов, но были единодушны в том, что любые ряды можно подвергать любым преобразованиям и действиям — умножению, делению, обращению, дифференцированию, интегрированию и т. д., — так же как целые рациональные функции. В правомерности такой практики сомневались столь же мало, как в представимости функций анализа степенными рядами. В разработке общей теории не было потребности; ни один автор не счел нужным собрать воедино уже известные общие теоремы и обосновать повседневно применяемые средства исследования. Подавляющее большинство результатов было при этом верным: от ошибок предохраняло либо то обстоятельство, что не выходили за рамки, в которых соответствующие операции действительно возможны, либо чутье. Впрочем, иногда математики XVIII в. испытывали неудовлетворенность и искали все новые и новые доказательства некоторых важных теорем. Так, большое число доказательств было посвящено теореме о биноме; один Эйлер предложил несколько ее выводов, из которых первый, основанный на рассмотрении функционального уравнения $f(a) f(b) = f(a + b)$, очевидно, выполняющегося в случае целого положительного показателя (Novi Commentarii, (1774)1775), был восполнен Коши (1821). В другом доказательстве (Nova Acta, (1787)1789) Эйлер отправлялся от допущения, что

---

[1] Такое истолкование дал впервые Г. Энештрём в 1879 г. См. *И. Ю. Тимченко.* Основания теории аналитических функций, ч. I. Одесса, 1899, стр. 411—412; см. также статью Г. Фабера в книге: *L. Euler.* Opera omnia, Series I, v. XVI, sectio altera. Basileae, 1935, p. XIV.

[2] *L. Euler* und *Chr. Goldbach.* Briefwechsel, 1729—1764, S. 123, 350.

$(1+x)^n$ представим при любом действительном n рядом $1 + Ax + Bx^2 + \ldots$ С. Е. Гурьев в неопубликованной части своего «Опыта о усовершении елементов геометрии» (1798) справедливо указал, что недостатком данного доказательства является допущение заранее такого равенства. Это равенство в точности выполняется при целом положительном n, но в других случаях оно «может иметь место..., только если к ряду прибавить член Px^u, природа которого весьма отличается от природы количеств A, B, ...» и т. д. и который «является скрытым и нам вовсе неизвестным» [1]. Правда, в собственной работе, представленной Петербургской академии наук в 1799 г., Гурьев также не дал вывод теоремы о биноме, удовлетворяющий нашим требованиям (Nova Acta, (1797—1798) 1805). Первое глубокое исследование сходимости степенного разложения произвел Гаусс в работе о гипергеометрическом ряде

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

(1812), частным случаем которого является биномиальный: $(1+x)^n = F(-n, \beta, \beta, -x)$. Коши в 1821 г. рассмотрел сходимость биномиального разложения для комплексных x и действительных n, Абель в 1826 г. распространил исследование на комплексные показатели. Но мы увидим, что еще в конце XVIII в. да Кунья, в отличие от почти всех современников, стремившийся оперировать степенными рядами только в области их сходимости, дал замечательный вывод «бинома Ньютона», исходя из своей теории показательной функции (см. стр. 322).

Улучшение сходимости рядов

Многие числовые ряды, например известный ряд Лейбница для $\pi/4$ или ряд Меркатора для $\ln 2$, сходятся очень медленно, так что для непосредственного отыскания их сумм с удовлетворительным приближением требуется складывать чрезвычайно большое число их членов. Естественно, что внимание математиков привлекла проблема улучшения сходимости, первое успешное решение которой дали математики Индии на рубеже XV и XVI вв. (ср. т. I, стр. 202). Один из ранних приемов, найденных вновь в Европе, встречается в пятой части «Арифметических предложений о бесконечных рядах и их конечной сумме» (1704) Я. Бернулли, который преобразовал ряд для $\ln(1+x)$ подстановкой $x = y/(1-y)$ в ряд для $\ln\frac{1}{1-y}$, что при $x = 1$, $y = 1/2$, позволило заменить вычисление $\ln 2 = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ вычислением

$$\ln 2 = \ln\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \ldots$$

В том же году женевский инженер Жан Кристоф Фатио де Дюилье (1656—1720) [2] письменно сообщил Я. Герману, что ряд Лейбница можно

[1] Дело С. Е. Гурьева. Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2, § 84. (Цитаты взяты из отзыва о работе Гурьева, написанного С. Я. Румовским на французском языке).

[2] Не следует смешивать с его братом математиком Николаем Фатио де Дюилье (1664—1753), принявшим энергичное участие в споре о приоритете между Ньютоном и Лейбницем на стороне первого.

преобразовать в быстрее сходящийся

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{4}{5\cdot 7\cdot 9}+\frac{4\cdot 5}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}+\ldots$$

Я. Герман в письме к Лейбницу от 21 января 1705 г. пояснил это следующими выкладками, основанными на раздвоении и группировке членов:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)-\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 7}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 9}\right)-\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7}-\frac{1\cdot 2}{5\cdot 7\cdot 9}\right)+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots\right)$$

и аналогичный прием использовал для вывода уже найденного по-другому Я. Бернулли разложения $\ln 2$.

Наиболее значительные результаты в этом направлении принадлежат Эйлеру. Свой метод улучшения сходимости рядов он изложил в статье «О расходящихся рядах», представленной Берлинской академии наук 27 октября 1746 г., но напечатанной много позднее (De seriebus divergentibus, Novi Commentarii, (1754—1755)1760), уже после того, как он был обнародован в «Дифференциальном исчислении» (1755). Данный знакочередующийся ряд $ax-bx^2+cx^3-dx^4+\ldots$ подстановкой $x=\frac{y}{1-y}$ преобразуется в ряд

$$ay-\Delta a\cdot y^2+\Delta^2 a\cdot y^3-\Delta^3 a\cdot y^4+\ldots,$$

где $y=\frac{x}{1+x}$, а $\Delta a=b-a$, $\Delta^2 a=c-2b+a$, $\Delta^3 a=d-3c+3b-a$ суть разности последовательности чисел $a, b, c, d\ldots$, При $x=1$, т. е. $y=1/2$, ряд $a-b+c-d+\ldots$ преобразуется в

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2^2}\Delta a+\frac{1}{2^3}\Delta^2 a-\frac{1}{2^4}\Delta^3 a+\ldots$$

Этот прием [1] позволяет преобразовывать одни сходящиеся ряды в другие с той же суммой, но сходящиеся быстрее. Среди примеров Эйлера имеются только что приведенные ряды для $\ln 2$ и $\pi/4$. Тот же прием Эйлер применяет к расходящимся рядам, получая для них в ряде случаев конечные суммы (ср. стр. 309). Вообще расходящиеся ряды находили в XVIII в. довольно широкие применения. Обратимся к этому вопросу.

Ряд Эйлера — Маклорена

В отношении к расходящимся рядам среди математиков рассматриваемого времени не было единодушия. Многие отвергали расходящиеся ряды. К названным несколько ранее Вариньону и Николаю I Бернулли примыкали в этом вопросе Д. Бернулли (в молодости), Даламбер, Лагранж

[1] Этот метод был известен еще Ньютону; см. The mathematical papers of I. Newton, v. 4, 1971 (Примечание при корректуре.— *Ред.*)

в более поздние годы жизни), С. Е. Гурьев и другие. С их точки зрения, суммой бесконечного ряда было естественно считать лишь результат сложения взятых подряд членов, если такой результат, т. е. предел частных сумм, существует. Имелись, однако, математики, державшиеся иной точки зрения. Лейбниц стремился как-либо обосновать странное, казалось бы, равенство $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = {}^1/_2$ (см. стр. 301). Сторонником употребления расходящихся рядов выступил в переписке 1724 г. с Д. Бернулли Гольдбах, пытавшийся объяснить смысл равенств вроде $1 - 2 + 4 - 8 + + \ldots = \frac{1}{1+2}$ или $1 + 2 + 4 + \ldots = \frac{1}{1-2}$ тем, что здесь следует различать выражение $\frac{1}{1+2}$ от $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{1-2}$ от -1. В этих замечаниях Гольдбаха можно усмотреть неясные проблески идей, которые впоследствии развил Эйлер.

Постановка и решение целого ряда вопросов, относящихся к расходящимся рядам, оказались связанными с конкретными исследованиями, убеждавшими в их ценности, несмотря на возникавшие при этом трудности и парадоксы. Речь идет об асимптотических представлениях функций, которые еще в 1669—1671 гг. Ньютон применил к вычислению частных сумм гармонических рядов (см. т. II, стр. 164—165) и которые были вновь введены в гораздо более широком масштабе в 30-е годы XVIII в. Стирлинг в 1730 г. опубликовал разложение в асимптотический ряд суммы десятичных логарифмов $\sum\limits_{k=1}^{n} \lg(x + kd)$, а Муавр — асимптотическое выражение для $n!$ при больших значениях n (см. стр. 229). Вскоре за тем Эйлер и, независимо от него, Маклорен открыли общий прием суммирования, примерами которого являются результаты Ньютона и Стирлинга и который выражает частную сумму бесконечного ряда $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u(k)$ через другой ряд, члены которого содержат общий член $u(n)$, его интеграл и производные. Впервые Эйлер привел формулу суммирования без доказательства и примеров употребления в работе 1732 г. «Общий метод суммирования рядов» (Methodus generalis summandi progressiones. Commentarii, (1732—1733) 1738), вывод ее дан в статье «Отыскание суммы ряда по данному общему члену», представленной Петербургской академии в 1735 г. (Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali. Commentarii, (1736)1741). Мы упоминали эту статью в связи с тем, что в ней ряд Тейлора записан в дифференциальных обозначениях. Обозначая общий член ряда X и сумму его x членов S, Эйлер разложил $S(x - 1)$ в ряд Тейлора, а X в ряд

$$X = S(x) - S(x-1) = \frac{dS}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2S}{dx^2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^3S}{dx^3} - \ldots,$$

из которого затем получил выражение S через X и его производные. Для этого он представил dS/dx рядом с неопределенными коэффициентами вида

$$\frac{dS}{dx} = \alpha X + \beta\frac{dX}{dx} + \gamma\frac{d^2X}{dx^2} + \delta\frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon\frac{d^4X}{dx^4} + \ldots,$$

так что

$$S = \alpha\int X dx + \beta X + \gamma\frac{dX}{dx} + \delta\frac{d^2X}{dx^2} + \varepsilon\frac{d^3X}{dx^3} + \ldots$$

(постоянная интегрирования удовлетворяет тому условию, что при $x = 0$ также $X = 0$ и $S = 0$). Далее он дифференцированием нашел выражения для d^2S/dx^2, d^3S/dx^3 и т. д. и подставил их, вместе с выражением для dS/dx, в разложение функции X, после чего, применяя метод неопределенных коэффициентов, получил уравнения, определяющие каждое из чисел α, β, γ, δ, ε.... через все предшествующие (считая после первого α); это позволяет последовательно вычислить $\alpha = 1$, $\beta = {}^1/_2$, $\gamma = {}^1/_{12}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = {}^{-1}/_{720}$ и т. д. Окончательный результат имел вид

$$S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{1}{12}\frac{dX}{dx} - \frac{1}{720}\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{1}{30\,240}\frac{d^5X}{dx^5} - \ldots$$

В этой же статье Эйлер вывел с помощью формулы суммирования первые 16 многочленов Я. Бернулли, выражающих суммы $\sum_{k=1}^{m} k^n$ до $n = 16$ (см. т. II, стр. 85—86), но он еще не обнаружил тогда зависимость между коэффициентами своей формулы и числами Бернулли; более того, возможность выразить общий член последовательности α, β, γ,... казалась ему в то время сомнительной. Другим примером употребления формулы суммирования явилось асимптотическое представление частной суммы гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = \gamma + \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \ldots,$$

с помощью которого Эйлер вычислил постоянную γ с 16 верными десятичными знаками (ср. стр. 339). Для этого он выбрал $x = 10$ и просуммировал надлежащее число членов стоящего справа ряда. Наконец, он применил формулу суммирования к приближенному вычислению сумм обратных рядов $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ для $n = 2, 3, 4$. Таким образом, он продемонстрировал пользу формулы суммирования в приближенных вычислениях. Вместе с тем из одного замечания Эйлера о ряде, выражающем сумму $\sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k}$, следует, что ему была ясна расходимость этого ряда.

19 июня 1736 г. Эйлер сообщил формулу суммирования Стирлингу, который 27 апреля 1738 г. ответил, что его собственная теорема о суммах логарифмов есть ее частный случай, а также что совершенно такая же общая формула есть в печатающейся книге Маклорена. Через год после выхода только что рассмотренной статьи Эйлера формула суммирования была опубликована в IV главе второй книги «Трактата о флюксиях» Маклорена (1742) с новым выводом, который, впрочем, также опирается на применение ряда Тейлора. Среди примеров Маклорена, кроме тех же многочленов Бернулли, фигурируют вычисления $\ln 2$, формула Стирлинга для суммы логарифмов членов арифметической прогрессии и еще целый ряд других.

Подчеркивая значение формулы суммирования в вычислениях, в которых обычно употребляемые ряды сходятся слишком медленно, Маклорен, однако, нигде не упоминает о расходимости бесконечного ряда, входящего в формулу. Замкнутое выражение коэффициентов формулы так и осталось ему, по-видимому, неизвестным. Такое выражение в конце концов нашел Эйлер, опубликовавший его в V главе второй части «Дифференциального исчисления». Здесь формула суммирования записана в виде

$$Sz = \int z dx + \frac{\alpha dz}{1\cdot 2\cdot 3dx} - \frac{\beta d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5dx^3} + \frac{\gamma d^5z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7dx^5} - \ldots,$$

причем показано, что числа α, β, γ,... выражаются через числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$,. $\mathfrak{C}$, «которые по имени открывшего их Якова Бернулли называют бернуллиевыми» [1], следующим образом:

$$\frac{\alpha}{3} = \mathfrak{A}, \quad \frac{\beta}{5} = \mathfrak{B}, \quad \frac{\gamma}{7} = \mathfrak{C}, \ldots$$

Заметим, что числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$,... связаны с числами B_m, порождаемыми символической формулой

$$(B+1)^m - B^m = m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ B_0 = 1)$$

(см. т. II, стр. 86), соотношениями:

$$\mathfrak{A} = B_2 = \frac{1}{6}, \quad \mathfrak{B} = -B_4 = \frac{1}{30}, \quad \mathfrak{C} = B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

Еще раньше Эйлер обнаружил, что отношение двух последовательных чисел Бернулли $B_{2n+2} : B_{2n}$ с ростом индекса неограниченно возрастает по абсолютной величине (Commentarii, (1739) 1750). Поэтому бесконечный ряд Эйлера — Маклорена, вообще говоря, расходится. Тем не менее формула суммирования может доставлять превосходные приближения, если ограничиваться частными суммами ряда с надлежащим числом членов. В только что упомянутой статье Эйлер дал новый способ вычисления π, исходя из равенства $\operatorname{arctg} t = \int\limits_0^t \frac{du}{1+u^2}$, приближенной замены интеграла на сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{nt}{n^2 + k^2t^2}$ и оценки разности $\operatorname{arctg} t - S$ по формуле суммирования. Полагая $t = 1$, Эйлер получил

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{2\cdot 2n^2} - \frac{1}{42}\,\frac{1}{2^3\cdot 6n^6} + \ldots - \frac{854\,513}{6\cdot 23}\,\frac{1}{2^{11}\cdot 22n}$$

и при $n = 5$ подсчитал 12 верных десятичных знаков. Особенности поведения ряда он охарактеризовал при этом исчерпывающим образом и указал, что для приближенного вычисления следует взять сумму тех первых членов ряда, которые убывают до наименьшего включительно. Он даже сделал попытку оценить в данном случае степень приближения по числу использованных членов и первому отброшенному члену, но приведенную им оценку не обосновал.

Асимптотические ряды получили важные применения также у Лагранжа, Лапласа, Лежандра, который назвал эти ряда полусходящимися (séries demi-convergentes), и других ученых. Впоследствии их изучали Коши, Пуассон, которые дали первые выражения остаточного члена, Якоби, Лобачевский, Остроградский и т. д. В широком плане к построе-

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 289—290. Термин «бернуллиевы числа» впервые употребил Муавр (1730).

нию теории асимптотических разложений приступил А. Пуанкаре (1886). Сама формула суммирования Эйлера — Маклорена является теперь одной из основных в теории конечных разностей и ее приложениях.

Суммирование расходящихся рядов

И другие расходящиеся ряды, не только асимптотические, оказывались полезным средством анализа,— если не приближенных вычислений, то различных преобразований. Сошлемся для примера на вычисления Эйлера, связанные с получением и проверкой функционального уравнения дзета-функции (ср. стр. 338). Здесь Эйлеру пришлось иметь дело с рядом

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \ldots,$$

который при $n \geqslant 1$ расходится. По существу Эйлер находил суммы таких расходящихся рядов для различных значений n как

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - 2^{n-1}x + 3^{n-1}x^2 - 4^{n-1}x^3 + \ldots),$$

что дает

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \ldots = \frac{2^n - 1}{n} B_n$$

и, в частности,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$

$$1 - 2^{2k} + 3^{2k} - 4^{2k} + \ldots = 0,$$

$$1 - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - 4^{2k-1} + \ldots = \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_{2k}.$$

Многие современники считали такие выкладки и их результаты бессмысленными. Ведь, скажем, частные суммы ряда $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots$, меняя поочередно знак, неограниченно возрастают по (абсолютной) величине; как же может быть, чтобы сумма ряда была равна нулю? Эйлер обосновывал законность употребления расходящихся рядов, обобщая понятие суммы ряда. В самом подходе к проблеме он занял позицию, которую не сумели оценить его оппоненты. Он не спрашивал, чтó есть сумма расходящегося ряда, как если бы понятие суммы было заранее дано вместе с самим рядом, а стремился выяснить, как целесообразно распространить понятие суммы на случай расходимости. Эта установка гораздо ближе к современной, чем мнение тех, кто отвергал употребление расходящихся рядов потому, что априорно считал единственно возможным толкование суммы ряда как предела частных сумм.

Свою концепцию Эйлер изложил и пояснил примерами как в переписке с Николаем I Бернулли (1743—1745) и Гольдбахом (1745), так и в печати — в «Дифференциальном исчислении» и в статье о расходящихся рядах 1746 г., напечатанной в 1760 г. (см. стр. 305). Напомним, что описанный нами выше метод улучшения сходимости рядов, примененный Эйлером в обоих этих трудах (см. стр. 305), может служить для преобразования расходящихся рядов в сходящиеся. В «Дифференциальном исчислении» среди таких примеров имеются ряд Лейбница, а также знакочередующиеся ряды квадратов и четвертых степеней натуральных чисел, о которых только что шла речь.

В III главе первой части «Дифференциального исчисления» Эйлер подробно исследует ряд, возникающий при делении $1 : (1 - x)$, выписывая результат с остаточным членом

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Если $-1 < x < 1$, остаток при $n \to \infty$ стремится к нулю и сумма бесконечного ряда $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ в обычном смысле слова есть $\frac{1}{1-x}$. Из того, что при всех значениях x вне промежутка $(-1, +1)$ частные суммы не стремятся к какому-либо конечному пределу, некоторые заключают, что при этом ряд вовсе не имеет суммы. Однако отказ от расходящихся рядов лишил бы математику многих замечательных открытий, которые удается произвести с их помощью. Кроме того, непонятно, как с помощью таких сумм, если они ложны, неизменно получаются верные результаты. Этот узел, который Эйлер называет труднейшим, и кажущееся противоречие он разрешает следующим образом: «...мы припишем слову „сумма" значение, отличное от обычного. А именно: мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1 + x + x^2 + x^3 +$ и т. д. истинная его сумма будет равна $\frac{1}{1-x}$, ибо этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число ни подставлять вместо x. При этом соглашении если ряд будет сходящимся, то новое определение слова сумма совпадет с обычным. а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений» [1].

Как теперь говорят, Эйлер наложил на понятие обобщенной суммы ряда условие регулярности; обобщенная сумма ряда должна в случае сходимости совпадать с обыкновенной суммой. Оба описанных нами приема суммирования, предложенные Эйлером, регулярны. С определением суммы ряда как конечного выражения, порождающего этот ряд, связана трудность, на которую указал в переписке с Эйлером Николай I Бернулли: не может ли один и тот же расходящийся ряд возникнуть при разложении двух существенно различных выражений, сообщающих ему два разных значения? Примеров такого рода Бернулли не привел, и Эйлер был уверен, что такие случаи невозможны, так что каждый ряд, сходящийся или расходящийся, имеет единственную сумму. Некоторые, казалось бы, противоречащие этому утверждению примеры были предложены в конце XVIII в., но Лагранж показал, что противоречие является лишь кажущимся. «И в действительности, — писал Г. Харди, — утверждение Эйлера, если его надлежащим образом истолковать, верно, ибо сходящийся степенной ряд обладает единственной порождающей его фунцией» [2]. Однако за пределами степенных рядов положение дел осложняется и утверждение Эйлера, вообще говоря, утрачивает силу.

---

[1] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 101. См. также статью Эйлера «О расходящихся рядах» (Novi Commentarii (1754—1755) 1760).

[2] *Г. Харди.* Расходящиеся ряды. Перевод Д. А. Райкова. М., 1951, стр. 29.

Следует добавить, что Эйлер отдавал себе отчет в недостаточной обоснованности своих методов суммирования. В статье «Аналитические этюды» (Exercitationes analyticae. Novi Commentarii, (1772)1773) он, вычислив $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\ldots=0{,}380\ldots$, писал, что не может с полной уверенностью приписать таким равенствам абсолютную истинность. Еще ранее, в работе о функциональном уравнении дзета-функции, он, приведя еще одно найденное им важное уравнение

$$\frac{1-3^{n-1}+5^{n-1}-\ldots}{1-3^{-n}+5^{-n}-\ldots}=\frac{\Gamma(n)\,2^n}{\pi^n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

(вновь открытое К. Мальмстеном в 1842 г. и в третий раз О. Шлёмильхом в 1849 г.), выражал надежду, что поиски его полного доказательства прольют много света на массу исследований этого рода.

Вероятно, под влиянием Эйлера переменил отношение к расходящимся рядам Д. Бернулли, изложивший свои взгляды и результаты в статье «О суммированиях парадоксально правильных рядов и их истолковании и применении» (De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu. Novi Commentarii, (1771) 1772). В несколько метафизическом плане Д. Бернулли приводит соображения в пользу употребления расходящихся рядов и их сумм, которые хотя и неверны взятые конкретно (in concreto), но вовсе не нелепы взятые отвлеченно (in abstracto). Такие парадоксальные суммы полезны как промежуточные звенья вычислений, и они приводят к правильным заключениям, подобно тому как употребление мнимых количеств приводит к правильным действительным значениям. В качестве одного из примеров Д. Бернулли рассматривает ряд $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$ при $x=1$. Он подчеркивает, что почленное интегрирование и последующая подстановка $x=1$ в этом случае дают правильное значение $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, а ведь правильный результат нельзя было бы вывести законным путем из ложного. Но более всего интересен новый метод суммирования, который Д. Бернулли приложил к периодическим колеблющимся рядам $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k$, где при некотором p и любом n имеет место $u_{n+p}=u_p$, причем $u_0+u_1+\ldots+u_{p-1}=0$. Обобщенная сумма такого рекуррентного ряда вычисляется как предел среднего арифметического частных сумм, т. е. $\lim\frac{s_0+s_1+\ldots s_{n-1}}{n}$. Именно этот прием, в сущности, применил Лейбниц к ряду $1-1+1-1+\ldots$; Д. Бернулли замечает, что к рассматриваемому типу относятся ряды по синусам и косинусам кратных дуг при частных значениях дуги.

Д. Бернулли признавал, что не может доказать общим образом свой метод, но он и не усматривал в нем, как мы теперь, определения суммы расходящегося ряда. Э. Чезаро (1890) вновь пришел к этому регулярному методу суммирования, изучая вопрос об умножении рядов; Л. Фейер применил метод Бернулли — Чезаро в теории тригонометрических рядов (1904).

Выяснение условий, в которых правомерны обобщенные методы суммирования, представляло задачу, превосходившую возможности XVIII в. Между тем манипуляции с расходящимися рядами не всегда производились с должной осторожностью, и даже Эйлер иногда формулировал неверные результаты. Так, в статье о вычислении π с помощью асимптотического разложения, проведенном с такой тонкостью, Эйлер приписал любой геометрической прогрессии, продолженной в обе стороны, сумму, равную нулю:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x}$$

(Commentarii, (1739) 1750; ср. выше, стр. 308).

В первой половине XIX в., когда Больцано, Коши, Абель и другие начали построение теории сходимости рядов, многие математики заняли по отношению к расходящимся рядам резко отрицательную позицию. Однако полностью эта область анализа никогда не оставалась заброшенной. И как раз на основе теории сходимости, а также теории аналитических функций стали возможными новые успехи теории суммирования. Существенным явилось здесь учение Вейерштрасса об аналитическом продолжении. Если функция $f(z)$ — аналитическая в области g и существует $F(z)$, аналитическая в более широкой области G и в g совпадающая с $f(z)$, то $F(z)$ называют аналитическим продолжением $f(z)$. Аналитическое продолжение является единственным, и естественно $F(z)$ обозначить также $f(z)$. Областью g может служить и промежуток действительной оси x. Так степенной ряд $1 + x + x^2 + \ldots$, сходящийся к $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в промежутке $(-1, +1)$ и вне этого интервала на оси x расходящийся, имеет своим аналитическим продолжением на всю плоскость комплексного переменного, исключая точку $z = 1$, функцию $f(z) = \frac{1}{1-z}$, совпадающую с $f(x)$ в промежутке $(-1, +1)$. Таким образом, сумма данного ряда, обобщенная в смысле Эйлера, есть аналитическое продолжение его суммы в промежутке $(-1, +1)$. Другим примером аналитического продолжения в XVIII в. может служить одно преобразование степенного ряда, предложенное Гольдбахом (Commentarii, (1727) 1729). «В этот золотой век,— писал Ж. Адамар,— математики часто пользовались в принципе идеей аналитического продолжения, тогда как для того, чтобы получить общее его определение, пришлось дожидаться Коши и Вейрштрасса» [1].

Начала общей теории суммирования расходящихся рядов были положены на рубеже XIX и XX вв. Э. Чезаро, Э. Борелем, Л. Фейером, Г. Ф. Вороным и другими учеными. Это привело к пересмотру преобладавшей до того в течение нескольких десятилетий отрицательной оценки идей Эйлера. Вместе с тем методы суммирования Эйлера и Д. Бернулли получили в новой теории строгое и надежное обоснование.

Тригонометрические ряды

В письме к Гольдбаху от 4 июля 1744 г. Эйлер сообщал: «Я работаю сейчас над трактатом по дифференциальному исчислению, в котором сделал различные любопытные открытия касательно рядов» [2],— и, среди других

1 См. Труды Первого Всесоюзного съезда математиков (1930). М.—Л., 1936, стр. 120.
2 *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 195.

результатов, указал два следующих:

$$\frac{x}{2}+\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots=\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Ряд (1) представлял собой первое в истории математики разложение алгебраической рациональной функции, в данном случае $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$, в бесконечный ряд Фурье (оно справедливо при $0<x<2\pi$); второе разложение расходится для всех x. Эйлер ни здесь, ни в других случаях не затрагивает вопрос о сходимости тригонометрического ряда [1].

Обе приведенные формулы Эйлер включил в «Дифференциальное исчисление» (1755), причем первую он вывел с помощью довольно сложных преобразований, отправляясь от ряда Тейлора для $\operatorname{arctg} x$, а вторую — дифференцированием первой. Другой способ изложен в статье «Средства вычисления синусов», представленной Эйлером Берлинской академии наук 9 марта 1752 г. и Петербургской — год спустя (Subsidium calculi sinuum. Novi Commentarii, (1754—1755) 1760). В этой статье Эйлер с помощью формул Муавра выразил $\sin^m x$, $\cos^n x$ и их произведения суммами синусов и косинусов кратных дуг, причем формально перенес свои результаты на случай отрицательных показателей, когда возникают расходящиеся ряды. Здесь же он изложил оригинальный прием разложения функций в тригонометрические ряды, который употреблял и позднее (Novi Commentarii, (1773) 1774; Nova Acta, (1789) 1793). Именно: если известна сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ с действительными коэффициентами a_n и комплексным аргументом $z=r(\cos x+i\sin x)$, то отделение действительной и мнимой частей дает суммы рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\sin nx$. В случае геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n z^n=\frac{1}{1-az}$ Эйлер получил таким образом разложения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos nx=\frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^n\sin nx=\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2},$$

которые, впрочем, вывел еще в главе о рекуррентных рядах «Введения в анализ бесконечных» (1748) при помощи фактического деления числителей обеих дробей на их знаменатели. Интегрируя вторую формулу, Д. Бернулли впоследствии нашел при $a=1$ тригонометрический ряд для $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos x)}$ (см. стр. 317). Эйлер же получил из первой формулы при

[1] Следует указать, что при всех $x\neq 0$ число $-\frac{1}{2}$ есть предел среднего арифметического частных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$. Говорят, что этот ряд суммируется к значению $-\frac{1}{2}$ процессом средних арифметических всюду, исключая $x=0$.

$a = 1$ уже встретившееся разложение

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = -\frac{1}{2}$$

и при $a = -1$ другое, также расходящееся всюду,

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots = \frac{1}{2}.$$

Интегрируя почленно последнее, Эйлер пришел к новому разложению (сходящемуся при $-\pi < x < \pi$)

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots = \frac{x}{2}$$

и, интегрируя вторично, к

$$\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}.$$

Постоянная интегрирования определяется в последнем случае при $x = 0$ из равенства $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$ (стр. 338), в этом разложении $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

В те же годы тригонометрические ряды получили применение в работах Эйлера, Д. Бернулли, Даламбера и Клеро по механике и математической физике. Чрезвычайно плодотворной была идея Д. Бернулли представить в форме ряда по синусам кратных дуг общее решение уравнения в частных производных, выражающего малые колебания струны. Мы еще обратимся к задаче о струне и возбужденным ею спорам (см. стр. 412 и след.), здесь же отметим немногое. Д. Бернулли заявил, что тригонометрический ряд вида

$$\alpha \sin\frac{\pi x}{a} + \beta \sin\frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots$$

может служить для изображения любой функции, любой кривой, для этого нужно только выбрать подходящим образом коэффициенты α, β, γ, подобно тому как это делают в случае степенного ряда. Эйлер на это возразил, что такой ряд представляет собой периодическую и к тому же нечетную функцию и, следовательно, не может выражать функции непериодические и, в частности, четные. Одной из причин спора была неясность в вопросе о промежутке, в котором ряд может или должен выразить данную функцию. Бернулли был прав, думая, что произвольная (в некотором смысле) функция представима рядом по синусам на любом конечном промежутке; однако такое представление, вообще говоря, невозможно для всех значений аргумента. Эйлер, со своей стороны, был прав, говоря, что произвольная (в том же смысле) функция не представима рядом по синусам для всех значений аргумента; однако такое представление возможно на всяком конечном промежутке. Вместе с тем Эйлер полагал, что функция, разрывная в его понимании, т. е. заданная на некотором участке двумя разными аналитическими выражениями, не может быть аналитически представлена одной формулой, а Бернулли не мог показать, что такое представление возможно (ср. стр. 253). Наконец, оба они не знали общего приема вычисления коэффициентов тригонометрического ряда для данной функции.

В конце концов позиции как Эйлера, так и Д. Бернулли не были жесткими и претерпевали некоторые изменения. 24 мая 1764 г. Эйлер писал Иоганну III Бернулли, что не собирается полностью отвергать возможность представить рядом синусов любую кривую, но считает определение бесконечного числа коэффициентов разложения крайне трудным и даже невыполнимым делом. А 25 июля 1765 г. Д. Бернулли тому же адресату заявлял: «Мой метод мне все более и более представляется общим, но лишь *потенциально*, ибо я согласен, что определение моих коэффициентов чаще всего окажется вне анализа, или, лучше, вне его возможностей» [1]

Однако в то время, когда Д. Бернулли писал эти строки, задача определения коэффициентов, которые мы теперь называем по имени Фурье, была в сущности решена дважды. Удивительным образом к этим формулам Фурье математики пришли затем еще два раза.

В работах по теории планетных движений Эйлер, Клеро, Даламбер встретились с разложением функции вида $(1 - a \cos x)^{-m}$ в ряды по косинусам кратных значений угла x. Случай $m = {}^3/_2$ рассмотрел Эйлер в премированных Парижской академией «Исследованиях по вопросу о неравенствах в движении Сатурна и Юпитера» (Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. Paris, 1749), но он ограничился нахождением численных коэффициентов первых пяти членов, которые давали радиус-вектор и долготу обеих планет с достаточным для его целей приближением. Даламбер во втором томе «Исследований о различных важных вопросах системы мира» (Recherches sur les différents points du système du monde. Paris, 1754) представил два первых коэффициента разложения указанной функции в виде интегралов, для чего сперва почленно проинтегрировал обе части разложения, а затем их произведение на $\cos x$. Несколько спустя общий результат был получен Клеро в работе «О видимой орбите Солнца вокруг Земли с учетом возмущений, вызываемых действием Луны и главных планет» (Sur l'orbite apparente du soleil autour de la terre, en ayant égard aux perturbations produites par les actions de la lune et des planètes principales. Mém. Ac. Paris, (1754) 1759). Отправляясь от определения тригонометрического многочлена по косинусам кратных углов, принимающего данные значения для n данных равноотстоящих значений аргумента, он с помощью предельного перехода перешел к разложению произвольной функции $f(x)$ на отрезке $(0,2\pi)$ в бесконечный ряд вида

$$f(x) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx, \qquad \text{где } A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Очень близко подошел к тому же результату Лагранж в первой своей работе о колебании струны — «Исследованиях о природе и распространении звука» (Recherches sur la nature et la propagation du son. Miscellanea Taurinensia, 1759). Он построил тригонометрический многочлен с n членами, соответствующий кривой, проходящей через данные n точек с равноотстоящими абсциссами, в форме, от которой путем некоторого предельного перехода, при $n \to \infty$, можно было бы прийти к тригонометрическому ряду Фурье. Однако Лагранж не пошел далее интерполяционного многочлена, так как не считал возможным выразить тригонометрическим рядом произвольную функцию.

[1] *C. Truesdell.* The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638—1788. Turici, 1960, p. 278. Письма, о которых идет речь, еще не опубликованы.

После некоторого перерыва к тем же проблемам вновь обратился Эйлер. Весной 1777 г. он представил Петербургской академии одну за другой статьи: «Легкий метод отыскания расположенных по синусам или косинусам кратных углов рядов, имеющих широчайшее применение в общей астрономической теории» и «Дальнейшее исследование рядов, расположенных по кратным какого-либо угла» (Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus; Disquisitio ulterior super seriebus secundum multiplae cujusdam anguli progredientibus. Nova Acta, (1793) 1798). В первой статье коэффициенты разложения данной на отрезке $(0, \pi)$ функции $f(x)$ в ряд по косинусам

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

выражаются приближенно. Если $\pi = n\Delta x$, где n — натуральное число, то формулы Эйлера можно записать в виде

$$a_0 + a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + \cdots + f[(n-1)\Delta x] + \frac{1}{2} f(\pi)\right\}$$

и при $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

$$a_k + a_{2n-k} + a_{2n+k} + a_{4n-k} + a_{4n+k} + \cdots =$$
$$= \frac{2}{n}\left\{\frac{1}{2} f(0) + \cos k\Delta x f(\Delta x) + \cdots + \cos(n-1)\Delta x f[(n-1)\Delta x] + \frac{1}{2}\cos k\pi f(\pi)\right\}.$$

При достаточно большом n и быстрой сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (это Эйлер специально указывает) отсюда получаются достаточно точные приближения для a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Предельный переход при $n \to \infty$ мог бы дать и интегральные формулы коэффициентов, но их Эйлер вычисляет во второй работе иначе. Предполагая, что разложение $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ имеет место, он умножает обе части на $\cos mx$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$, и, применяя известные равенства:

$$\int_0^{\pi} \cos mx\, dx = 0, \qquad \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0\ (m \neq n), \\ \frac{\pi}{2}\ (m = n), \end{cases}$$

почленным интегрированием находит, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Формулы коэффициентов в разложении по синусам Эйлер не привел, ограничившись замечанием, что сказанное легко переносится и на этот случай.

В обеих рассмотренных работах Эйлера речь шла о разложении в тригонометрический ряд функции, заданной только на конечном участке. Это, казалось бы, позволило по-новому подойти к тем трудностям, которые обнаружились в дискуссиях 50—60-х годов. Но Эйлер не вернулся к старому спору, а результаты его увидели свет только в 1798 г. Зато еще ранее, чем были представлены эти статьи Эйлера, Д. Бернулли, исследуя поведение тригонометрического ряда в целом, показал, что такой ряд, вообще говоря, представляет данную функцию только на определенном конечном промежутке; попутно он нашел новые интересные разложения. Речь идет о его статье «Об особенности бесконечных рядов, образуемых синусами или косинусами углов, следующих в арифметической прогрессии, и об их суммировании и употреблении» (De indole singulari serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu. Novi Commentarii, (1772) 1773). О разложении

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

(ср. стр. 313) Бернулли пишет, что оно справедливо только в промежутке от 0 до 2π. Совершенно правильно отмечен также скачок суммы ряда от значения $-\pi/2$ к значению $\pi/2$ при переходе через значение аргумента $x = 2\pi$. Далее, интегрируя ряд почленно, Д. Бернулли находит сумму

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots = C - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

где постоянная C определяется путем подстановки $x = \pi/2$ и $x = \pi$, а затем сравнения первого результата со вторым, поделенным на четыре, что дает $C = \pi^2/6$. На этом же пути Д. Бернулли суммирует ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^5}.$$

Упомянем еще, что он вывел разложение

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos x)},$$

справедливое при $0 < x < 2\pi$ (см. стр. 313).

Последние статьи Эйлера и Д. Бернулли по тригонометрическим рядам остались, по-видимому, незамеченными. Во всяком случае в начале XIX в. Фурье вновь нашел формулы коэффициентов, носящие его имя, притом как для разложений в неполные ряды по синусам или косинусам, так и для разложения вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

При этом он впервые показал, что и разрывная в смысле Эйлера функция, заданная на определенном участке несколькими аналитическими выражениями, может быть представлена рядом Фурье. Риман, основываясь на устном рассказе Дирихле, писал: «Когда Фурье в одной из своих первых работ по теории тепла, предложенной им Французской академии (21 декабря 1807 г.), впервые сформулировал теорему о том, что совершенно произвольно (графически) заданная функция может быть представлена тригонометрическим рядом, то это утверждение для маститого Лагранжа было столь неожиданным, что он выступил с самыми решительными возражениями»[1]. Фурье же предпринял первую попытку доказать теорему о разложимости произвольной функции в «ряд Фурье», сделал первые шаги в изучении поведения коэффицентов a_n, b_n при $n \to \infty$ (проблема, на которую обратили внимание уже Эйлер и его современники) и успешно применил тригонометрические ряды к решению уравнений математической физики, тем самым конкретно претворив в жизнь общие идеи Д. Бернулли. Результаты своих исследований Фурье изложил в «Аналитической теории тепла» (1822), выход которой в свет открыл новую эпоху в теории тригонометрических рядов, отмеченную прежде всего строгим установлением различного вида условий, достаточных для разложимости функции в ряд Фурье (Лежен-Дирихле, 1829—1837; Лобачевский, 1834—1836). С дальнейшей разработкой теории тригонометрических рядов, в которой участвовали Риман, Г. Кантор и другие крупнейшие математики, были связаны многие успехи анализа, как в его основаниях — теории множеств и теории функций, так и в приложениях к естествознанию и технике. В XX в. значительный вклад внесли в эту теорию Н. Н. Лузин, Д. Е. Меньшов и другие представители Московской математической школы.

Мы обратимся теперь к отдельным исследованиям более специального характера и прежде всего к тем, которые в то время, да и позднее, относились к введению в анализ.

Показательная и логарифмическая функции

Значительные успехи были достигнуты в изучении наиболее употребительных классов функций, частью известных ранее, частью введенных в рассматриваемое время. При этом понятие аналитической функции, «бессознательно», по выражению Ж. Адамара, принятое математиками XVIII в. и первой половины XIX в., «как тонкий и безошибочный инстинкт руководило ими при исследовании классических трансцендентных»[2]. Мы начнем с элементарных функций, круг которых был окончательно установлен к началу второй трети XVIII в. Следует сказать, что учение об элементарных функциях вплоть до Эйлера далеко еще не приняло современный вид. Некоторые отделы строились геометрически, как, например, теоремы о разложении на множители двучленов вида $x^n \pm a^n$ у Коутса (см. стр. 61). В некоторых вопросах не была достигнута еще ясность; это относится, в частности, к знакам тригонометрических функций. Так, Ф. Х. Майер, автор интересных работ по тригонометрии (см. стр. 207), принимал синус и тангенс тупого угла положительными, а косинус и котангенс — отрицательными (Commentarii, (1727) 1729).

Систематическое изложение учения об элементарных функциях в чисто аналитической форме впервые дал Эйлер в первом томе «Введения в

---

[1] *Б. Риман*. Сочинения. Перевод под редакцией и со статьей В. Л. Гончарова. М.— Л., 1948, стр. 230.

[2] См. Труды Первого Всесоюзного съезда математиков, стр. 120.

анализ бесконечных» (1748), включив в него как творчески переработанные открытия своих предшественников, так и многие собственные результаты. При этом многие функции он рассмотрел не только в действительной, но и комплексной области.

О вкладе Эйлера в теорию целых рациональных функций говорилось во второй главе. Теперь мы коротко остановимся на его трактовке показательной, логарифмической и основных тригонометрических функций. Рассмотрев в VI главе простейшие свойства показательной функции a^x, $a > 0$, и логарифмической функции, впервые ясно определенной как обратной для показательной, Эйлер в VII главе переходит к их разложениям в степенные ряды, применяя, как это отметил еще Лагранж (1797), метод, впервые использованный Галлеем в 1695 г. и основанный на формуле бинома Ньютона (см. т. II, стр. 162—163). Приняв показатель ω «бесконечно малым, т. е. столь малой дробью, что она только-только не равна нулю» [1], он пишет a^ω в виде $1 + \psi$, где ψ — бесконечно малая, и допускает, что $\psi = k\omega$, где k — постоянная, зависящая от выбора числа a. Тогда, если конечное число z представить в виде произведения $n\omega$, где в силу бесконечной малости ω величина n бесконечно большая, будет

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{n}\right)^n$$

и, по правилу бинома, которое предполагается известным,

$$a^z = 1 + \frac{1}{1} kz + \frac{1\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot n} k^2z^2 + \frac{1\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2n\cdot 3n} k^3z^3 + \cdots$$

Наконец, «если n станет больше всякого заданного числа, то дробь $\frac{n-1}{n}$ станет равна единице» [2], и точно так же $\frac{n-2}{n} = 1$, $\frac{n-3}{n} = 1$ и т. д. Поэтому

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

а отсюда при $z = 1$ находится соотношение между a и k

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

В частности, при $k = 1$ получается основание натуральных логарифмов

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

которое Эйлер вычисляет тут же с 24 верными знаками.

Здесь следует привести несколько исторических справок. Впервые число e как $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ввел Д. Бернулли в письме к Гольдбаху от 30 января (ст. ст.) 1729 г. Он получил его в качестве значения x, при котором достигает максимума функция $x^{1/x}$, причем тут же выразил e в форме

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 101. Число a Эйлер сперва принимает бо́льшим 1.

[2] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 102. Эйлер обозначает здесь бесконечную величину буквой i (от infinitum), мы заменили ее везде на n.

только что приведенного ряда[1]. Сам Д. Бернулли, разумеется, не пользовался знаком предела, он писал, что $x = \left(\frac{A+1}{A}\right)^A$, где $A = \infty$. Не было у него и символа e, который употребил для обозначения основания натуральных логарифмов впервые Эйлер, сперва в письме к Гольдбаху от 25 ноября (ст. ст.) 1731 г., затем во втором томе «Механики» (1736) и других сочинениях. Функцию e^z как предел $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ Эйлер рассмотрел еще в «Miscellanea Berolinensia» за 1743 г.

Приведенный вывод отчетливо характеризует формальную манеру инфинитезимальных операций, преобладавшую в XVIII в. Столь же свободно обращается Эйлер с бесконечными величинами и предельными переходами и в других случаях, прежде всего при выводе логарифмического ряда, исходя из равенства

$$\log(1+x) = \frac{n(1+x)^{1/n} - n}{k},$$

в котором $n = \infty$. Отметим одну подробность. Если в ряде

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)$$

взять $1 + x = a$, то для k получается

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots$$

Но тогда при $a = 10$ значение k, равное приблизительно 2,30258, выражается рядом

$$2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \cdots$$

Эйлер пишет, что «трудно понять», как это может быть, ибо, взяв даже много членов данного (расходящегося) ряда, «нельзя получить суммы, близкой к истинной». Для «устранения этого неудобства» он тотчас переходит к ряду $\log\frac{1+x}{1-x}$ и при $\frac{1+x}{1-x} = a$, т. е. $x = \frac{a-1}{a+1}$, получает для k (сходящееся) разложение

$$k = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \cdots\right],$$

члены которого при $a = 10$ «заметно убывают и поэтому скоро дают для k достаточно близкое значение»[2]. Этими замечаниями по поводу парадоксального равенства $2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \cdots$ Эйлер здесь ограничивается.

В III главе первой части «Теории аналитических функций» (1797) Лагранж довольно близко последовал при разложении показательной и логарифмической функций за Галлеем и Эйлером (см. стр. 289), метод ко-

---

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle», publiée par P.—H. Fuss, t. II, p. 246—247.

[2] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 104—105.

торых считал «допустимым в анализе», хотя он и «не обладает ни очевидностью, ни строгостью, которых нужно желать в началах какой-либо науки» [1]. В следующей главе Лагранж предложил другой вывод, «освобожденный от рассмотрения бесконечности» [2]; этот вывод, однако, также основан на формальном и некритическом употреблении биномиального разложения.

Оригинальным путем пошел да Кунья. В IX главе своих «Математических начал» (1790) он прежде всего определяет сходящийся ряд как ряд, в котором, взяв «данное число первых членов, можно пренебречь остальными без приметной ошибки» [3]. Такое определение предполагает, однако, известным, что означает выражение «сумма тех членов, которыми пренебрегают». Затем доказывается сходимость бесконечной убывающей прогрессии и, как следствие, сходимость при всех значениях a ряда

$$1+a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{2\cdot 3}+\frac{a^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Для этого остаток ряда, имеющий вид

$$c+\frac{ac}{b+1}+\frac{a^2c}{(b+1)(b+2)}+\frac{a^3c}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\cdots,$$

где $c=a^b/b!$ и $b+1>|a|$, почленно сравнивается с убывающей прогрессией

$$c+\frac{ac}{b+1}+\frac{a^2c}{(b+1)^2}+\frac{a^3c}{(b+1)^3}+\cdots$$

В другом следствии утверждается сходимость ряда

$$a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\cdots$$

при всех $a<1$ (разумеется, речь идет здесь об абсолютных значениях величин). Наконец, любая действительная степень какого-либо положительного числа a^b определяется — в духе современной теории аналитических функций — как сумма ряда

$$1+bc+\frac{b^2c^2}{2}+\frac{b^3c^3}{2\cdot 3}+\frac{b^4c^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

где c — число, для которого

$$1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2\cdot 3}+\frac{c^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots=a,$$

а возможность такого представления любого $a>0$ обосновывается следующим образом. Да Кунья полагает

$$c=2\left\{\frac{a-1}{a+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5+\cdots\right\},$$

где (логарифмический) ряд справа сходится при любом a, после чего, обозначив $\frac{a-1}{a+1}=k$, так что $a=\frac{1+k}{1-k}$, он выражает a сходящимся (в силу

---

[1] *J. L. Lagrange.* Théorie des fonctions analytiques, p. 31.
[2] Там же.
[3] *J. A. da Cunha.* Principes mathématiques, p. 117.

$k < 1$) бесконечным рядом $1 + 2k + 2k^2 + 2k^3 + \ldots$ Подстановка в ряд $1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2 \cdot 3} + \cdots$ вместо c ряда $2\left(k + \frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5} + \cdots\right)$, где $k < 1$, основанная на возведении последнего в целые положительные степени, и перегруппировка членов получившегося выражения приводят к тому же ряду $1 + 2k + 2k^2 + 2k^3 + \ldots$, сумма которого равна a, так что $1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2 \cdot 3} + \cdots = a$. Далее перемножением рядов доказывается основное свойство показательной функции $a^m a^n = a^{m+n}$ при любых m, n.

Мы отмечали уже различные попытки обосновать формулу биномиального разложения (см. стр. 304). Да Кунья выводит ее с помощью только что описанных приемов из экспоненциального ряда. Положив

$$m = 2\left\{\frac{Q}{2+Q} + \frac{1}{3}\left(\frac{Q}{2+Q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{Q}{2+Q}\right)^5 + \cdots\right\},$$

так что, по доказанному,

$$1 + Q = 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2 \cdot 3} + \cdots$$

и

$$(1 + Q)^n = 1 + mn + \frac{m^2 n^2}{2} + \frac{m^3 n^3}{2 \cdot 3} + \ldots,$$

он с помощью разложения

$$\frac{Q}{2+Q} = \frac{Q/2}{1 + \frac{Q}{2}} = \frac{Q}{2} - \frac{Q^2}{4} + \frac{Q^3}{8} - \cdots$$

и подстановки этого ряда в ряд для m получает

$$m = Q - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{3} - \frac{Q^4}{4} + \ldots;$$

этот (логарифмический) ряд сходится при $Q < 1$. Вслед за тем подстановка найденного выражения m в предыдущий ряд для $(1 + Q)^n$ дает, после группировки и приведения членов, биномиальное разложение

$$(1 + Q)^n = 1 + nQ + n\frac{n-1}{2}Q^2 + n\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}Q^3 + \ldots,$$

сходящееся в случае произвольного показателя при $Q < 1$. В конце главы да Кунья вводит понятие логарифма и доказывает его свойства [1]. Таково было первое, насколько мы знаем, изложение теории показательной и логарифмической функций, а также исследование формулы бинома, основанное исключительно на применении сходящихся рядов. Вопрос об умножении рядов и перестановке членов да Кунья, естественно, не исследовал. Добавим, что он оперировал со знакоположительными рядами, считая, по-видимому, что знакопеременный ряд сходится, если сходится соответствующий знакопостоянный ряд.

---

[1] В XXI книге «Математических начал» да Кунья возвращается к логарифмической функции и выводит разложение для $\ln(1 + x)$ по методу неопределенных коэффициентов, исходя из свойств $\lg a + \lg b = \lg(ab)$ и допущения разложимости $\ln(1 + x)$ в степенной ряд.

Тригонометрические функции

В VIII главе «Введения в анализ бесконечных» Эйлер переходит к тригонометрическим функциям, которые он называл общим термином «трансцендентных количеств, получающихся из круга»,— наш термин был введен в 1770 г. С. Клюгелем (см. стр. 208). Прежде всего Эйлер с помощью формул приведения для $\sin\left(k\frac{\pi}{2}+z\right)$ и $\cos\left(k\frac{\pi}{2}+z\right)$ при произвольном целом k вносит окончательную ясность в вопрос о знаках тригонометрических функций любой дуги; о том, что эти функции он рассматривал как безразмерные числовые количества, мы говорили ранее (см. стр. 207). Затем на основе теорем о синусе и косинусе суммы или разности чрезвычайно просто выводятся формулы Муавра (для натурального показателя) в привычной нам записи

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz,$$

а из них формулы:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2},$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

которые Эйлер применяет для последующих преобразований[1]. Именно из этих последних формул получаются разложения

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 - \cdots,$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\cos z)^{n-5}(\sin z)^5 - \cdots,$$

которые без доказательства привел И. Бернулли в «Acta Eruditorum» за 1701 г., не знавший, по-видимому, о ньютоновском разложении $\sin nz$ по степеням $\sin z$ (стр. 57) и его доказательства Муавром в «Philosophical Transactions» за 1698 г. Из этих двух разложений, принимая z бесконечно малым и n бесконечно большим при условии, что $nz = v$ сохраняет какое-либо конечное значение, а также полагая $\sin z = z = v/n$ и $\cos z = 1$, Эйлер по-новому выводит бесконечные ряды:

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots,$$

$$\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots$$

---

[1] Формулу для $\sin nz$ открыл гораздо ранее Николай I Бернулли, сообщивший ее письменно в 1728 г. Даниилу, который опубликовал ее, сославшись на письмо своего двоюродного брата, в «Commentarii», (1728) 1732.

Далее следует главный результат, а именно: Эйлер доказывает, что, как он предупредил в начале главы, синусы, косинусы и дуги «выводятся из самих логарифмов и показательных величин, когда те содержат мнимые количества» [1].

Формулы Эйлера и спор о логарифмах

Те же формулы Муавра для $\cos nz$ и $\sin nz$ при бесконечно малом z, бесконечном n и фиксированном $nz = v$ тотчас приводят, поскольку $\left(1 \pm \frac{v\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ есть $e^{\pm v\sqrt{-1}}$, к знаменитым формулам Эйлера, связывающим в комплексной области основные тригонометрические и показательную функции:

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

или, что то же,

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v,$$
$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v.$$

К этому Эйлер добавляет формулу для дуги

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{1+\sqrt{-1}\operatorname{tg} z}{1-\sqrt{-1}\operatorname{tg} z}.$$

Этими основоположными результатами, которые уже Лагранж справедливо рассматривал как «одно из наиболее прекрасных аналитических открытий, сделанных в настоящем веке» [2], Эйлер владел по меньшей мере за десять лет до выхода «Введения в анализ бесконечных». Равенства, равносильные формулам Эйлера, имелись в одной статье, представленной Петербургской академии осенью 1739 г. (Commentarii, (1740) 1750), а сами эти формулы были обнародованы во второй статье Эйлера о суммировании рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, помещенной в «Miscellanea Berolinensia» в 1743 г.,— об этой работе нам придется еще говорить. О найденных им формулах Эйлер неоднократно сообщал в те годы и своим корреспондентам — И. Бернулли в 1740 г., Гольдбаху, которому 9 декабря 1741 г. он писал об «удивительном парадоксе», состоящем в том, что $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \cos 0{,}6931471805599\ldots$ (т. е. $\cos \ln 2$), а 6 марта 1742 г. и о периодичности показательной функции в комплексной области, наконец — Николаю I Бернулли в начале 1742 г. В письме к И. Бернулли от 29 октября 1740 г. Эйлер отметил, что $2\cos x$ и $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ раскладываются в один и тот же ряд и потому представляют собой одно и то же решение некоторого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

---

[1] *Л. Эйлер.* Введение в анализ бесконечных, т. I, стр. 109.
[2] *J. L. Lagrange.* Leçon sur le calcul des fonctions. Nouv. éd. Paris, 1806, p. 114.

Впрочем, к формулам Эйлера математики подходили или даже находили их еще ранее, но либо останавливались перед решающим шагом, либо не придавали своим результатам большого значения. В статье об интегрировании рациональных дробей (Mém. Ac. Paris, (1702) 1704) И. Бернулли установил, что дифференциал действительного кругового сектора $\frac{dz}{1+z^2}$ подстановкой $z=\frac{t-1}{t+1}\sqrt{-1}$ преобразуется в дифференциал «мнимого логарифма» (logarithme imaginaire). С другой стороны, отмечал он, $\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2}\frac{dz}{1+z\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\frac{dz}{1-z\sqrt{-1}}$, т. е. сумме дифференциалов мнимых логарифмов. Из всего этого он заключил, что мнимые логарифмы заменяют собой действительные круговые секторы, и в пояснение добавил, что сумма делается действительной, так как при сложении мнимости уничтожаются.

В дифференциальных соотношениях, обнаруженных И. Бернулли, неявно содержалась зависимость между арктангенсом и логарифмом, которую мы только что привели в начале параграфа. Достаточно было эти соотношения формально проинтегрировать, чтобы зависимость выступила в явной форме. Но этого И. Бернулли не сделал, как не проинтегрировал и дифференциальное уравнение, которое получил в той же работе между арксинусом и некоторым «мнимым логарифмом». Этот вопрос остался в стороне и в другом исследовании И. Бернулли (Acta Eruditorum, 1712), в котором он произвел интегрирование рациональной дроби с мнимым знаменателем. Здесь именно он проинтегрировал, предварительно разложив на такие дроби, уравнение

$$\frac{ndx}{x^2+1}=\frac{dy}{y^2+1},$$

где $x=\operatorname{tg} A$, $y=\operatorname{tg} nA$, и таким образом получил равенство

$$(x-\sqrt{-1})^n(y+\sqrt{-1})=(x+\sqrt{-1})^n(y-\sqrt{-1}),$$

давшее ему представление $\operatorname{tg} nx$ как рациональной функции $\operatorname{tg} x$, ранее без доказательства приведенное Я. Германом (Acta Eruditorum, 1706). Заметим, что указанное выше равенство Бернулли элементарно преобразуется в формулу Муавра.

Заслуги И. Бернулли в первом применении функций комплексного переменного, как и Лейбница, с которым он вел переписку по всему рассматриваемому кругу вопросов, весьма значительны. Продвинуться вперед им обоим воспрепятствовали неясности, присущие в то время понятию логарифма. Об этом свидетельствует дискуссия между Лейбницем и И. Бернулли о природе логарифмов отрицательных чисел. В 1712 г. Лейбниц выступил в «Acta Eruditorum» со статьей, в которой по поводу парадокса Арно о пропорции $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$ высказал мнение, что подобного рода пропорции хотя и полезны в вычислениях, но состоят из мнимых отношений, ибо один из их членов меньше, чем ничто. Такие отношения Лейбниц назвал здесь «терпимо истинными». О мнимости отрицательных отношений свидетельствовало, как полагал Лейбниц, и то, что им не соответствуют какие-либо логарифмы, так как положительным логарифмам отвечают числа, большие единицы, а отрицательным — правильные положительные дроби. Таким образом, логарифм числа — 1 не истинный, а мнимый (imaginarius). Кроме того, если бы логарифм — 1 был действительный, то его половина, т. е. логарифм мнимого числа $\sqrt{-1}$, также была бы действительной, а это бессмысленно. И. Бернулли не согласился с доводами Лейбница, и с весны 1712 г. до лета 1713 г. они вели между собою письменный спор. Бернулли полагал, что логарифмы отрицательных чисел действительны и притом $\log(-a) = \log a$, так что логарифм -1 есть нуль. Ведь из тождества $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$ следует $d\log(-x) = d\log x$ и потому $\log(-x) = \log x$. И. Бернулли выдвигал и другие аргументы, например, что интегральные кривые уравнения $dx = dy/y^n$ при нечетном n, вообще говоря, симметричны относительно оси абсцисс и, значит, так же должно обстоять дело при $n = 1$, поэтому логарифмическая кривая состоит из двух симметричных ветвей $x = \log y$ и $x = \log(-y)$, причем $\log(-y) = \log y$. Кроме того, $\log(-a)^2 = \log(+a)^2$ и, следовательно, $2\log(-a) = 2\log(+a)$, т. е. $\log(-a) = \log(+a)$.

Позиция И. Бернулли не изменилась и позднее, при письменном обсуждении с Эйлером в 1727—1728 гг. вопроса о графике функции $y = (-1)^x$ и в связи с этим о логарифмах отрицательных чисел. Эйлер 21 декабря 1728 г. сделал важное возражение против аргументации своего учителя. Из дифференциального равенства $d\log(-x) = d\log x$ следует только, что $\log(-x) = \log x + C$, где $C = \log(-1)$, но допущение $\log(-1) = \log 1 = 0$ приводит к противоречиям. Последовательно применяя метод самого И. Бернулли, изложенный в «Записках» Парижской академии за 1702 г., Эйлер получил — в иных обозначениях — формулу

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{\cos x + \sqrt{-1}\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\sin x},$$

а из нее при $x = \pi/2$ вывел, что $\ln(-1) = \pi\sqrt{-1}$. Последующие рассуждения И. Бернулли, стремившегося согласовать свою точку зрения со следствиями, извлеченными из его собственного метода Эйлером, были неясными, и корреспонденты, в конце концов, перешли к обсуждению других проблем.

Все эти споры были неминуемы, пока понятие о логарифме и его свойствах долгое время было столь же нечетким, как понятие мнимой величины. Логарифм выступал то как показатель некоторой прогрессии, то как гиперболическая площадь, то в чисто аналитической форме как интеграл или как функция, заданная степенным рядом,— полагая в разложении $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ значение $x = -2$, Лейбниц вновь заключал, что логарифм -1 не может быть нулем. Связи между этими различными подходами и границы применимости каждого были изучены недостаточно; кроме того, как и в других случаях, свойства одной категории величин механически переносились на другие, в данном случае с логарифмов положительных чисел на отрицательные. Когда Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, он, в известном смысле, был прав, но сам термин «мнимые» был при этом еще более неопределенным, чем в применении к корням алгебраических уравнений.

Мы не знаем, как смотрел на природу логарифмов отрицательных чисел Р. Коутс, который первым высказал в геометрической форме предложение, носящее теперь название формулы Эйлера (1717). Во всяком случае мы уже писали, что в творчестве Коутса это открытие осталось случайным эпизодом (см. стр. 61), между тем как у Эйлера, несомненно не знакомого с этим результатом Коутса, формулы $e^{\pm v\sqrt{-1}} = \cos v \pm \sqrt{-1}\sin v$ стали органической частью анализа.

В 1745 г. спор Лейбница с И. Бернулли о логарифмах стал широко известен благодаря изданию их переписки Крамером. Вскоре затем дискуссия возобновилась в переписке Даламбера с Эйлером за 1747 и 1748 гг. В исследовании комплексных величин эти два великих ученых шли параллельно, и часто их исследования переплетались, но в вопросе о логарифмах отрицательных чисел они разошлись. Даламбер принял сторону И. Бернулли и так до конца не согласился с Эйлером, который, рассеяв туман, окутывавший проблему, построил учение о логарифмической функции в комплексной области. Основные свои положения Эйлер изложил в письме к Даламберу от 15 апреля 1747 г., а 7 сентября он представил Берлинской академии статью «О логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires); включить этот новый материал в уже печатавшееся «Введение в анализ бесконечных» было поздно. Впрочем, названная статья увидела свет лишь при публикации эйлерова научного наследия в 1862 г., а сам он напечатал переработанный вариант ее «О споре между гг. Лейбницем и И. Бернулли о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (De la controverse entre Mrs Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. Mém. Ac. Berlin, (1749) 1751). Не касаясь подробного разбора Эйлером самого спора, мы остановимся на его собственной теории. Отправным пунктом ее служит определение логарифма как функции, обратной показательной, так что $y = \ln x$, если $x = e^y$, причем $x \neq 0$. Средством исследования является разложение на действительные множители двучленов $a^n \pm z^n$, впервые данное Коутсом (см. стр. 61) и подробно и притом чисто аналитически рассмотренное в IX главе «Введения в анализ бесконечных». В частности, двучлен $a^n - z^n$ разлагается при нечетном n в произведение $a - z$ и $(n-1)/2$ трехчленов $a^2 - 2az\cos\frac{2k}{n}\pi + z^2$, а при четном n — в произведение $(a-z)(a+z)$ и $(n-2)/2$ такого же вида трехчленов, причем $2k$ принимает значения 2, 4, 6,... в числе, соответствующем показателю n.

Эйлер представляет комплексное число $x = a + b\sqrt{-1}$ в тригонометрической форме $c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ или $e^C(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$; тогда $\ln x = C + \ln(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, в этих выражениях $c = +\sqrt{a^2+b^2}$, $C = \ln c$, $\cos\varphi = a/c$, $\sin\varphi = b/c$. Если обозначить $u = \ln(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, то $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = e^u$ можно записать (ср. стр. 319) как $(1+u/n)^n$, $n = \infty$; с другой стороны, $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = e^{\varphi\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n$, $n = \infty$. Так получается двучленное уравнение бесконечно высокой степени

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 0,$$

левая часть которого раскладывается на бесконечное количество множителей вида $a^2 - 2az\cos\frac{2k}{n}\pi + z^2$, где $a = 1 + \frac{u}{n}$, $z = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}$. Приравнивая каждый из этих множителей нулю, разлагая на линейные, а также учитывая, что $\cos\frac{2k\pi}{n} = 1$ и $\sin\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n}$, Эйлер находит, что

$$1+\frac{u}{n}=\left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(1\pm\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

и, отбрасывая после перемножения в правой части бесконечно малое слагаемое высшего порядка, что

$$u=\ln(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)=(\varphi\pm 2k\pi)\sqrt{-1}.$$

Окончательно

$$\ln(a+b\sqrt{-1})=C+(\varphi\pm 2k\pi)\sqrt{-1},$$

где k — любое натуральное число или нуль, а C и φ имеют ранее указанные значения.

Таким образом, Эйлер подтвердил принципиальную правоту Лейбница, доказав, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, но при этом он впервые установил точную математическую форму этой мнимости, а заодно показал, что понятие логарифма распространяется на любые комплексные числа (кроме нуля). Оказалось, что логарифм всякого отличного от нуля числа имеет бесконечно много комплексных значений, причем для положительных чисел одно из этих значений действительное, логарифмы же остальных чисел действительных значений вовсе не имеют.

Теория логарифмов Эйлера произвела сильное впечатление на современников, хотя не все смогли оценить ее по достоинству. Даламбер более чем через десять лет после прекращения письменной полемики с Эйлером выступил с прежними и новыми возражениями в работе, помещенной в первом томе его «Математических сочинений» (Opuscules mathématiques. Paris, 1761), и вновь подтвердил свою точку зрения в статье «Логарифмы» (Logarithmes) в 20 томе «Энциклопедии» (1778). Имелись и другие ученые, сомневавшиеся в теории Эйлера или пытавшиеся эклектически примирить разногласия, но их число было невелико. В конце века Монтюкла писал, что если в математике можно судить по большинству голосов, то взгляды Лейбница и Эйлера взяли верх над воззрениями И. Бернулли и Даламбера и что «наиболее знаменитые геометры Франции приняли точку зрения Эйлера на мнимые логарифмы» [1].

Бесконечные произведения и суммы простейших дробей

Принципиально новым средством выражения и исследования функций явились их разложения в бесконечные произведения и на простейшие дроби. И в этом случае инициатором выступил Эйлер.

Разложение $\sin z$ в бесконечное произведение [2]

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

[1] *J. F. Montucla.* Histoire des mathématiques, v. III. Paris, 1802, p. 380.
[2] Знак произведения в форме прописной греческой буквы П ввел, по-видимому, Гаусс в работе о гипергеометрическом ряде (1812).

Эйлер сперва получил, отправляясь от ряда $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$, а именно: рассматривая правую часть этого равенства как многочлен бесконечно высокой степени, корнями которого служат все значения, обращающие $\sin z$ в нуль. Этот результат был опубликован в первой статье Эйлера о суммировании ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (Commentarii, (1734—1735) 1740), и здесь же было приведено разложение

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

Критические замечания И. и Д. Бернулли побудили Эйлера во второй статье, посвященной той же проблеме, вывести бесконечное произведение для $\frac{\sin z}{z}$ по другому методу, образец употребления которого мы показали в предыдущем разделе, а именно: применяя к функции

$$\frac{\left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2z\sqrt{-1}}$$

разложение на действительные квадратичные множители двучлена $a^n - y^n$ и затем полагая n бесконечно большим (Miscellanea Berolinensia, 1743). В другой работе, напечатанной в том же томе берлинских записок, Эйлер произвел разложение на простейшие дроби $\operatorname{ctg} z$ и еще несколько таких разложений дал в «Commentarii» ((1740) 1750).

Большинство этих результатов сведено в первом томе «Введения», где в IX главе только что указанным методом находятся разложения в бесконечные произведения:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right),$$

а отсюда, заменяя z на $z\sqrt{-1}$, получаются:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right).$$

В X главе даны разложения в суммы простейших дробей (обозначения Эйлера, с небольшими изменениями):

$$\frac{\pi}{2mn \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{2m^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2n^2 - m^2},$$

$$\frac{\pi}{2mn \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{2m^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2n^2 - m^2}.$$

Трактуя функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ как своего рода многочлены бесконечно высокой степени, Эйлер предвосхитил идеи, получившие развитие в том отделе теории аналитических функций, где изучаются так называемые целые трансцендентные функции, являющиеся аналитическими во всей плоскости комплексного переменного. Свойства этого класса функций в некоторой мере сходны со свойствами обыкновенных целых многочленов. Подобно тому, как любой многочлен степени n есть произведение n линейных множителей, каждый из которых имеет один корень, любая целая трансцендентная функция с бесконечным числом корней выражается через произведение бесконечного числа первичных множителей, каждый из которых имеет по одному корню. Эту теорему опубликовал Вейерштрасс в 1876 г. Что касается функций $\frac{1}{\sin z}$, $\operatorname{tg} z$ или $\operatorname{ctg} z$, то они принадлежат к мероморфным, представимым в виде частного двух целых функций («мероморфный» означает «имеющий вид дроби», от μέρος—дробь, часть и μορφή — вид, форма). Мероморфные функции аналитичны во всей плоскости, за исключением конечного или бесконечного числа изолированных точек, в которых они обращаются в бесконечность, так называемых полюсов, и которые соответствуют корням знаменателя. Г. Миттаг-Леффлер в 1877 г. обобщил на трансцендентные мероморфные функции теорему о разложении дробной рациональной функции в сумму простейших дробей, каждая из которых имеет только по одному полюсу.

Во «Введении» приводятся также примеры разложения функций в непрерывные дроби, вроде

$$\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{n}=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n-2m+\cfrac{(n-m)^2}{2m+\cfrac{(n+m)^2}{n-2m+\cfrac{(2n-m)^2}{2m+\cfrac{(2n+m)^2}{n-2m+\cdots}}}}}}$$

Функции $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, разложенные Эйлером в бесконечные произведения, называются теперь гиперболическими косинусом $\operatorname{ch} x$ и синусом $\operatorname{sh} x$. Как самостоятельный класс функций, сходных по своим свойствам с тригонометрическими, $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ были введены Винченцо Риккати (1707—1775), сыном Дж. Риккати, имя которого известно в теории дифференциальных уравнений (см. стр. 370). В первом томе своих «Сочинений по вопросам физики и математики» (Opusculorum ad res physicas et mathematicas pertinentium tomus primus. Bononiae, 1757) В. Риккати, отправляясь от рассмотрения сектора равносторонней гиперболы с действительной осью $2r$, геометрически определил гиперболические синус и косинус, которые обозначил ch и sh, и вывел основное аналитическое соотношение $\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi=r^2$, а также теоремы о $\operatorname{ch}(\varphi\pm\psi)$ и $\operatorname{sh}(\varphi\pm\psi)$.

Некоторые приложения гиперболических функций у Риккати (например, к извлечению корней) не имеют особого интереса. Вслед за В. Риккати гиперболическую тригонометрию разрабатывал десять лет спустя И. Г. Ламберт в непосредственно примыкающем к его первой работе об иррациональности e и π (см. стр. 111) «Мемуаре о некоторых замечательных свойствах круговых и логарифмических трансцендентных количеств»

(Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Mém. Ac. Berlin, (1761)1768). И у Ламберта в центре внимания были аналогии между величинами, связанными с кругом и равносторонней гиперболой. Ламберт применил гиперболические функции к решению задач обыкновенной тригонометрии (Mém. Ac. Berlin, (1768) 1770). Впоследствии гиперболические функции нашли широкое распространение как вспомогательное средство различных преобразований и вычислений.

Приближенное вычисление числа π

Среди разнообразных приложений бесконечных рядов к приближенным вычислениям мы здесь коротко остановимся только на вычислении π, которое и в XVIII в. продолжало интересовать математиков. Оригинальный прием был предложен Джоном Мечином (1680—1751), профессором астрономии в лондонском Грешем колледже. Идея Мечина заключалась в использовании дуги, имеющей рациональный тангенс и вместе с тем такой, что ее некоторое кратное весьма мало отличается от $\pi/4$. Если обозначить $\operatorname{tg}\varphi = p$, $\operatorname{tg} n\varphi = q$, то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - n\varphi\right) = \frac{1-q}{1+q} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{4} = n\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1-q}{1+q}.$$

Взяв $n = 4$, $p = {}^1/_5$, Мечин получил известную под его именем формулу

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

и с помощью степенного разложения арктангенса, сходящегося в данном случае весьма быстро, вычислил π со 100 десятичными знаками. Свой результат он опубликовал в «Обзоре достижений математики» (Synopsis palmariorum matheseos, London, 1706) Вильяма Джонса (1675—1749), преподавателя математики, принадлежавшего к окружению Ньютона. В этом вводном курсе математики Джонс впервые употребил знак π, принятый Эйлером (1736).

Ряд тангенса применил для вычисления π и парижский академик Тома Фанте де Ланьи, трудолюбиво определивший на основе равенства $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 127 десятичных знаков (Mém. Ac. Paris, (1719) 1721). Правда, 113-й из них, из-за опечатки, неверен, как это показал в 1794 г. Вега, который сам довел вычисление до 140 знаков.

Значение π, найденное Ланьи, привел в VIII главе первого тома «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлер, который неоднократно возвращался к поискам выгодных средств быстрого вычисления этого числа. Так, в одной статье, представленной Петербургской академии в начале 1738 г. (Commentarii, (1731) 1744), он показал, как, повторно применяя теорему арктангенсов $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, можно построить сколько угодно формул, аналогичных формуле Мечина, в том числе с бесконечным множеством членов, вроде

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \cdots,$$

а также привел несколько быстро сходящихся разложений арктангенса. Применяя формулу $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ последовательно к $\sin\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{4}$ и т. д., Эйлер здесь же вывел изящное выражение

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}\cdots$$

Вскоре затем Эйлер применил к вычислению π формулу суммирования (см. стр. 308). Наконец, большое число различных представлений числа π, удобных для вычислений, приведено в «Дифференциальном исчислении» (1755).

Добавим, что формулой Мечина воспользовался много позднее У. Шенкс (1812—1882), не пожалевший труда для вычисления π с 707 десятичными знаками (1874); однако позднее (1945) выяснилось, что Шенкс ошибся в 520-м знаке и все последующие цифры неверны. Современные вычислительные машины позволили резко сократить время вычислений и повысить их точность. В 1949 г. за 70 *час* было подсчитано свыше 2000 знаков π, а в 1961 г. по программе, составленной Д. Шенксом (однофамильцем У. Шенкса) и У. Ренчем-младшим, менее чем за 9 *час* было определено 100 625 десятичных знаков. Вычисление нескольких тысяч знаков π нередко служит теперь для проверки новых вычислительных машин и обучения программистов.

Вычисление π привлекло большое внимание ученых Японии. Общие судьбы этой страны отразились на развитии в ней науки. С III в. в нее начали постепенно проникать знания из Китая. Когда в середине XVI в. были установлены торговые связи с португальцами, а в первые годы XVII в. с голландцами, в Японии получило значительное распространение христианство и началось усвоение европейской культуры и науки. В 1639 г. после подавления мощного народного восстания, большинство участников которого было христианами, феодальные властители страны почти полностью прекратили контакты с внешним миром. Европейцы были изгнаны, на христианство и буддизм обрушились жестокие гонения, был наложен запрет на ввоз западной научной литературы. В этих условиях развитие математики приняло в Японии своеобразное направление, причем весьма трудно установить, какую роль могло в нем играть случайное знакомство с открытиями, сделанными в Европе. Около 1600 г. в Японии стали известны китайские приемы численного решения алгебраических уравнений высших степеней. В 1683 г. крупнейший японский математик Кова Секи, совершенствуя китайский алгоритм решения систем линейных уравнений, пришел к методу определителей (см. т. II, стр. 53). Наряду с задачами алгебры, а также теории чисел особый интерес японских математиков вызвало измерение круга и шара. Совокупность созданных с этой целью приемов получила название иенри, что значит правила или теория круга. Одним из приемов приближенной квадратуры круга служило применение вписанных правильных многоугольников. Если Мицуёси Иосида (1598—1672) пользовался в 1627 г. еще приближением, соответствующим в десятичных дробях 3,16, то Мурамацу в 1663 г. с помощью 2^{13}-угольника вычислил π до восьми десятичных знаков. Другой прием представлял собой сочетание метода интегральных сумм с разложениями в ряды. В наших обозначениях дело сводилось к следующему. Если записать уравнение окружности радиуса 1 в виде $x^2 + y^2 = 1$ и разбить круг параллельными оси ординат прямыми на очень узкие полосы, то площадь каждой полосы можно приближенно выразить в виде $2\sqrt{1-x^2}\Delta x$, а элемент дуги в виде $\Delta x/\sqrt{1-x^2}$. Разложение в ряд $(1-x^2)^{\pm 1/2}$ и почленное интегрирование $\left(\text{основанное на нахождении пределов } \lim \frac{\sum_{k=1}^{m} k^n}{m^{n+1}}\right)$ позволяют находить приближенные значения для искомой площади или периметра; при этом фактически производились вычисления, равносильные разложению арксинуса в степенной ряд.

В 1712 г. был посмертно опубликован трактат Кова Секи, в котором дается значение π, верное в 24 десятичных знаках. Ученик Кова Секи Такебе Кенко (1661—1739) с помощью дополнительных остроумных приемов выразил,— если употребить наши обозначения,— квадрат дуги кругового сегмента a в виде

$$a^2 = 4dh\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)}{(2n+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^n\right],$$

где d — диаметр и h — высота сегмента, и получил 42 десятичных знака (1722). Еще точнее был результат, найденный Иосисукэ Мацунагой (1664—1744) с помощью ряда для $\arcsin {}^1/_2$ и верный в 51-м знаке (1739). Свои приемы Кова Секи и его последователи держали некоторое время в секрете; их частично раскрыл впервые Райдо Арима (1714—1783), который, между прочим, представил некоторые приближения π и π^2 в форме непрерывных дробей, введенных в Японии Такебе.

Японские математики продолжали вносить частные усовершенствования в метод иенри и применять его к измерению некоторых других фигур и в XIX в., вплоть до буржуазной революции 1867—1868 г., после которой в Японии быстрое распространение получили научные знания, накопленные к тому времени в Европе.

Новые трансцендентные функции

К элементарным функциям на протяжении XVIII в. было присоединено большое число новых неэлементарных аналитических функций, частью в связи с интегрированием дифференциальных уравнений, возникавших в различных задачах механики, частью в ходе чисто математических исследований. При этом широкое применение находил и вместе с тем совершенствовался аппарат теории рядов. Одним из первых по времени явилось введение гамма- и бета-функций.

Мы видели во втором томе, что Валлис (1656) применил к квадратуре круга интерполирование некоторой бесконечной последовательности и в результате получил бесконечное произведение $\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\ldots}$.

Его вычисление было равносильно вычислению значения $1 : \int_0^1 (1-x^{1/p})^q\,dx$ при $p = q = {}^1/_2$, т. е. $1 : ({}^1/_2!)^2$ (см. т. II, стр. 153). В XVIII в. проблема интерполирования последовательностей вновь заинтересовала математиков, в частности благодаря связи, которую они усмотрели в ней с нахождением сумм бесконечных рядов. Сумма бесконечного ряда, члены которого суть функции своего номера, т. е ряда $u(1)+u(2)+$ $+u(3)+\ldots+(u(n)+\ldots$, рассматривалась как значение суммы его первых членов $\sum_{k=1}^{n} u(k)=f(n)$ при бесконечно большом n. Поэтому знание функции $f(n)$, выражающей общий член (terminus generalis) последовательности частных сумм, сводило задачу суммирования данного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u(k)$ к вычислению $f(\infty)$. Вообще интерполирование последовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ заключалось в отыскании аналитической функции $f(x)$, последовательно принимающей для всех натуральных n значения $u_1, u_2, u_3, \ldots$ В столь общей постановке задача может быть всякий раз решена множеством способов, от интуиции исследователя зависело найти плодотворное решение. Зная же общий член, можно было интерполировать последовательность, т. е. вычислять $f(x)$ при дробных значениях индекса x.

Первое упоминание об этой задаче в XVIII в. мы находим в письме Х. Гольдбаха к Николаю II Бернулли от 2 января 1722 г.[1] Гольдбах утверждал, что может представить в виде бесконечного ряда промежуточные члены любой последовательности, например средний между первым и вторым членами последовательности $1, 1\cdot 2, 1\cdot 2\cdot 3, \ldots$, т. е. $\frac{3}{2}!$ Метод Гольдбаха, основанный на применении разностей членов последовательности, дал ему для $\frac{3}{2}!$ разложение в расходящийся ряд, но ему удалось найти и конечное значение, выразив $\frac{1}{\frac{3}{2}!}$ сходящимся рядом

$$1-\frac{1}{2!}\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4!}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{19}{5!}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots$$

Эти результаты были включены в статью Гольдбаха «Об общих членах рядов» (De terminis generalibus seriebus, Commentarii, (1728) 1732). Но еще до выхода этой работы Гольдбах на протяжении 1728—1729 гг., когда он находился в Москве, не раз возвращался к проблеме интерполирования ряда факториалов в переписке с Д. Бернулли. В письме от 17 (6) октября 1729 г.[2] Д. Бернулли предложил для общего члена $x!$ представление $\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\frac{3}{2+x}\frac{4}{3+x}\cdots\frac{A}{A-1+x}\right)$, где A бесконечно велико, и вычислил для $^3/_2!$ приближенное значение 1,3005. Однако еще ранее Д. Бернулли поставил вопрос об отыскании «конечного выражения» для $x!$ Это удалось Эйлеру, который, проживая с Бернулли на одной квартире, был в курсе переписки его с Гольдбахом и хорошо изучил «Арифметику бесконечных» Валлиса. В первом же письме к Х. Гольдбаху от 24 (13) октября 1729 г., написанном через неделю после только что упомянутого письма Д. Бернулли, Эйлер сообщил результаты, далеко позади оставившие первые неуверенные поиски своих предшественников. В частности, он, подобно Д. Бернулли, представил $n!$ в виде бесконечного про-

---

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle», t. II, p. 128.

[2] Там же, стр. 324—325.

изведения $\frac{1\cdot 2^n}{1+n}\frac{2^{1-n}3^n}{2+n}\frac{3^{1-n}4^n}{3+n}\ldots$, а отсюда, сравнивая с произведением Валлиса, получил $\frac{1}{2}!$ в парадоксальной форме $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{-1}\ln(-1)}$, добавив, что это есть сторона квадрата, равновеликого кругу с диаметром 1, т. е. $\sqrt{\pi}/2$, и привел более точное приближение для $\frac{3}{2}! = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}!\right) = 1{,}3293403$. Через полтора месяца он представил Петербургской академии изложение начал общей теории вопроса в статье «О последовательностях трансцендентных, или же общие члены которых не могут быть выражены алгебраически» (De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt, Commentarii, (1730—1731) 1738). Основная идея заключалась в представлении общего члена последовательности $u_1, u_2, u_n \ldots$ интегралом $\int\limits_0^a p(x, n)\,dx$, при натуральных значениях параметра n совпадающим с u_n. Для последовательности $n!$ Эйлер, исходя из интеграла $\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$, изучавшегося еще Валлисом и при натуральных p, q равного $\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$, получил с помощью остроумных преобразований и предельного перехода $\lim\limits_{m\to 0}\frac{z^m-1}{m} = \ln z$, выполненного по «известному правилу» (Бернулли — Лопиталя), интеграл $\int\limits_0^1 (-\ln x)^n\,dx = \Gamma(n+1)$. Этот интеграл, при натуральном n равный $n!$ и обладающий тем свойством, что $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, и выражает общий член последовательности $n!$ (что n предполагалось > -1, Эйлер указал позднее). Сам Эйлер впоследствии, в 1771 г., обозначил интеграл символом $[n]$. Мы, вслед за Лежандром (1809), называем его гамма-функцией $\Gamma(n+1)$ или эйлеровым интегралом второго рода. Эйлеровым интегралом первого рода Лежандр назвал $\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$, где $p > -1$, $q > -1$; по предложению Бине (1839) его именуют еще бета-функцией $\mathrm{B}(p+1, q+1)$.

К гамма-функции Эйлер обращался неоднократно. В «Механике» (1736) он выразил через нее время падения точки под действием центростремительной силы, обратно пропорциональной расстоянию. Среди многочисленных установленных им свойств укажем зависимость между интегралами обоих родов

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

формулу дополнения

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)},$$

из которой тотчас следует, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (Novi Commentarii, (1771) 1772), другое весьма употребительное интегральное представление гамма-функции

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

(1765), опубликованное в Novi Commentarii, (1768) 1769, а затем в одном мемуаре 1781 г. в четвертом томе «Интегрального исчисления» [1] (1794), и, наконец, асимптотическое разложение логарифма гамма-функции (мы заменили здесь, как и Эйлер, n на x)

$$\ln \Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{1\cdot 2x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^5} - \ldots,$$

которое Эйлер вместе с асимптотическим равенством $\Gamma(x+1) = \frac{x^{x+1/2}\sqrt{2\pi}}{e^x}$ для весьма больших x привел в письме к Гольдбаху от 4 июля 1744 г. и опубликовал, выделив в коэффициентах числа Бернулли (ср. стр. 308), в «Дифференциальном исчислении» (1755). В этой работе Эйлер относит $\Gamma(x)$ к числу «непредставимых функций» [2], которые нельзя выразить не только алгебраически, но и с помощью какого-либо определенного рода трансцендентных функций и общее понятие о которых дает рассмотрение рядов. Впрочем, эти непредставимые (лучше было бы перевести: невыразимые) функции Эйлера таковы лишь в рамках дифференциального исчисления, ибо они выражаются при помощи определенных интегралов. В современной теории гамма-функция оказывается мероморфной функцией, имеющей простые полюсы 0, —1, —2,... Теория гамма-функции интенсивно разрабатывалась и в XIX и XX вв., ибо она находит многочисленные приложения в анализе и теории чисел; с нею связаны другие важные специальные функции, как дзета-функция и цилиндрические, и она входит в выражения сумм многих рядов, бесконечных произведений и определенных интегралов.

Упомянем, что в той же работе «О последовательностях» 1729 г. Эйлер попутно затронул вопрос о дифференциалах дробного порядка, ранее рассмотренный Лейбницем (см. т. II, стр. 273). В случае натурального n имеет место $\frac{d^n z^m}{dz^n} = \frac{m!}{(m-n)!} z^{m-n}$, так что $\frac{d^n z^m}{dz^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} z^{m-n}$. Эту формулу Эйлер принимает за определение производной при дробном n и, например, при $m = 1$, $n = {}^1/_2$ получает $\frac{d^{1/2} z}{dz^{1/2}} = 2\sqrt{z/\pi}$.

Асимптотическое разложение $\ln \Gamma(n+1)$ и асимптотическое равенство для $\Gamma(n+1)$ в случае натуральных значений n были получены, как об этом подробно рассказано в шестой главе, еще в 1730 г. Стирлингом и Муавром. Но оба ученых не пошли далее и не проникли глубже в природу асимптотических рядов, как это сделал Эйлер (ср. стр. 308).

В петербургских кругах обсуждали и другие проблемы, которые, возникнув в XVII в., теперь повлекли за собой исследования по транс-

---

[1] При переиздании «Интегрального исчисления» Н. И. Фусс объединил в его четвертом томе ряд статей Эйлера, в том числе 14 еще неопубликованных.

[2] *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление, стр. 509.

цендентным функциям. Одной из них была задача суммирования обратных квадратов. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ тщетно пытались просуммировать Менголи (1659) и Я. Бернулли, доказавший его сходимость (1689). К нему вновь обратились в своей переписке 1728—1729 гг. Гольдбах и Д. Бернулли, приближенно подсчитавшие его сумму, правда, с точностью, не превосходящей 0,01; Стирлинг (1730) привел ее значение с восемью верными десятичными знаками. Эйлер первоначально также занялся приближенным вычислением $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, которое в поисках какого-либо закона затем распространил и на некоторые другие ряды обратных степеней $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$. Но уже в статье «О суммах обратных рядов», представленной Петербургской академии в декабре 1735 г. (De summis serierum reciprocarum, Commentarii, 1734—1735) 1740), он проник в свойства функции $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, которую мы после Б. Римана (1857) называем дзета-функцией, гораздо глубже; а именно: показал, что в случае четного показателя $2n$ отношение $\zeta(2n)\colon \pi^{2n}$ рационально. Одно из доказательств основывалось на разложении в бесконечное произведение синуса, о котором говорилось ранее (стр. 328):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Распространяя на это уравнение бесконечно высокой степени известные зависимости между суммами обратных степеней корней алгебраического уравнения и его коэффициентами, Эйлер здесь последовательно вычислил

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90},$$
$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

вплоть до значения $\zeta(12)$. Впоследствии, учитывая критические замечания Иоганна I и Даниила Бернулли [1], Эйлер дал и другие, уточненные обоснования этих результатов. В X главе первого тома «Введения в анализ бесконечных» он привел аналогичные формулы до $2n = 26$, а в «Дифференциальном исчислении» записал их в общем виде с помощью чисел Бернулли (ср. стр. 308):

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}.$$

Помимо $\zeta(2n)$ Эйлер просуммировал еще и другие родственные ряды, суммы которых находятся в рациональном отношении к соответствующей

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII[e] siècle», t. II, p. 477.

степени π. Так, например, сумма знакочередующегося ряда

$$\frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}\zeta(2n)$$

и, в частности,

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}.$$

Однако ему не удалось аналогично вычислить $\zeta(2n+1)$, и до сих пор арифметическая природа этих сумм остается неизвестной.

В третьей главе упоминалось тождество Эйлера

$$\zeta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}=1:\prod^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^n}\right),$$

где p принимает все простые значения начиная с 2, которое он впервые установил в «Записках» Петербургской академии, (1737) 1744. В XV главе «Введения в анализ бесконечных» оно используется для определения сумм новых рядов и произведений, в частности, к приближенному вычислению сумм степеней рядов чисел, обратных простым, т. е. $\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p^n}$, $n>1$. Что касается ряда $\sum^{\infty}\frac{1}{p}$, то для него Эйлер получил асимптотическое равенство $\sum_{p\leq m}\frac{1}{p}\cong\ln\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)$, откуда заключил, что ряд чисел, обратных простым, расходится. Исследованием рядов, члены которых суть функции простых чисел, занимался затем П. Л. Чебышев.

Используя суммирование расходящихся рядов, Эйлер в 1749 г. обнаружил еще одно замечательное свойство дзета-функции. Оно выражается уравнением

$$\frac{1-2^{n-1}+3^{n-1}-\ldots}{1-2^{-n}+3^{-n}-\ldots}=\frac{-(n-1)!\,(2^n-1)\cos\frac{n\pi}{2}}{(2^{n-1}-1)\pi^n},$$

или в нынешних обозначениях

$$\zeta(1-n)=2^{1-n}\pi^{-n}\cos\frac{n\pi}{2}\,\Gamma(n)\,\zeta(n).$$

Ряды, стоящие в числителе и знаменателе левой части первой записи этого уравнения, одновременно сходятся только при $0<n<1$. Вывод Эйлера не был полным, и, с его точки зрения, он лишь проверил его для ряда целых и дробных значений n (ср. стр. 309). Б. Риман вновь открыл это важное функциональное уравнение в 1859 г., через девяносто лет после выхода в свет статьи Эйлера «Заметки о красивом соотношении между рядами как прямых, так и обратных степеней» (Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques. Mém. Ac. Berlin, (1761) 1768). Эта замечательная статья оставалась в полном забвении до 1894 г.

Дзета-функция и тождество Эйлера стали впоследствии важнейшим средством теории распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях, в первую очередь благодаря Чебышеву, применявшему эту функцию при действительных значениях аргумента, больших единицы (1849—1852), и затем — Риману, который определил $\zeta(s)$ как аналитическую функцию комплексного переменного не только для значений, когда ряд $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ сходится (т. е. действительная часть s больше единицы), но и на всей комплексной плоскости, за исключением простого полюса $s = 1$. Изучение свойств дзета-функции продолжается до сих пор. В частности, остается неизвестным, верна ли следующая гипотеза Римана, подтверждение которой позволило бы немедленно решить многие задачи теории чисел (доказанные в допущении ее справедливости): все корни дзета-функции, помимо четных отрицательных чисел, имеют действительную часть, равную $^1/_2$.

К числу «непредставимых» функций Эйлер относил и функцию $f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}$. Вычислением и оценками частных сумм гармонического ряда занимались, как мы знаем, еще математики XVII в.. в частности Менголи и Ньютон (см. т. II, стр. 158 и 164). Эта проблема занимала и ученых рассматриваемого времени. Среди многочисленных результатов назовем, по крайней мере, один, принадлежащий Эйлеру. В «Замечаниях о гармонических рядах» (De progressionibus harmonicis observationes. Commentarii, (1734—1735) 1740) он вывел асимптотическое при $n \to \infty$ равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \simeq \ln(n+1) + \gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(4) - \ldots,$$

и вычислил $\gamma = 0{,}577218$ с точностью до предпоследнего знака. С помощью формулы суммирования Эйлер вскоре вычислил γ с 16 знаками (стр. 307). До сих пор неизвестно, является ли γ рациональным или же иррациональным числом. Постоянная Эйлера γ входит во многие формулы теории специальных функций.

Если новые трансцендентные функции, рассмотренные нами до сих пор, вошли в математику в ходе решения ее собственных задач, то третий важный класс — цилиндрических функций — встретился сперва в задачах механики.

Цилиндрической функцией первого рода порядка n называют ограниченный при $x = 0$ частный интеграл $J_n(x)$ уравнения

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)\, y = 0;$$

интеграл того же уравнения $Y_n(x)$, неограниченный при $x = 0$, называется цилиндрической функцией второго рода порядка n. Понятие цилиндрической функции распространяется на все целые и дробные значения индекса. Самый термин «цилиндрическая функция» был предложен Э. Гейне (1868), но до сих пор нередко говорят о функциях Бесселя, хотя этот выдающийся немецкий астроном и математик не был первым ученым, введшим и применившим цилиндрические функции[1].

Функция $J_{1/3}(x)$ встречается еще в одном письме И. Бернулли к Лейбницу 1703 г. Затем $J_0(x)$ мы находим у Д. Бернулли, который под влиянием отца приступил к изучению малых колебаний грузов, связанных с подвешенной в одном конце невесомой гибкой нитью, а также, в предельном случае, малых колебаний однородного тяжелого подвешенного каната (Commentarii. (1732—1733) 1738 и (1734—1735) 1740). Выразив задачу уравнением

$$nx\frac{d^2y}{dx^2}+n\frac{dy}{dx}=-y,$$

где y — отклонение точки каната от вертикального положения равновесия, а $x=l-s$, разность между длиной каната l и длиной его дуги s, считая от точки подвеса, Д. Бернулли нашел решение в форме ряда

$$y=1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{4n^2}-\frac{x^3}{4\cdot 9n^3}+\frac{x^4}{4\cdot 9\cdot 16n^4}-\ldots,$$

представляющего цилиндрическую функцию J_0 от аргумента $2\sqrt{\frac{x}{n}}$. Так как в точке подвеса $x=l$, $y=0$, то $1-\frac{l}{n}+\frac{l^2}{4n^2}-\frac{l^3}{4\cdot 9n^3}+\ldots=0$. Это уравнение, как правильно заметил Д. Бернулли, имеет бесчисленное множество действительных корней, из которых он приближенно вычислил первые два. Ранее говорилось о предложенном Д. Бернулли способе вычисления корней алгебраических уравнений (стр. 79), который он распространил и на «бесконечно продолжающиеся уравнения» (Commentarii, (1730—1731) 1738).

Вновь к цилиндрическим функциям пришел Эйлер, занимавшийся с 1759 г. изучением малых поперечных колебаний однородной круглой мембраны, т. е. плоской пленки, не сопротивляющейся изгибу и сдвигу. Уравнение с частными производными, полученное им для смещений, перпендикулярных к плоскости равновесия мембраны, он свел к общему уравнению цилиндрических функций, а решение последнего выразил бесконечным рядом, сумма которого по существу совпадала с цилиндрической функцией первого рода и произвольного порядка $J_n(x)$ (Novi commentarii, (1764) 1766). Об этой задаче подробнее рассказано далее (стр. 428). Вслед за тем во втором томе «Интегрального исчисления» (1769) Эйлер, решая некоторые обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, построил их общие интегралы при помощи цилиндрических функций обоих родов при $n=0, 1, 2$. Из других его результатов следовало также, что функция первого рода $J_{n+1/2}(x)$ с полуцелым индексом выражается в конечной форме через алгебраические и тригонометрические функции. Бесконечные ряды, представляющие $J_n(x)$, получил также в исследованиях о движении планет Лагранж (Mém. Ac. Berlin, (1769) 1771). Однако только Бессель (1824; опубл. 1826) ввел цилиндрические функции как таковые, дал им особое обозначение I_k^h, соответствующее нашему $J_h(k)$, и начал систематическую разработку общей теории.

[1] Названия «функция первого рода» и «функция второго рода», а также нынешние обозначения были применены тогда же К. Нейманом (1867), Э. Ломмелем (1868) и другими учеными.

В конце XVIII в. Лежандр и Лаплас в трудах по теории потенциала ввели другой весьма важный класс сферических функций — мы к этому еще вернемся в последующем (см. стр. 443 и след.). Список новых трансцендентных функций, открытых в рассматриваемое время, далеко не исчерпывается приведенными здесь. Напомним, что во «Введении в анализ бесконечных» Эйлера были рассмотрены некоторые тета-функции Якоби (стр. 106); к этому можно было бы присоединить и другие примеры.

Некоторые вопросы дифференциального исчисления

Мы дополним теперь те сведения, которые уже были приведены о развитии общей концепции дифференциального исчисления, рядом подробностей. Основные правила дифференцирования были установлены к концу XVII в., но для тригонометрических функций они не были особо сформулированы, пока это не сделал Р. Коутс в упоминавшейся (см. стр. 133) статье «Оценка погрешностей в прикладной математике с помощью изменений элементов плоского и сферического треугольника» (1722). Здесь он геометрически обосновал и высказал правила

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x, \qquad \frac{d \sec x}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x,$$

первое из них, например, в словах: наименьшее изменение какой-либо круговой дуги относится к наименьшему изменению синуса этой дуги, как радиус к синусу дополнения. Что касается функций, обратных тригонометрическим, то они, как отмечалось ранее, еще и в это время выступали как некоторые площади, и символика для них еще не была создана. Д. Бернулли первым ввел знак арксинуса в форме AS (опубл. 1729); за ним последовал Эйлер, обозначивший арктангенс At (1736); в 70-е годы благодаря Лагранжу, Ламберту и другим ученым входят в употребление привычные нам обозначения, вроде arc.sin (еще с точкой!), с которыми, впрочем, в некоторых странах и сейчас конкурируют символы $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ и т. д., предложенные Джоном Гершелем (1813).

Б. Тейлор (1715, ср. стр. 224) распространил алгоритм дифференцирования на обратные функции и в терминах метода флюксий показал, как выражаются вообще производные x по y через производные данной функции $y = f(x)$ по x.

Полный свод правил дифференцирования, выраженных и выведенных аналитически, дал Эйлер в «Дифференциальном исчислении».

Значительное развитие получило учение о функциях многих переменных. Такие функции встречались и ранее, но систематическое построение этого отдела анализа началось только в XVIII в. В символике единство достигнуто не было. Лейбниц в одном письме 1694 г. к Лопиталю предложил для частных производных $\frac{\partial m}{\partial x}$ и $\frac{\partial m}{\partial y}$ символы δm и ϑm, которые позднее не использовались. Эйлер для частных производных по x, y, z употребил соответственно буквы P, Q, R (1728; опубл. 1732), которые затем иногда заменял на строчные буквы p, q, r; в том же смысле они применяются и теперь. Как общий прием отличения частных производных от обыкновенных Эйлер в «Дифференциальном исчислении» (1755) применил заключение обычных символов в скобки, вроде (dP/dx) и (dQ/dy). Все же многие математики и до того, и позднее обозначали оба рода производных с помощью прямых d; при записи частных и полных дифференциалов, в которой производные умножаются на дифференциалы аргументов, это недоразумений не вызывало. Нашей современной записью с помощью круглой ∂ мы обязаны Якоби (1841). Правда, такую запись еще раньше применил Лежандр (1786; опубл. 1788) со специальной целью избежать смешения между $\partial v / \partial x$, как коэффициентом при dx в выражении полного дифференциала функции v, и дробью dv/dx; однако в дальнейшем он такую символику не употреблял.

Независимость результата дифференцирования по нескольким переменным от порядка дифференцирований была обнаружена Николаем I Бернулли (Acta Eruditorum, Suppl. VII, 1721), а первые доказательства этой теоремы предложили независимо друг от друга Эйлер в статье «О бесчисленных кривых одного рода...»[1] и «Дополнении..» к ней (De infinitis curvis ejusdem generis..., Additamendum... Commentarii, (1734—1735) 1740) и Клеро в «Исследованиях по интегральному исчислению» (Recherches générales sur le calcul intégral. Mém. Ac. Paris, (1739) 1741). Оба рассмотрели случай функции двух независимых переменных. Вывод Эйлера основан был непосредственно на понятии о частном дифференциале как бесконечно малом приращении функции, вызванном бесконечно малым приращением соответствующего аргумента. Частный дифференциал $F(t, u)$ относительно t есть разность $F(t + dt, u) - F(t, u)$, и поэтому дифференциалом этого дифференциала относительно u является $[F(t + dt, u + du) - F(t, u + du)] - [F(t + dt, u) - F(t, u)]$. С другой стороны, частный дифференциал $F(t, u)$ относительно u есть разность $F(t, u + du) - F(t, u)$, а дифференциал этого дифференциала относительно t есть $[F(t + dt, u + du) - F(t + dt, u)] - (F(t, u + du) - F(t, u)]$, т. е. тот же четырехчлен, что и в предыдущем случае. В наших доказательствах используется с требуемыми ограничениями и уточнениями аналогичная схема. Клеро дал иное обоснование теоремы: он исходил из того, что функция двух независимых переменных x, y разложима в степенной ряд с членами вида $rx^m y^n$, для каждого из которых теорема верна.

Наряду с понятием частного дифференциала естественно появилось и понятие полного дифференциала функции многих переменных. Необходимое условие, при котором выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ есть полный дифференциал du некоторой функции $u(x, y)$, т. е. условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, было установлено в прямой связи с предыдущей теоремой Эйлером и Клеро в только что названных работах. То же условие в 1738 г. нашел парижский академик Алексис Фонтен де Бертен (1704—1771), опубликовавший этот и другие свои результаты лишь много позднее в «Мемуарах, представленных королевской Академии наук и в свое время не напечатанных» (Mémoires donnés à l'Académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps. Paris, 1764). В 1740 г. Клеро распространил исследование на функции трех переменных, показав, что если выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ есть полный дифференциал то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$; он рассмотрел и случай n независимых переменных. Эти открытия, о которых Клеро письменно сообщил в 1740 г. Эйлеру, он опубликовал в статье «Об интегрировании или построении дифференциальных уравнений первого порядка» (Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre. Mém. Ac. Paris, (1740) 1742). Здесь же Клеро показал,

[1] Именно в этой статье Эйлер впервые применил для обозначения функции букву f (ср. стр. 411).

что необходимые условия полного дифференциала вместе с тем достаточны, проинтегрировав уравнение полного дифференциала (см. стр. 375). Эйлер вывел необходимое условие интегрируемости выражения $Pdx + Qdy + Rdz$ в «Дифференциальном исчислении».

В той же статье «О бесчисленных кривых...» Эйлер доказал известную теорему о дифференцировании однородных функций двух переменных, впервые высказанную им и примененную к некоторым интегрированиям во втором томе «Механики» (1736): если $V(x, y)$ есть однородная функция измерения n и $dV = Pdx + Qdy$, то $Px + Qy = nV$; в «Дифференциальном исчислении» это свойство распространено на функции многих переменных. Фонтен также открыл эту теорему для общего случая (о чем Клеро писал в 1740 г.) и опять-таки сильно опоздал с ее публикацией (1764).

Ко времени создания «Дифференциального исчисления» Эйлера учение о функциях многих переменных выросло в большой отдел анализа; их дифференцированию Эйлер отвел седьмую главу первой части этого труда. Бо́льшая часть ее содержания нами уже изложена. Добавим еще, что здесь выведено общее правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных, которые все зависят от одного независимого переменного. В девятой главе Эйлер учит дифференцировать неявные функции.

Важным вкладом в общую теорию явилось обобщение на функции многих переменных ряда Тейлора, данное Лагранжем в уже упоминавшейся работе «О новом роде исчисления», (1772) 1774 (см. стр. 282). Развивая идеи символического исчисления, восходящие к Лейбницу (т. II, стр. 272), Лагранж представил приращение функции нескольких переменных в форме

$$\Delta u = u(x+\xi, y+\psi, \ldots) - u(x, y, \ldots) = e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \cdots} - 1,$$

где, после разложения в экспоненциальный ряд, каждую степень du^λ следует заменить дифференциалом $d^\lambda u$. Аналогично он выразил $\Delta^\mu u$, принимая при $\mu < 0$, что $d^{-1} = \int$, $\Delta^{-1} = \sum$ и т. д. Эта статья Лагранжа, как и труд о деривациях Арбогаста (см. стр. 284), стала важной вехой в истории операционного исчисления. В «Теории аналитических функций» (1797) Лагранж вывел с помощью уже известных нам принципов (см. стр. 298) соответствующую формулу Тейлора с остаточным членом.

Мы остановимся еще на развитии методов исследования максимумов и минимумов. Прием разыскания экстремума функции в случае обращения в нуль подряд нескольких производных изложил в «Трактате о флюксиях» (1742) Маклорен. Эйлер в «Дифференциальном исчислении» применил к определению экстремумов ряд Тейлора, рассматривая знак разности

$$f(x \pm \alpha) - f(x) = \pm\alpha\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \pm \ldots$$

в достаточно малой окрестности соответствующего значения аргумента x[1]. Лагранж усовершенствовал этот метод исследования, применив вместо ряда Тейлора формулу с остаточным членом. Маклорен и Эйлер учитывали случаи, когда первая производная в точке экстремума беско-

[1] Напомним, что для частного случая, когда $f(x)$ есть целый многочлен, сходный прием исследования изложил Ферма в одном письме 1643 г., неизвестном Эйлеру (см. т. II, стр. 197).

нечна, а Эйлер рассмотрел также некоторые виды абсолютных граничных экстремумов.

Первую задачу на экстремум функции многих переменных рассмотрел, по-видимому, Маклорен в связи с поисками условия, при котором все корни алгебраического уравнения действительны и одного знака (Philos. Trans., 1729). Мы упоминаем эту задачу из-за ее большой известности; сам Маклорен сформулировал ее в виде предложения: если данное положительное число a разделено на n положительных частей, то их произведение будет наибольшим, когда эти части равны. Маклорен доказал это с помощью простых рассуждений, считая известным, что теорема верна при $n = 2$, и не прибегая к исчислению бесконечно малых. При этом же условии, утверждал Маклорен, сумма каких-либо натуральных степеней частей будет наименьшей.

Эйлер исследовал общую проблему экстремумов функции $f(x,y)$ в XI главе второй части «Дифференциального исчисления». При этом он удивительным образом допустил ошибку, утверждая, что если функция в какой-либо точке имеет максимум (или минимум) относительно каждого из аргументов при постоянстве другого, так что при $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ одновременно $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ $\left(\text{или } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0\right)$, то она имеет в этой точке максимум (или минимум). На самом деле эти условия недостаточны для существования максимума (минимума). Эту ошибку Эйлера исправил в «Miscellanea Taurinensia» за 1759 г. и в XI главе второй части «Теории аналитических функций» Лагранж, который показал, что достаточным условием экстремума является выполнение неравенства $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$. В отношении случаев $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \leqslant 0$ Лагранж ограничился лаконичными и не вполне корректно высказанными замечаниями; затем он кратко разъяснил также, как находятся экстремумы функций трех и большего числа переменных. В конце той же главы Лагранж рассмотрел задачу об условном экстремуме, когда аргументы данной функции связаны какими-либо дополнительными соотношениями, и применил к ее решению метод неопределенных множителей, сохранивший его имя.

Понятие интеграла

Во втором томе говорилось, что для Ньютона первичным было представление об интегрировании как отыскании первообразных функций — обратный метод флюксий восстанавливает по данной флюксии ее флюенту, между тем как для Лейбница интегрирование было прежде всего суммированием бесчисленного множества бесконечно малых дифференциалов. Иоганн Бернулли в своих лекциях по интегральному исчислению 1692 г. (опубл. 1742) последовал за Лейбницем и о квадрировании плоских кривых писал: «Площади рассматривают как разложенные на бесчисленные части, каждую из которых можно считать дифференциалом площади», и «если имеют интеграл этого дифференциала, т. е. сумму этих частей, то отсюда будет известна и искомая квадратура» [1]. Практически Лейбниц и Бернулли сводили по возможности квадратуры и вообще вычисление

---

[1] *Joh. Bernoulli.* Die erste Integralrechnung, übers. von G. Kowalewsky. Berlin — Leipzig, 1914, S. 11—12.

определенных интегралов к отысканию первообразных, т. е. обращению дифференцирования. Концепция Ньютона, чрезвычайно расширявшая в то время возможности интегрального исчисления, получила в XVIII в. решительный перевес, хотя, как вскоре стало очевидным, весьма важные классы элементарных функций не интегрируются в конечном виде (см. стр. 352). Эйлер в своем определении предмета интегрального исчисления, как и основного объекта дифференциального исчисления, продолжил линию Ньютона.

Интегральное исчисление определяется у Эйлера как «метод, посредством которого по данному соотношению между дифференциалами количеств находят отношение между самими количествами» [1], т. е. метод, включающий и интегрирование дифференциальных уравнений. Выше упоминалось, что именно таково было содержание трехтомного «Интегрального исчисления» (1768—1770) Эйлера и столь же широко понимал свой обратный метод флюксий Ньютон (см. т. II, стр. 237). Интегралом данной функции X Эйлер называет функцию, имеющую своим дифференциалом Xdx. Это определение Эйлер дополнил четким различением между интегралом полным (integrale completum), содержащим произвольную аддитивную постоянную, и частным (particulare), в котором эта постоянная получает численное значение в соответствии с дополнительными условиями, которые в общем сводятся к тому, что $y = b$ при некотором $x = a$. Точно так же определяли интегральное исчисление и понятие интеграла Даламбер, Лагранж, Лакруа и другие математики XVIII в.

У Эйлера имелись свои особые основания отвергать определение интеграла как суммы бесконечного числа дифференциалов, ибо дифференциал являлся в его глазах нулем, а сумма любого числа нулей есть нуль. «Знак $\int$,—писал он,— обычно толкуется как начальная буква слова сумма. Это толкование возникло из мало подходящего представления, согласно которому интеграл рассматривается как сумма всех дифференциалов, и допустить его можно не с большим правом, чем широко распространенное представление, будто линии состоят из точек» [2]. В соответствии с этим «надо считать, что... интеграл мы находим не столько из самого дифференциала Xdx (который при всяких обстоятельствах $=0$), сколько из его отношения к dx» [3]. В рамках такой концепции величина, которую мы называем определенным интегралом, выступала только как значение, принимаемое частным интегралом при каком-либо дополнительном условии.

Однако связь между интегрированием и суммированием была слишком прочной и необходимой, чтобы полностью оставаться в тени. Два обстоятельства были при этом особенно существенны: приближенное интегрирование и учение о специальных определенных интегралах. К этому следует добавить теорию кратных интегралов и проблемы, возникшие при вычислении несобственных интегралов.

В VII главе первого раздела первого тома «Интегрального исчисления» Эйлер приближенно выражает интеграл $\int X\,dx$, при $x = a$ равный b, т. е. $y = \int\limits_a^x X\,dx + b$, суммой

$$y = b + A(a' - a) + A'(a'' - a) + \ldots + 'X(x - 'x),$$

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 9.
[2] Там же, стр. 12.
[3] Там же, стр. 12.

где $a, a', a'', \ldots, 'x$ — суть значения аргумента на промежутке (a, x) и $A, A', \ldots, 'X$ — соответственные значения X. При этом предполагается, что X «мало» изменяется при «весьма малом» изменении аргумента x. Приближение тем точнее, чем меньшими берутся разности $a^{(k)} - a^{(k-1)}$, но только если при этом малы разности $A^{(k)} - A^{(k-1)}$. «Если же этого не происходит,— предупреждает Эйлер,— то указанное определение будет крайне ненадежным» [1], и несколько далее он подчеркивает, что вблизи точки, где функция возрастает до бесконечности, такой способ вычисления применять «непозволительно» [2]. Как видно, Эйлер здесь подходил к выделению понятия непрерывной функции в смысле Больцано — Коши и, вместе с тем, видел трудности, связанные с трактовкой интеграла как суммы (или предела суммы) в случае функции с бесконечным разрывом. Далее, предполагая функцию X монотонной на промежутке (a, x), он заключает интеграл $\int X\,dx$ между двумя суммами:

$$b + A(a' - a) + \ldots + 'X(x - 'x),$$
$$b + A'(a' - a) + \ldots + X(x - 'x)$$

и, разбирая один пример, указывает, что обе эти суммы при бесконечном числе делений дают истинное значение интеграла. Таким образом, Эйлер по существу был близок к определению интеграла непрерывной функции как предела интегральных сумм, но от такой формулировки, данной Коши (1823), его удерживало отождествление бесконечно малой и нуля. С известными оговорками Эйлер все же допускает, что интегрирование можно понимать и как суммирование. Но хотя «интегрирование можно получить из суммирования с любою точностью; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т. е. нулями» [3].

Многочисленные работы математиков XVIII в. и самого Эйлера по вычислению и теории определенных интегралов (см. стр. 360 и след.) также естественно влекли за собой выделение понятия определенного интеграла как особого объекта исследования; при этом было ясно, что интегрирование или суммирование распространяется от одного значения аргумента до другого. В статьях Эйлера за 70-е годы часто употребляется такая терминология: например, говорится об «интегрировании от значения $x = 0$ до $x = 1$». В одной статье 1775 г., опубликованной посмертно в «Сочинениях по анализу» (Opuscula analytica, т. II. СПб., 1785), приведены основные свойства определенного интеграла, записываемые в наших обозначениях формулами вроде

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0,$$
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 16?.
[2] Там же, стр. 164.
[3] Там же, стр. 163. Мы не останавливаемся здесь на модификации этого приближенного метода, основанной на применении ряда Тейлора (см. стр. 364).

Здесь же появляются термины terminus a quo (предел, от которого, т. е. нижний предел интегрирования) и terminus ad quem (предел, до которого, т. е. верхний предел). В другой статье того же времени (1776; опубл. Acta (1777: II) 1780) Эйлер ввел для определенного интеграла обозначение

$$\int P\,dx \begin{bmatrix} ab & x = a \\ ad & x = b \end{bmatrix},$$

сходное с таким: $\int dx \{P\}_{x=b}^{x=a}$, предложенным, по-видимому, несколько ранее Лапласом (Mém. pres. par sav. étr., (1773) 1776). Вскоре Лаплас предложил названия «определенный интеграл» — intégrale définie (Mém. Ac. Paris, (1779) 1782) и «пределы интегрирования»—limites d'intégration (Mém. Ac. Paris, (1783) 1786), а термином неопределенный интеграл — intégrale indéfinie мы обязаны, вероятно, Лакруа (1798). Впрочем, еще Эйлер в первом томе «Интегрального исчисления» писал, что всякое интегральное выражение является «само по себе неопределенным», но становится «определенным», если при данном значении аргумента a интеграл получает данное значение b[1].

Благодаря «Трактату по дифференциальному и интегральному исчислению» Лакруа (т. II, изд. 1, 1798; изд. 2, 1814) эти новые выражения получили более широкую известность. Любопытно, что все они приведены в первой главе второго тома «Трактата». Сперва интегральное исчисление определяется как обратное дифференциальному или как исчисление первообразных функций, и тут же интеграл характеризуется как сумма бесконечного числа дифференциалов, т. е. бесконечно малых приращений данной функции. Эта сумматорная концепция получает развитие в предпоследнем отделе главы, посвященном приближенному вычислению интегралов, притом без оговорок, которыми сопровождал ее Эйлер, но в духе (хотя и не в терминологии) метода пределов. И в этом вопросе, как и в других, проявилась характерная общая установка Лакруа, которую он сам выразил словами Лапласа, писавшего ему зимой 1792 г. в ответ на извещение о подготовке «Трактата»: «...сближение методов, которые вы намерены предпринять, служит ко взаимному их объяснению, и то, что в них есть общего, чаще всего составляет их подлинную метафизику, вот почему эта метафизика почти всегда открывается напоследок» [2].

Заключив по методу Эйлера интеграл монотонной функции между нижней и верхней интегральными «суммами Дарбу», Лакруа замечает, что разность последних может быть сделана в данном интервале сколь угодно малой при надлежащем увеличении числа разбиений промежутка интегрирования. Отсюда Лакруа делает вывод о сходимости интегральных сумм и о возможности сколь угодно точного приближения интеграла с их помощью. Этот аналитический факт, который Лакруа четко отделяет от геометрической интерпретации (к ней он обращается далее), «выясняет, в каком смысле нужно понимать, что интеграл $\int X\,dx$, взятый между пределами $x = a$ и $x = a_n$, можно рассматривать как сумму бесконечного числа элементов, равных последовательным значениям, приобретаемым дифференциалом при различных изменениях, испытываемых между

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 161.
[2] *S. F. Lacroix.* Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. I, p. XIX.

этими пределами переменной x»[1]. В сноске добавлено: «Слово *бесконечное* представляется здесь только для замены перифразы, вроде той, которая выражает, *что чем больше будет в данном промежутке число элементов, тем более приблизится их сумма к предложенному интегралу и что разность этих двух величин сможет быть сделана сколь угодно малой*»[2].

Таким образом, Лакруа подходил уже к определению определенного интеграла как предела интегральных сумм и даже к постановке вопроса о существовании самого этого предела. Вместе с тем «сближение» различных концепций интегрального исчисления у Лакруа еще не перешло в их синтез, и в рамках его теории нельзя было бы решить вопросы, которые начали смущать математиков во второй половине XVIII в. и которые до поры до времени обходили стороной. Мы имеем в виду парадоксальные факты, свидетельствовавшие, что представление об интеграле как сумме (или пределе суммы) не всегда согласуется с общим правилом вычисления определенного интеграла через разность первообразных или же с убеждением в единственности значения определенного интеграла. Такие факты были обнаружены в области несобственных интегралов. Первым, по-видимому, обратил на них внимание Даламбер, разбирая вопрос о логарифмах отрицательных чисел и соответственно об интеграле $\int\limits_{-a}^{b} \frac{dy}{y}$, а затем и об интегралах вида $\int\limits_{-a}^{b} \frac{dy}{y^n}$, взятых между пределами различных знаков. В случае четного положительного показателя понимание интеграла как площади или же суммы дает для него бесконечное значение, между тем вычисление по правилу Ньютона — Лейбница дает отрицательное значение $\frac{-1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{b^{n-1}}\right)$. Заметку, в которой изложены эти замечания, Даламбер озаглавил «Об одном геометрическом парадоксе» (Sur un paradoxe géométrique; опубл. в Opuscules mathématiques, t. IV, Paris, 1768). Этот же парадокс указал в другой связи Лагранж в девятой из «Лекций об исчислении функций» (1806), а подробный анализ его, основанный на исследовании интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dz}{z^2}$ в комплексной области, произвел Пуассон (1820). Парадокс иного рода, относящийся к несобственному (и расходящемуся) интегралу другого типа, упомянул в письме к Лагранжу от 23 марта 1775 г. Эйлер. Речь шла о том, что разность интегралов $\int \frac{dy}{y}$ и $\int \frac{dz}{z}$, взятых от 0 до ∞, можно сделать равной любому числу, если в первом интеграле положить $y = az$, ибо тогда $\int \frac{daz}{az} - \int \frac{dz}{z} = \ln a$[3]. В начале XIX в. аналогичные трудности были обнаружены при вычислении несобственных двойных интегралов Коши (1814; опубл. 1827).

Все эти и другие обстоятельства поставили математиков перед необходимостью исследования проблемы существования определенного интеграла

---

[1] *S. F. Lacroix.* Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. I, p. 136.
[2] Там же, стр. 136.
[3] *J. L. Lagrange.* Oeuvres, t. XIV. Paris, 1892, p. 243.

с помощью новых аналитических средств. Общепринятое впоследствии определение понятия определенного интеграла непрерывной функции в конечных пределах и его обобщение на простейшие классы разрывных функций и на бесконечные промежутки интегрирования дал Коши в «Резюме лекций... по исчислению бесконечно малых» (1823)[1]. Эти же лекции содействовали распространению нового знака интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, введенного в 1819—1820 гг. и примененного затем в «Аналитической теории тепла» (1822) Фурье.

Кратные интегралы

С необходимостью вычисления двойных и тройных интегральных сумм, распространенных на поверхности или объемы, встретились еще основатели исчисления бесконечно малых. Мы упоминали во втором томе о вычислениях в «Математических началах» Ньютона, равносильных вычислению двойных и тройных интегралов (см. т. II, стр. 224). И Лейбницу были знакомы примеры, как он выразился в 1697 г., «ранее неизвестных двойных суммирований» [2], а позднее с ними не раз имел дело Эйлер, начиная с работ 30-х годов XVIII в. Общие начала теории кратных интегралов были положены в статье Эйлера «О двойных интегралах» (De formulis integralibus duplicatis), представленной Петербургской академии в 1768 г. и напечатанной в «Novi Commentarii», (1769) 1770. Эта статья примечательна и тем, что в ней весьма выпукло представлена была точка зрения на интегрирование как на процесс суммирования.

Статья открывается замечанием, что вычисление объемов или поверхностей тел часто можно производить с помощью двойного интегрирования (per duplicem integrationem) выражений вида $Zdxdy$, где Z зависит от переменных x, y, причем функция Z повторно интегрируется сперва только по одной, а затем только по другой переменной; результат интегрирования обозначается $\iint Z\,dx\,dy$. Сперва Эйлер рассматривает задачу неопределенного интегрирования как отыскания функции, двукратное дифференцирование которой по одной и затем по другой переменной дает $Zdxdy$. Это приводит к выражению двойного интеграла в форме

$$\iint Z\,dx\,dy = V + X + Y,$$

где V зависит от x, y, а X и Y суть произвольные функции, зависящие соответственно от x или y. Отметив, что порядок повторных интегрирований, который отмечается записями $\int dx \int Z\,dy$ и $\int dy \int Z\,dx$, не отражается на результате, и пояснив это примером, Эйлер переходит к применению двойных интегралов в упомянутых геометрических задачах. Общее описание приема вычисления определенного двойного интеграла, взятого по плоской области, иллюстрируется следующим примером.

---

[1] Термином «несобственный интеграл» (uneigentliches Integral) мы обязаны, насколько известно, О. Гёльдеру. См. *O. Hölder*. Beiträge zur Potentialtheorie. Stuttgart, 1885, S. 5.

[2] *G. W. Leibniz*. Mathematische Schriften, B. III. Halle a. S., 1885, S. 453.

Требуется вычислить объем восьмой части шара радиуса a, расположенной над четвертью круга ACB (рис. 28). Область интегрирования разделяется на продольные площадки (areolae) $PpMm$, затем в границах каждой такой площадки — на прямоугольные площадки $Yy = dxdy$, а искомый объем разбивается при этом на элементарные столбики $YZyz$ (columellae elementaris) с высотой $YZ = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и объемом 361
$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$. Интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy$, «исчезающий при

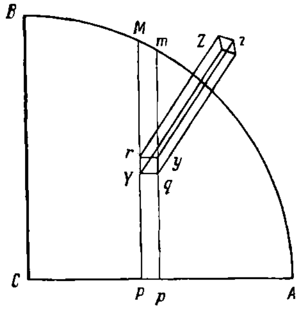

Рис. 28

$y = 0$», т. е. взятый от 0 до y, дает частицу (portiunculam) объема, стоящую над площадкой $PpYq$, именно:

$$\frac{1}{2} y \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Чтобы получить элемент объема, стоящий над всей площадкой $PpMm$, этот интеграл «должен быть распространен на все расстояние PM» (per totam distantiam PM extendi debet). Но если «точку Y продвинуть до M», то y будет равен $\sqrt{a^2 - x^2}$, подстановка же $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ в предыдущее выражение дает для элемента объема над $PpMm$ выражение $\int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy = = \frac{\pi}{4}(a^2 - x^2)$. Тогда интеграл $\int dx \int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy = \frac{\pi}{4} \int (a^2 - x^2)\, dx$, исчезающий при $x = 0$, выражает объем, стоящий над площадью $CBMP$. Наконец, искомый объем получается, если точку P продвинуть до A, т. е. положить $x = a$, так что искомый объем равен $\pi/6\, a^3$ [1].

Эйлер рассмотрел также вопрос о замене переменных и, отправляясь от простейшего интеграла $\iint dx\, dy$, с помощью аналитических преобразований вывел основную формулу: если x, y суть функции новых переменных t, u и

$$dx = R\, dt + S\, du, \qquad dy = T\, dt + V\, du,$$

то

$$\iint Z\, dx\, dy = \pm \iint Z\,(VR - ST)\, dt\, du,$$

где знак $+$ или $-$ выбирается так, чтобы выражение $VR - ST$ было положительным. Прием Эйлера, с некоторыми уточнениями, сохранился в

[1] *L. Euler*. Opera omnia, series I, v. XVII. Lipsiae et Berolini, 1915, p. 293—294.

современной учебной литературе. Геометрического истолкования выражения $\pm(VR - ST)\,dtdu$, которое представляет собой элемент площади в системе криволинейных координат t, u, Эйлер не дал; оно принадлежит М. В. Остроградскому (1836; опубл. 1838).

В конце статьи Эйлер поставил задачу вариационного исчисления: среди всех поверхностей, под которыми на плоскости xOy стоит тело данного объема $\iint Z\,dx\,dy$, найти поверхность с наименьшей площадью. Интеграл, выражающий площадь поверхности, записан в привычной нам форме $\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$, где p и q суть частные производные аппликаты по абсциссе и ординате.

Тройные интегралы первым применил Лагранж в работе «О притяжении эллиптических сфероидов» (Sur l'attraction des sphéroides elliptiques. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773) 1775). Выразив силу притяжения (внутренней) точки элементарным параллелепипедом $dx\,dy\,dz$ в прямоугольных декартовых координатах, он распространяет интегрирование на все точки сфероида и дает определение и описание способа вычисления интеграла по объему. Для облегчения вычислений, затруднительных даже в случае, когда притягивающее тело есть шар, Лагранж использует замену переменных. Сумматорная концепция интеграла выражена при этом столь же ясно, как в только что рассмотренной работе Эйлера. «Эту задачу,— писал Лагранж,— очень легко решить, если предположить шар разделенным на бесконечное множество маленьких цилиндров... и найти сперва притяжение, производимое каждым из этих маленьких цилиндров, а затем — сумму всех таких притяжений посредством интегрирования» [1]. Выведя путем формальных преобразований общую формулу замены переменных в тройном интеграле, Лагранж применил ее к случаю сферических координат — углов p, q и радиус-вектора r. В ходе вычислений интегралов по объему Лагранжу приходится оперировать с интегралами по поверхности, причем встречаются и некоторые соотношения между интегралами обоих видов, вроде

$$\iiint \sin^2 p \cos q\,dp\,dq\,dr = \iint (r' + r'') \sin^2 p \cos q\,dp\,dq$$

(так выражается составляющая по оси x силы притяжения единичной точечной массы однородным сфероидом единичной плотности; r' и r'' суть радиус-векторы точек поверхности, лежащих на одной прямой с полюсом). Лагранж не применил для кратных интегралов каких-либо обозначений, но они не замедлили войти в употребление в работах других авторов, например Лапласа (Mém. Ac. Paris, (1782) 1785). На первых порах общее понятие об интеграле по поверхности не было выделено, это произошло в ходе дальнейших исследований по механике и математической физике. В отделе о равновесии несжимаемых жидкостей «Аналитической механики» Лагранжа (изд. 1, 1788; изд. 2, 1813) уже отчетливо говорится об интегрировании, распространенном на всю поверхность некоторой жидкой массы, но еще и здесь нет ни особого названия, ни знака поверхностного интеграла. Гаусс в своей «Теории притяжения однородных сфероидальных эллиптических тел, изложенной новым методом» (Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo novo tractata. Gottingae, 1813) уже систематически оперировал поверх-

---

[1] *J. L. Lagrange*. Oeuvres, t. III. Paris, 1869, p. 623—624.

ностными интегралами, причем учитывал ориентацию поверхности относительно координатных плоскостей и в некоторых случаях вычислял поверхностные интегралы непосредственно, без сведения к повторным.

Вслед за тем основы общей теории кратных интегралов были заложены С. Д. Пуассоном, М. В. Остроградским и Дж. Грином.

Техника интегрирования

Значительные успехи были достигнуты в XVIII в. в разработке приемов вычисления неопределенных интегралов, выражающихся с помощью элементарных функций. Прежде всего следует указать на изменения, которые произошли в самой постановке проблемы и в терминологии. Занимаясь квадратурой алгебраических кривых, математики XVII в. убедились в том, что она далеко не всегда возможна в алгебраической форме. Когда это удавалось, то говорили,— так поступал, например, Ньютон,— что кривая квадрируется геометрически или же в конечном виде,— при этом он имел в виду, что представляющий искомую площадь ряд обрывается. Если геометрическую квадратуру, или, как стали говорить уже в XVIII в., абсолютное интегрирование, произвести не могли, то стремились свести дело к квадратуре простейших кривых — круга, эллипса, гиперболы, т. е. выразить интеграл, помимо алгебраических функций, в круговых и в логарифмах. Еще в 1729 г. Д. Бернулли писал Гольдбаху, что рациональные дифференциалы «могут быть либо проинтегрированы, либо сведены к квадратурам круга и гиперболы» [1]. Но логарифмические и круговые функции становились все более регулярным средством (и предметом) исследований, получили специальное обозначение, и это естественно привело к их включению в число элементарных функций. В результате интегрируемыми стали называть функции, интегралы которых выражаются, не считая алгебраических функций, с помощью логарифмов и затем круговых функций. По отношению к логарифмам эту мысль впервые высказал и аргументировал, по-видимому, Эйлер в письмах Гольдбаху от 17 октября и 9 ноября 1730 г. [2], а его «Введение в анализ бесконечных» (1748) окончательно закрепило границы области функций, которые до сих пор именуют элементарными.

Математики XVIII в. сумели выразить с помощью элементарных функций и их конечных суперпозиций огромное число интегралов. Мы остановимся лишь на отдельных усовершенствованиях, достигнутых в технике интегрирования.

О первых открытиях Лейбница (опубл. 1702—1703) и Иоганна Бернулли (опубл. 1703—1704 и 1719) в интегрировании рациональных функций говорилось ранее (см. т. II, стр. 276—278). Однако эти работы далеко не исчерпали вопроса. Прежде всего оставалась открытой проблема разложимости целого алгебраического многочлена на действительные линейные и квадратичные множители, и ее окончательное решение дали только в 40-е годы Даламбер и Эйлер (см. стр. 70 и след.). Но и процесс интегрирования рациональной дроби с известными корнями знаменателя не был полностью изучен ни Лейбницем, ни И. Бернулли. Детальной разработкой

---

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle», t. II, p. 339.

[2] *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 45—48.

приемов разложения рациональной функции на сумму элементарных дробей мы обязаны более всего Эйлеру; последний возвращался к этой задаче несколько раз, начиная с письма к Гольдбаху от 9 ноября 1730 г., в котором он провел окончательный результат интегрирования дроби с данными различными корнями знаменателя, и следующего письма от 25 ноября, где он изложил своему корреспонденту оригинальный прием перехода от случая двух различных корней α, β к двойному корню α, для чего принял $\beta = \alpha + d\alpha$, где $d\alpha$ — бесконечно малая величина [1].

В интегрирование алгебраических иррациональностей значительный вклад внес Ньютон, «Трактат о квадратуре кривых» которого смог получить широкую известность лишь после его издания в 1704 г. Вот примеры ньютоновой трактовки задачи. В I теореме доказывается, что кривая, площадь которой в декартовых координатах выражается функцией $x^m R^p$, где $R = e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} +$ и т. д., имеет ординату $x^{m-1}R^{p-1}Q$, где Q — также целый многочлен относительно x^n. В III теореме соответственно площадь кривой с ординатой $x^{m-1}R^{p-1}(a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} +$ и т. д.) представляется в форме $x^m R^p (A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} +$ и т. д.), где неопределенные сперва коэффициенты $A, B, C, D, \ldots$ последовательно выражаются через постоянные, входящие в выражение ординаты. Вообще говоря, ряд $A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \ldots$ бесконечный, но когда он обрывается, то квадратура — алгебраическая. Например, если ордината есть

$$\frac{3k - lx^2}{x^2\sqrt{kx - lx^3 + mx^4}} = x^{-5/2}(3k - lx^2)(k - lx^2 + mx^3)^{-1/2},$$

то площадь будет

$$-2x^{-3/2}(k - lx^2 + mx^3)^{1/2} = -2\sqrt{\frac{k - lx^2 + mx^3}{x^3}}.$$

Рассматривая этот класс функций, Ньютон сделал и несколько отрывочных замечаний об интегрировании рациональной дроби. Далее Ньютон, среди прочего, специально рассмотрел большое число примеров интегралов, рациональных относительно x и $\sqrt{e + fx + gx^2}$ (или приводящихся к ним при $x = z^n$), и привел обширные «Таблицы простейших кривых, сравнимых с эллипсом и гиперболой». Все эти результаты были известны Ньютону еще за 30—35 лет до издания «Рассуждения», так же как и случаи алгебраической интегрируемости дифференциального бинома $x^m(a + bx^n)^p\,dx$, которые он в 1676 г. сообщил Лейбницу вместе с несколькими другими только что упомянутыми результатами (см. т. II, стр. 246).

Исследования Ньютона были продолжены Коутсом, в «Гармонии мер» которого (опубл. 1722) рассмотрены другие аналогичные интегралы и предложены таблицы, выражающие их через площади конических сечений. «Видимо, именно эти таблицы,— писал Д. Д. Мордухай-Болтовской,— и вызывают необходимость искать краткие обозначения, а последние приводят к мысли рассматривать выражения для некоторых простейших площадей конических сечений как основные чисто аналитические определения, как элементы построения» [2].

---

[1] *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 51.

[2] См. *И. Ньютон*. Математические работы. Перевод, вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., 1937, стр. 411.— Следует указать, что ряд формул в «Гармонии мер» принадлежит ее издателю Р. Смиту.

Поисками условий интегрируемости дифференциального бинома в элементарных (не только алгебраических) функциях посредством его рационализации занимались многие. В письмах к Д. Бернулли от 1 июня и к Эйлеру от 6 ноября 1730 г. Гольдбах показал,— в несколько иных обозначениях,— что если хотя бы одно из чисел $\frac{m+1}{n}$, или $\frac{m+1}{n}+p$, или p есть целое, то дифференциал преобразуется в рациональный[1]. Результат Гольдбаха высоко оценили Д. Бернулли и Эйлер, который позднее, в первом томе «Интегрального исчисления» (1768), высказал уверенность, что других случаев, допускающих сведение дифференциального бинома к рациональному виду, не существует. Доказал это утверждение для случая рациональных m, n, p П. Л. Чебышев (1853); на случай иррациональных показателей теорему обобщил Д. Д. Мордухай-Болтовской (1926).

Несмотря на эти и другие успехи, изложение техники интегрирования и по форме и по содержанию вплоть до 60-х годов не удовлетворяло самих математиков. Недаром И. Г. Ламберт в то время заявил, что исследования в этой области ведутся несистематически и ощупью, и сделал попытку направить их по более верному пути с помощью некоторой классификации интегралов и дифференциалов (Mém. Ac. Berlin, (1762) 1769). Но еще за год до опубликования мемуара Ламберта вышел первый том «Интегрального исчисления» Эйлера, в котором были практически исчерпаны наиболее важные случаи интегрирования элементарных функций в конечном виде; этот раздел анализа можно, в рамках обычных программ высшей школы, изучать «по Эйлеру» и в наши дни. Прогресс особенно заметен, если сравнить изложение Эйлера с изданным на полтора десятка лет ранее «Трактатом по интегральному исчислению» (Traité de calcul intégral) парижского ученого, позднее академика, Луи Антуана де Бугенвиля, где, в частности, вовсе отсутствуют интегралы тригонометрических функций. Систематически рассматривая один за другим классы интегрируемых функций, Эйлер внес в технику интегрирования многие собственные приемы, вроде различных рекуррентных формул, известного под его именем способа вычисления интегралов от функций, рациональных относительно x и $\sqrt{a+bx+cx^2}$, и т. д. К интегрированию сравнительно сложных иррациональных функций частного вида Эйлер возвращался и позднее, этим занимались и его ученики. Например, петербургский академик Степан Яковлевич Румовский (1734—1812), главные заслуги которого относятся к астрономии и географии и который в последние годы жизни был попечителем Казанского университета, привел к рациональной форме иррациональные выражения вроде $\frac{1}{(3-x^2)\sqrt[3]{1+x^2}}$, $\frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{1-x^2}}$, $\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)\sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)^3}}$ (Nova Acta, (1792) 1797, (1793) 1798; Mém. Ac. St.-Pétersb., 1810).

Эллиптические интегралы

В большую главу анализа выросло учение об эллиптических интегралах, т. е. интегралах вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$, где R — рациональная функция, а $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени без кратных корней.

---

[1] «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVII[e] siècle», t. II, p. 368—373; *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 43—50.

Джулио ди Фаньяно

Эти вопросы встретились во второй половине XVII в. в задачах на спрямление прямых, в частности эллипса, а затем в вопросах механики и теории упругости. Ученые вскоре убедились, что эллиптические интегралы представляют собой новые трансцендентные функции, обладающие интересными свойствами. Первый толчок изучению этих свойств дали Я. Бернулли, установивший равенство между собой длин дуг параболической спирали, которые не удается выразить в известных квадратурах (1691), и затем И. Бернулли, поставивший вопрос о разыскании кривых, сумма или разность дуг которых в точности равна дуге окружности или отрезку прямой линии (1695, 1698). В частности, И. Бернулли показал, что последним свойством обладают некоторые дуги кубической параболы $3a^2y = x^3$ (см. т. II, стр. 231 и 276).

В начале XVIII в. задача И. Бернулли привлекла итальянского любителя, графа Джулио Карло де Тоски ди Фаньяно (1682—1766), который только в возрасте 24 лет под влиянием чтения Мальбранша всерьез принялся за самостоятельное изучение высшей математики, но вскоре достиг ее высот. Замечательные открытия Фаньяно, особенно в области эллиптических интегралов, доставили ему большую известность: он был избран членом Лондонского королевского общества и Берлинской академии наук.

Отправляясь от упомянутого результата И. Бернулли, Фаньяно в 1714 г. публично поставил задачу о разыскании дуг со спрямляемой разностью на параболе четвертого порядка $4a^3y = x^4$. Год спустя он дал решение более общей задачи, относившейся к кривым $\frac{m+2}{2} a^{\frac{m}{2}} y = x^{\frac{m+2}{2}}$, в статье «Новый метод спрямления разности двух дуг (из которых дана одна) у бесконечных видов неспрямляемых парабол» (Nuovo metodo per rettificare la differenza di due arche (une de quali e dato) in infinite specie de parabole irretifiabili, Giornale de'letterati d'Italia, 1715). Если положить для простоты $a = 1$ и обозначить какую-либо дугу такой кривой s, а отрезок касательной к ней между точкой касания и осью абсцисс t, то $s - t = \frac{m}{m+2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^m}}$. Дальнейшие выкладки привели Фаньяно к заключению, что разность двух дуг кривой, абсциссы концов которых обозначены соответственно x_1, x_2 и z_1, z_2, алгебраически спрямляема, когда алгебраически интегрируется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^m}} \pm \frac{dz}{\sqrt{1+z^m}} = 0,$$

каждый член которого, вообще говоря, в конечном виде не интегрируем. Фаньяно нашел частные алгебраические решения для $m = 3, 4$ (задача И. Бернулли), 6 (задача самого Фаньяно) и еще нескольких значений. Например, если $m = 4$, то уравнение $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \pm \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = 0$ имеет (частное) решение $xz = \pm 1$.

В следующих работах Фаньяно распространил изыскания на дуги эллипсов, гипербол и циклоид, а для приведенного только что уравнения нашел еще другие алгебраические интегралы (Giornale de'letterati d'Italia, 1716, 1717, 1720). С 1718 г. он занялся также изучением аналогичных свойств лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$, или, в параметрической форме, $x = a\sqrt{u + u^2}$, $y = a\sqrt{u - u^2}$, и открыл алгебраический прием деления четверти дуги на $2 \cdot 2^n$, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ равных частей. В память об этих открытиях на надгробии Фаньяно была изображена лемниската с подписью Deo veritatis gloria (слава Господу истины), подобно тому как на памятной доске в честь Я. Бернулли — логарифмическая спираль.

Замечательные исследования Фаньяно, открывшего первые теоремы сложения эллиптических интегралов, нашли продолжение не сразу. Тем временем математики обратились к другой важной проблеме, которая представлялась естественным следующим этапом после сведения ряда интегралов к круговым и логарифмическим функциям — к сведению различных интегралов иррациональных функций к дугам эллипсов и гипербол. Этому вопросу посвятил особый параграф второй книги «Трактата о флюксиях» (1742) Маклорен, а за ним последовал Даламбер в «Исследованиях об интегральном исчислении», алгебраическое содержание которых было рассмотрено во второй главе (Mém. Ac. Berlin, (1746) 1748, (1748) 1750). Оба они рассмотрели, среди прочего, примеры интегралов, содержащих в знаменателе квадратный корень из многочлена третьей или четвертой степени; Маклорен привлек для той же цели и дуги лемнискаты. Даламбер возвращался к тому же вопросу и позднее.

В начале 50-х годов к исследованию свойств эллиптических интегралов обратился Эйлер. 30 мая 1752 г. он сообщил Гольдбаху, что «недавно встретился с любопытными интегрированиями» [1], а именно, нашел алгеб-

[1] *L. Euler* und *Chr. Goldbach*. Briefwechsel, 1729—1764, S. 347.

раические интегралы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^m}}$, где $m = 3$ или 4, а отсюда получил теорему: если провести к дуге четверти эллипса AB касательную TV в какой-либо точке M (рис. 29), отложить на ней $TV = CA$ и провести еще VN параллельно CT, то разность дуг $BM - AN = MP$, где P — основание перпендикуляра, опущенного на TV из центра C. Незадолго до того Эйлер познакомился с результатами Фаньяно по изданию сочинений последнего (Produzioni matematiche, 2 v, Pesaro, 1750), присланному автором в Берлинскую академию наук и 23 декабря 1751 г. переданному на заключение Эйлеру [1]. В серии работ,

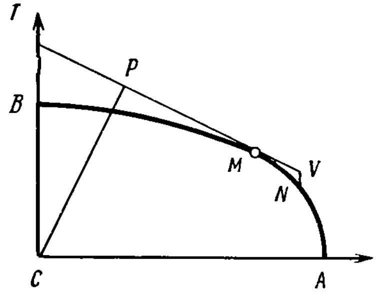

Рис. 29

начиная с «Интегрирования дифференциального уравнения $\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$» (Novi Commentarii, (1756—1757) 1761), Эйлер постепенно пришел к общей теореме сложения эллиптических интегралов, которую высказал во втором разделе первого тома «Интегрального исчисления» (1768). Если обозначить интеграл $\int \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$, в числителе и знаменателе которого стоят многочлены четвертой степени и который обращается в нуль при $x = 0$, через $\Pi(x)$, то теорема может быть записана в виде

$$\Pi(x) \pm \Pi(y) = \Pi(a) + \varphi(x, y, a),$$

где $\varphi(x, y, a)$ — алгебраическая функция, и пределы x, y, a также связаны алгебраическим соотношением $a = \psi(x, y)$ (для некоторых интегралов функция $\varphi(x, y, z)$ — алгебраически-логарифмическая). К своим результатам Эйлер пришел, по его собственному выражению, скорее ощупью или путем догадки, чем руководствуясь каким-либо прямым методом. Последнее удалось Лагранжу (Miscellanea Taurinensia, 1766—1769), прием которого получил очень высокую оценку Эйлера.

Эти исследования Эйлера и Лагранжа принадлежат в большей мере к теории дифференциальных уравнений и будут подробнее освещены в восьмой главе (см. стр. 378), здесь же мы добавим еще немногие замечания. Прежде всего, теорема сложения была распространена в 1826 г. Абелем на

[1] Очевидно, по предложению Эйлера Фаньяно был летом 1752 г. избрав иностранным членом Берлинской академии.

так называемые абелевы интегралы $\int\limits_0^u R(x, y)\,dx$, где R — рациональная функция, а x, y связаны любым алгебраическим уравнением $F(x,y)=0$. Сумма таких интегралов с различными пределами не представима, если они не эллиптические, одним интегралом того же вида (не считая алгебраически-логарифмических слагаемых), но она может быть выражена определенным числом p таких интегралов [1]. Тем самым Абель решил вопрос, над которым размышляли Эйлер и Лагранж, пришедшие лишь к выводу, что для гиперэллиптических интегралов обычная теорема сложения неверна.

Эйлер и Лагранж обратили внимание на аналогию между эллиптическими дифференциальными уравнениями и уравнением теории круговых функций

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

интеграл которого можно записать и в алгебраическом виде

$$x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2} = a,$$

и с помощью арксинусов

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin a.$$

Обращая арксинус

$$u = \arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad v = \arcsin y = \int\limits_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

т. е. переходя к тригонометрическим функциям $x = \sin u$, $y = \sin v$, интегральное равенство можно рассматривать как теорему сложения синусов, алгебраически связывающую $\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$, $\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v}$ и $\sin(n \pm v)$:

$$\sin u \cos v \pm \sin v \cos u = \sin(u \pm v).$$

Однако ни Эйлер, ни Лагранж не произвели обращения эллиптических интегралов $z = \Pi(x) = \int\limits_0^x R(t, \sqrt{P(t)})\,dt$ и не пришли к рассмотрению возникающих при этом функций $x = \varphi(z)$, позднее названных эллиптическими. Это сделали тот же Абель и одновременно Якоби (1827), положившие тем самым начала теории эллиптических функций, ставшей в XIX в. одним из главных отделов теории аналитических функций.

Эйлер продолжил и начатое Маклореном и Даламбером изучение классов иррациональных функций, интегралы которых представимы дугами эллипса и гиперболы. Здесь вставала проблема сравнения между собой

---

[1] Это число, которое Риман обозначил p, а Р. Ф. А. Клебш назвал родом кривой $F(x, y) = 0$, равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - m$, где n — порядок кривой, а m — число ее двойных точек.

дуг различных конических сечений, т. е. преобразования одних эллиптических интегралов в другие, а также проблема классификации интегралов и выделения немногих кононических форм, к которым приводятся все остальные. Этот круг вопросов Эйлер исследовал в большой работе «О приведении интегральных формул к спрямлению эллипса и гиперболы», представленной Петербургской академии еще в 1760 г. (De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae. Novi Commentarii, (1764) 1766). Он предлагает рассматривать дуги этих кривых как новые функции, равноправные с круговыми дугами и логарифмами, и, приняв за основное коническое сечение $y^2 = 2x - \frac{x^2}{a}$, которое, в зависимости от значений a, может быть эллипсом (в частности, кругом), параболой или гиперболой, обозначает длину его дуги $\Pi x\,[a]$. Преобразовав $\Pi x\,[a]$ к виду $\int \sqrt{\frac{f + gz^2}{h + kz^2}}\,dz$ (которым пользовался и Фаньяно), Эйлер различил 12 его разновидностей, в зависимости от знаков коэффициентов и выполнения того или другого из неравенств $fk \gtrless gh$. Некоторые дополнения к этой работе дал Лексель (Acta, (1778 : I) 1780 и (1778 : II) 1781). Независимо от Эйлера к очень сходным результатам пришел профессор университета в Ферраре Джанфранческо Мальфатти (1731—1807), выступивший, однако, значительно позднее (Mem. mat. fis. soc. sc. It., 1784). Теми же вопросами занимались Даламбер (1780), Лагранж (опубл. 1786) и другие ученые. Упомянем особо работу Дж. Ландена (Philos., Trans., 1775), который выразил произвольную дугу гиперболы через разность дуг двух различных эллипсов и прямой отрезок, применив некоторое преобразование, переводящее друг в друга эллиптические интегралы первого рода с различными модулями.

Значение преобразования Ландена подчеркнул Лежандр во второй из двух статей, напечатанных в «Mém. Ac. Paris» за 1786 г. (1788). В этих статьях Лежандр представил эллиптические дуги в удобной тригонометрической форме и дал их разложения в сходящиеся ряды с целью составления расчетных таблиц. Примененный здесь аппарат он использовал в несколько более позднем «Мемуаре об эллиптических трансцендентных», представленном Парижской академии в 1792 г. и вышедшем в связи с временным ее роспуском отдельным изданием (Mémoire sur les transcendantes elliptiques, Paris, an II, т. е. 1793—1794). Здесь Лежандр показал, что любой эллиптический интеграл может быть приведен к одному из трех родов, не считая элементарной части, а именно — в тригонометрической форме —к интегралам:

$$\text{I.}\quad F = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\text{II.}\quad G = \int (A + B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad \text{где } \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi},$$

$$\text{III.}\quad H = \int \frac{A + B\sin^2\varphi}{1 + n\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

(подстановкой $t = \sin\varphi$ их можно перевести в алгебраическую форму; положительное число $k < 1$ называется модулем, n — параметром). Дуги эллипсов и гипербол выражаются интегралами второго рода.

Для интегралов первого рода Лежандр вывел теорему сложения

$$F(\varphi) \pm F(\psi) = F(\mu),$$

если

$$\cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi\Delta\mu = \cos\mu,$$

а отсюда получил формулы сложения, умножения и деления, причем установил, что задача деления на n частей приводит, вообще говоря, к решению уравнения степени n^2. Он рассмотрел различные преобразования всех трех родов интегралов, обобщил преобразование Ландена и показал, как приводятся к эллиптическим некоторые интегралы, содержащие квадратный корень из многочленов шестой и восьмой степени. Он рассмотрел и различные свойства полных эллиптических интегралов, как называют определенные интегралы этого типа, взятые в пределах от 0 до $\pi/2$.

Только что рассмотренный мемуар Лежандра явился высшим достижением и итогом развития теории эллиптических интегралов в XVIII в., предложенная им классификация приобрела значение стандартной. Основное содержание этого труда Лежандр позднее включил в первый том своих «Упражнений по интегральному исчислению» (Exercices de calcul intégral. Paris, 1811), и благодаря этому его открытия получили более широкую известность. Он продолжал исследования и в дальнейшем, окончательно резюмировав их в обширном «Трактате об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» (Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes, 2 v. Paris, 1825—1828). Этот выдающийся труд принадлежит все же по духу своему более XVIII, нежели XIX, в., и под эллиптическими функциями Лежандр понимает здесь интегралы. Еще до окончания издания «Трактата» выступили с первыми публикациями по теории эллиптических функций в нынешнем смысле слова Абель и Якоби. Однако в то время, да и позднее, никто не подозревал, что почти на 30 лет ранее, между 1797 и 1800 гг., глубоко разработал теорию не только эллиптических интегралов, но и эллиптических функций молодой Гаусс, до конца жизни сохранявший при себе результаты своих размышлений в этой области.

Новые специальные интегралы

Мы уже познакомились с некоторыми классами специальных интегралов, введенными в XVIII в., эйлеровыми интегралами обоих родов и эллиптическими. Среди других трансцендентных функций, возникающих при интегрировании, следует назвать еще интеграл $\int\limits_0^x \frac{dz}{\ln z} = \int\limits_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t dt}{t}$, который Эйлер ввел в первом томе «Интегрального исчисления» (1768), представив его бесконечным рядом, возникающим при почленном интегрировании разложения e^t/t. Более подробно изучил эту функцию, названную им гиперлогарифмом, Л. Маскерони в «Замечаниях к интегральному исчислению Эйлера» (Adnotationes ad Calculum integralem Euleri. Pavia, 1790—1792). Маскерони, в частности, показал, что входящая в разложение интеграла постоянная есть известная постоянная Эйлера (см. стр. 339);

$$\int\limits_0^x \frac{dz}{\ln z} = \gamma + \ln(-\ln x) + \frac{\ln x}{1} + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots,$$

здесь $0 < x < 1$, при $x > 1$ следует брать главное значение интеграла, т. е.

$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dz}{\ln z}+\int\limits_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dz}{\ln z}\right)$. По предложению И. Зольднера (1809) эту функцию называют теперь интегральным логарифмом и обозначают $\mathrm{li}\, x$. Интегральный логарифм получил важные применения в теории чисел; в частности, количество простых чисел, не превосходящих какого-либо большого числа x, асимптотически представляется разностью $\mathrm{li}\, x - \mathrm{li}\, 2 = \int\limits_2^x \frac{dz}{\ln z}$. Маскерони ввел еще две специальные функции, родственные интегральному логарифму и также находящие разнообразные приложения,— интегральный синус $\int\limits_0^x \frac{\sin zdz}{z}$ и интегральный косинус $-\int\limits_x^\infty \frac{\cos zdz}{z}$, которые К. Бретшнейдер (1837) обозначил соответственно $\mathrm{si}\,(x)$ и $\mathrm{ci}\,(x)$.

Во второй половине века было вычислено множество специальных определенных интегралов, в том числе несобственных, для случаев, когда интегрирование данной функции в конечном виде невозможно. Для этой цели применялись — по большей части совершенно формально — разнообразные приемы: разложения в ряды, дифференцирование под знаком интеграла, двойные интегралы, комплексные подстановки и т. д. Мы приведем несколько примеров, но сперва скажем несколько слов об истории приема дифференцирования интеграла по параметру. Дифференцирование конечного уравнения однопараметрического семейства кривых по параметру применил впервые Лейбниц в задаче об огибающих (1692; см. т. II, стр. 275). В 1697 г. Лейбниц же, занимаясь задачей об ортогональных траекториях, распространил этот прием на интегралы, зависящие от параметра, и письменно сообщил о своем открытии И. Бернулли. Старший сын последнего, Николай II Бернулли, опубликовал правило Лейбница в большой работе о траекториях, где были изложены, кроме собственных исследований, результаты отца и двоюродного брата Николая I (Acta Eruditorum, 1720 и VII дополнительный том к ним). Наконец, Фонтен в работе 1738 г., увидевшей свет в 1764 г. (ср. стр. 342), впервые привел это правило в обычной тогда символике исчисления бесконечно малых, именно в виде $\frac{d\int \mu dx}{dy} = \int \frac{d\mu}{dy} dx$. Когда Клеро 17 сентября 1740 г. известил Эйлера о приеме дифференцирования Фонтена, Эйлер 30 октября отметил, что прием этот восходит к упомянутым исследованиям об ортогональных траекториях[1]. В это же время дифференцирование интегралов по параметру получило применение при интегрировании уравнения полного дифференциала.

Интересным примером приложения бесконечных рядов явилось вычисление определенных интегралов

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{m-1} \pm x^{n-m-1}}{1 \pm x^n}\, dx$$

(Novi Commentarii, (1774) 1775). В первом томе «Интегрального исчисле-

---

[1] Эти письма Клеро и Эйлера хранятся в Архиве АН СССР, ф. 1, оп. 3, № 29, лл. 139—140; ф. 136, оп. 2, № 12, л. 4; ф. 1, оп. 3, № 30, лл. 87—89.

ния» Эйлер представил соответствующие неопределенные интегралы бесконечными рядами

$$\frac{x^m}{m} \pm \frac{x^{n-m}}{n-m} \mp \frac{x^{n+m}}{n+m} - \frac{x^{2n-m}}{2n-m} + \frac{x^{2n+m}}{2n+m} \pm \frac{x^{3n-m}}{3n-m} - \ldots,$$

которые легко получаются почленным интегрированием разложений подынтегральных функций. Подстановка пределов дает затем ряды

$$\frac{1}{m} \pm \frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} \pm \frac{2m}{9n^2-m^2} - \ldots,$$

суммы которых, как это было показано в первом томе «Введения в анализ бесконечных» (ср. стр. 329). соответственно равны $\dfrac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$ (в случае верхних знаков) и $\dfrac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n}}$ (во втором случае). Но этим Эйлер не ограничился. С помощью замены переменных $m = \lambda - \omega$ и $n = 2\lambda$ и дифференцирования интеграла по параметру он определил еще значение несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{x^{\lambda-1} \ln x}{1-x^{2\lambda}} dx = \frac{-\pi^2}{8\lambda^2}$ и, в частности, $\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi^2}{8}$ (см. также Acta, (1781 : I) 1784).

В «Мемуаре о вероятностях» (Mém. Ac. Paris, (1778) 1781), о котором говорилось в четвертой главе, Лаплас, интегрируя по частям, выразил важный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ через $\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt$, а значение последнего нашел, остроумно используя кратное интегрирование. Именно, если двойной интеграл $I = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-s(1+u^2)} ds du$ вычислить, сперва интегрируя по s и затем по u, то

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Если же сделать подстановку $u\sqrt{s} = t$ и затем другую $s = v^2$, то

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-s} ds}{\sqrt{s}} \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int\limits_0^{\infty} e^{-v^2} dv \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Особое значение имело введение в интегральное исчисление комплексных переменных, к которому изредка прибегали еще Лейбниц и Иоганн I Бернулли. Замечательный прием вычисления несобственных интегралов посредством мнимых подстановок был дан Эйлером в одной статье, представленной Петербургской академии в 1781 г., но увидевшей свет только во втором издании «Интегрального исчисления» (т. IV, 1794). В интеграле

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \Gamma(n)$$

(где n может быть и нецелым) Эйлер произвел подстановку $x = ky$, где $k = p \pm iq = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$, после чего сравнение действительной и мнимой частей в равенстве

$$\int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}(\cos qy \mp i\sin qy)\,dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n}(\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha)$$

дает интегралы:

$$\int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}\cos qy\,dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n}\cos n\alpha, \qquad \int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}\sin qy\,dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n}\sin n\alpha.$$

Полагая, в частности, $n = {}^1/_2$, $p = 0$, $q = 1$, т. е. $r = 1$ и $\alpha = \pi/2$, и зная, что $\Gamma({}^1/_2) = \sqrt{\pi}$, Эйлер получил интегралы

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

которые, как и такие же интегралы с переменным верхним пределом, нередко называют по имени О. Ж. Френеля, применившего их сорок лет спустя к решению задач дифракции света. Кроме того, приняв n бесконечно малым, так что $\Gamma(n) = 1/n\,\Gamma(n+1) = \Gamma(1)/n = 1/n$, Эйлер вычислил интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin qx\,dx}{x} = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$$

(интеграл, содержащий косинус, расходится) и при $p = 0$, $q = 1$ нередко встречающийся интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Мы вскоре увидим, что этот прием Эйлера был связан с его весьма общими результатами, относящимися к теории функций комплексного переменного.

Мнимые подстановки нашли применение тогда же и позднее у Лапласа. Не входя более в подробности, упомянем, что в мемуаре «О приближениях для формул, которые являются функциями весьма больших чисел» (Mém. Ac. Paris, (1782—1783) 1785—1786; ср. стр. 150) Лаплас таким образом среди прочего нашел, что

$$\int_0^\infty \frac{(\cos x + x\sin x)\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}.$$

В заключение остается добавить несколько замечаний о численном интегрировании. Мы уже изложили прием Эйлера, опиравшийся на понимание интеграла как предела интегральных сумм (см. стр. 346). В том же первом томе «Интегрального исчисления» (1768) Эйлер усовершенствовал этот прием с помощью разложения интеграла в степенной ряд Тейлора. Это позволило ему заключить значение интеграла $\int X dx$, равного b при $x = a$, т. е. интеграла $\int\limits_a^x X dx + b$, между границами

$$b + \alpha (A' + A'' + \ldots + X) - \frac{\alpha^2}{2} (B' + B'' + \ldots + P) + \\ + \frac{\alpha^3}{6} (C' + C'' + \ldots + Q) - \ldots$$

и

$$b + \alpha (A + A' + \ldots + {}'X) + \frac{\alpha^2}{2} (B + B' + \ldots + {}'P) + \\ + \frac{\alpha^3}{6} (C + C' + \ldots + {}'Q) + \ldots,$$

где $\alpha = (x - a)/n$; A, A',..., $'X$, X суть значения X при x, равном a, $a + \alpha$, ..., $a + (n - 1)\alpha$, $a + n\alpha$; B, B', ..., $'P$, P — соответственные значения dX/dx; C, C',..., $'Q$, Q — значения d^2X/dx^2 и т. д. Можно еще более приблизиться к истинному значению, отмечал Эйлер, если взять среднее арифметическое этих границ. И в отношении «усовершенствованного» метода он предупреждает, что непосредственное применение его невозможно, если в промежутке интегрирования функция X обращается в бесконечность, хотя бы сам интеграл $\int X dx$ был конечным, как в случае $\int\limits_0^a \frac{dx}{(a - x)^n}$ при $n < 1$. Оставляя в стороне указания Эйлера, как обойти трудности в данном примере, добавим, что свой уточненный метод он в том же томе «Интегрального исчисления» распространил на дифференциальные уравнения первого порядка (см. стр. 393).

Из приемов механических квадратур заслуживает упоминания так называемая формула Симпсона, или же формула парабол, которая была найдена Дж. Грегори в 1668 г. (см. т. II, стр. 157). Для случая трех ординат геометрический эквивалент этой формулы был известен еще ранее Кавальери (1639) и Торричелли (1644); он содержится и в «Гармонии мер» Коутса (опубл. 1722). Более широкую известность формула парабол получила благодаря профессору Военной академии в Вулвиче Томасу Симпсону (1710—1761), который опубликовал ее в своих «Математических рассуждениях на физические и аналитические темы» (Mathematical dissertations on physical and analytical subjects. London, 1743). В наших обозначениях эта формула пишется так:

$$\int\limits_a^b y dx \simeq \frac{b - a}{6n} [y_0 + y_{2n} + 4 (y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2 (y_2 + \ldots + y_{2n-2})].$$

Здесь y_0, y_1,..., y_{2n} суть значения функции y для равностоящих значений аргумента от a до b и $2n$ — число делений. Популярность формулы Симпсона объясняется ее простотой и сравнительно высокой степенью точности.

Элементы теории функций комплексного переменного

В предыдущем изложении мы не раз говорили о работах математиков XVIII в. в области функций комплексного переменного. Уже к середине этого столетия благодаря трудам Лейбница, Иоганна I Бернулли, Коутса Муавра, Даламбера и особенно Эйлера была развита теория элементарных функций комплексного аргумента, включая их разложения в степенные ряды, бесконечные произведения и ряды простейших дробей. Вслед за тем комплексные переменные получили применение в интегральном исчислении. Этим вклад ученых XVIII в. в теорию аналитических функций не ограничился. Хотя они еще не приступили к ее систематической разработке, но выдвинули несколько идей и методов, которые в дальнейшем приобрели фундаментальное значение в создании общей теории. Так, были введены конформные преобразования (стр. 169), высказано свойство единственности аналитических функций (стр. 251). Другим замечательным открытием явилось установление связи между действительной и мнимой частью аналитической функции.

В середине XVIII в. комплексные переменные получили чрезвычайно важные применения к решению уравнений с частными производными. Отправными явились гидродинамические исследования Даламбера и затем Эйлера. Подробнее об этом говорится в девятой главе, здесь же мы остановимся только на обнаруженных попутно свойствах аналитических функций.

Рассматривая в «Опыте новой теории сопротивления жидкостей» (1752; см. стр. 419) один вопрос механики плоского движения идеальной жидкости, Даламбер привел его к определению двух функций $u\,(x,\ y)$ и $v\,(x,\ y)$ (проекций скорости частицы жидкости на оси координат) по уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\qquad\qquad (\mathrm{D}-\mathrm{E})$$

означающим, что выражения $vdx+udy$ и $udx-vdy$ суть полные дифференциалы. С помощью условия полного дифференциала и несложных преобразований в комплексной области Даламбер представил искомые функции формулами, из которых непосредственно вытекает, с нашей точки зрения, что u и v суть действительная часть и коэффициент при i некоторой произвольной функции комплексного переменного $u+vi$, произвол которой ограничен лишь тем, что она подразумевается аналитической и принимает действительные значения при действительном аргументе.

Впоследствии Даламбер («Математические работы», т. I, 1761) и успешно развивавший его гидромеханические исследования Лагранж (Miscellanea Taurinensia, (1762—1765) 1766) установили, что функции u и v, связанные условиями (D — E), суть решения уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\qquad\qquad (\mathrm{E}-\mathrm{L})$$

т. е., как говорят теперь, суть гармонические сопряженные функции: все решения этого уравнения Эйлера — Лапласа называются гармоническими функциями, а решения, для которых выполняются еще условия (D — E), — сопряженными гармоническими (о наименовании только что написанного уравнения см. стр. 444).

Тем временем Эйлер в «Общих принципах движения жидкостей» (Principes généraux du mouvement des fluides. Mém. Ac. Berlin, (1755) 1757), решая по методу Даламбера задачу о плоском потенциальном движении идеальной жидкости, вновь пришел к условиям (D — E). Проекции скорости он представил, объединив их в одном комплексном выражении (мы сохранили обозначения Эйлера):

$$u \pm \frac{v}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\varphi : (x \pm y\sqrt{-1}) \pm \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi : (x \pm y\sqrt{-1}),$$

где φ и ψ — произвольные функции, подчиненные требованию, что при замене аргумента на комплексно сопряженный аналогично изменяются их значения (т. е. имеющие действительные значения на действительной оси). Предполагая $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ разложенными по натуральным степеням аргумента $p = x + y\sqrt{-1}$, Эйлер с помощью подстановок $(x + y\sqrt{-1})^n = s^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$ выразил обе функции u, v в действительной форме, именно тригонометрическими рядами:

$$u = A + Bs\cos\varphi + Cs^2\cos 2\varphi + \ldots + \mathfrak{B}s\sin\varphi + \mathfrak{C}s^2\sin 2\varphi + \ldots,$$
$$v = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}s\cos\varphi + \mathfrak{C}s^2\cos 2\varphi + \ldots - Bs\sin\varphi - Cs^2\sin 2\varphi + \ldots$$

Отыскание действительных решений уравнения (E — L), первоначально полученных в комплексной форме, имело важное значение, и Эйлер возвратился к этому вопросу в третьем томе «Интегрального исчисления» (1770). Получив решение в виде

$$z = f(x + y\sqrt{-1}) + F(x - y\sqrt{-1}),$$

он замечает, что z при «непрерывности» функций f и F можно записать как сумму

$$z = \frac{1}{2}f(x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}f(x - y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}F(x + y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}F(x - y\sqrt{-1}),$$

которая всегда действительная, а затем, приведя указанные подстановки, заключает: «Следовательно, если заданные функции составлены с помощью аналитических операций, т. е. непрерывны, их можно выразить в действительной форме через косинусы и синусы [кратных угла] φ» [1].

Следующий важный шаг сделал опять-таки Эйлер в 1776 г., когда он в возрасте 69 лет начал пионерские исследования о вычислении определенных интегралов с помощью комплексных переменных. Все работы его по этому вопросу были напечатаны уже посмертно. Две из них, содержащие наиболее общие результаты, были представлены ранней весной 1777 г. Это статьи «О весьма замечательных интегрированиях, получающихся с помощью исчисления мнимых» и «Дальнейшее исследование о мнимых интегральных формулах» (De integrationibus maxime memorabilis ex calculo imaginariorum oriundis. Nova Acta, (1789) 1793; Ulterior disquisitio de

1 *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. III, стр. 160.— Эйлер рассматривает здесь уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; мы положили $a = 1$.

formulis integralibus imaginariis. Nova Acta, (1792) 1797). Вся теория мнимых, говорил Эйлер во второй статье, которой анализ обязан теперь столькими успехами, основана, главным образом, на том свойстве функций комплексного переменного, что они изменяют свое значение на сопряженное вместе с аргументом. Исходя из этого, Эйлер выводит уравнения (D — E), применяя к комплексным величинам обычные правила интегрирования. Если $z = x + y\sqrt{-1}$ и $Z(z) = M(x, y) + N(x, y)\sqrt{-1}$ — функция, интеграл которой

$$\int Zdz = V(z) = P(x, y) + Q(x, y)\sqrt{-1},$$

то

$$P + Q\sqrt{-1} = \int (M + N\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}) =$$
$$= \int (Mdx - Ndy) + \sqrt{-1}\int (Ndx + Mdy)$$

и, значит,

$$P - Q\sqrt{-1} = \int (M - N\sqrt{-1})(dx - dy\sqrt{-1}) =$$
$$= \int (Mdx - Ndy) - \sqrt{-1}\int (Ndx + Mdy),$$

так что

$$P = \int (Mdx - Ndy), \qquad Q = \int (Ndx + Mdy).$$

Поэтому выражения $Mdx - Ndy$ и $Ndx + Mdy$ суть полные дифференциалы функций P и соответственно Q. А в таком случае, согласно условию полного дифференциала,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (D - E)$$

Таким образом Эйлер установил, что действительная и мнимая части любой аналитической функции $Z = M + N\sqrt{-1}$ необходимо удовлетворяют тем уравнениям (D — E), которые некогда встречались ему и до него Даламберу при решении дифференциальных уравнений гидромеханики.

Непосредственной целью Эйлера была разработка нового метода интегрирования, который он применил к вычислению целого ряда трудных неопределенных интегралов, преобразуя какой-либо известный интеграл $\int Zdz = V$ подстановкой $z = x + iy = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в другие интегралы. Возникающие при этом интегралы от полных дифференциалов с двумя переменными он приводил к интегралам от функций одного переменного, полагая v или φ постоянными. Другим применением того же метода явилось вычисление несобственных интегралов, когда первообразная не выражается в элементарных функциях (см. стр. 363). Эти интегрирования Эйлера и почти одновременные с ними Лапласа стимулировали исследования Пуассона (с 1813 г.) и Коши (с 1814 г.), которые ввели отчетливое понятие о криволинейном интеграле в комплексной области. Ни у Эйлера, ни у Лапласа идеи интегрирования по пути, лежащему в комплексной плоскости, еще не было, хотя формальные выкладки в мемуарах Эйлера 1777 г. фактически основывались на том, что криволинейный интеграл от полного дифференциала не зависит от пути интегрирования (ср. интегральную теорему Коши; 1825), а вычисление конкретных интегралов с помощью подстановки $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi = \text{const}$ соответствовало интегрированию вдоль луча, выходящего из начала координат [1].

Уравнения (D — E) до сих пор нередко называют по имени Коши и Римана. Более справедливо именовать их по имени Даламбера и Эйлера, как в последнее время все чаще поступают многие ученые. Но глубокое значение этого свойства аналитических функций, которое сам Эйлер назвал замечательным, стало ясным только в общей теории аналитических функций и особенно после основоположных исследований Римана (1851). У математиков XVIII в. не было точного понятия не только об интеграле в комплексной области, но и о производной функции комплексного переменного. Определение производной и дифференциала в этом случае точно такое же, как для функции действительного переменного, но свойства дифференцируемых функций комплексного переменного во многом отличны от их свойств для функций действительного аргумента и дифференцируемость первых имеет место при гораздо более стеснительных условиях. Здесь и выявляется фундаментальная роль уравнений Даламбера — Эйлера. Именно функция комплексного переменного $w = f(z) = u + vi$ имеет определенную конечную производную в точке $z = x + yi$ (т. е. предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$, значение которого не зависит от того, по какому пути Δz стремится по модулю к нулю) только при выполнении условий $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$; с другой стороны, эти же условия достаточны для дифференцируемости функции w, если, сверх того, скажем, функции u и v имеют полные дифференциалы. Можно доказать, что функция, дифференцируемая во всех точках какой-либо области, имеет в них производные любого порядка, а также разлагается в некоторой окрестности каждой точки области в степенной ряд, т. е. аналитична.

Итак, в XVIII в. были, хотя и не строго, выявлены и использованы весьма важные свойства аналитических функций. Это в значительной мере подготовило систематическую разработку общей теории, ставшую возможной лишь после реформы оснований анализа в первой четверти XIX в.

---

[1] Гаусс сформулировал определение интеграла по комплексному переменному и интегральную теорему Коши еще в письме к Бесселю от 18 декабря 1811 г., опубликованном в 1880 г. (*C. F. Gauss.* Werke, B. VIII. Göttingen, 1900, S. 90—92).