ВОСЬМАЯ ГЛАВА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Первые работы петербургских академиков

В восьмой главе второго тома были кратко рассмотрены методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, разработанные Ньютоном, Лейбницем и братьями Я. и И. Бернулли. В качестве универсального способа решения были использованы разложения интегралов уравнений в бесконечные степенные ряды. Вместе с тем в школе Лейбница была поставлена задача интегрирования в квадратурах и некоторые классы уравнений первого порядка были с помощью подходящих преобразований приведены к разделению переменных.

Исследования в этом направлении были продолжены в первой четверти XVIII в. Для примера мы рассмотрим содержание статей, помещенных в двух первых томах «Записок» (Commentarii) Петербургской академии. Характерно, что из шести математических работ первого тома за 1726 г. (1728) пять относятся к дифференциальным уравнениям.

Статья Я. Германа «Об интегральном исчислении» (De calculo integralium) относится, в основной части, к интегрированию уравнений вида

$$du = R^{\lambda}dK,$$

где R и K суть функции одной или нескольких переменных x, y,... Предполагая, что $u = MR^{\lambda+1}$, Герман сводит дело к интегрированию «канонического уравнения»

$$dK = (\lambda + 1)\, MdR + RdM,$$

аналогично он поступает с уравнениями

$$du = R^{\lambda}S^{\mu}dK \text{ и } du = R^{\lambda}S^{\mu}T^{\nu}dK.$$

В примерах фигурируют уравнения, интегрируемые непосредственно, или уравнения в полных дифференциалах. Так, уравнение

$$du = 3\, a^3y^2dy - 6a^2x^2ydy + 3ax^4dy - 6a^2xy^2dx + 12\, ax^3\, ydx - 6\, x^5dx$$

записывается в виде $du = R^{\lambda}dK$, где $R = x$, $\lambda = 5$, так что $dK = 6Mdx + xdM$, после чего путем довольно долгих выкладок находятся M и $u = (ay - x^2)^3$. Современный прием интегрирования уравнения в полных дифференциалах был предложен несколько позднее Клеро и Эйлером.

Х. Гольдбах в небольшой заметке указал (необоснованно!), что после исследования Лейбницем и И. Бернулли однородного уравнения встает задача о решении уравнения вида

$$(a + bxy + cx^2y^2 + \ldots)\,dx + (bx^2 + mx^2y^2 + nx^4y^2 + \ldots)\,dy = 0.$$

Однако сам он привел к однородному только уравнение

$$(a + cx + fy)\,dx + (b + ex + gy)\,dy = 0,$$

для чего применил линейные подстановки

$$x = z + \frac{bf - ag}{cg - ef}, \quad y = u + \frac{ae - bc}{cg - ef}.$$

В другой статье того же тома Гольдбах рассмотрел некоторые случаи так называемого уравнения Риккати вида

$$ax^m dx + byx^p\,dx + cy^2 dx = dy.$$

В связи с этим отметим, что итальянский математик Джакопо Риккати (1676—1754) впервые поставил в 1723 г. вопрос: найти значения n, при которых уравнение

$$x^n \frac{du}{dx} + u^2 = nx^{m+2n-1}$$

допускает разделение переменных. Эти значения независимо друг от друга нашли, кроме самого Риккати, Иоганн I, Николай I, Николай II и Даниил Бернулли, ранее других опубликовавший свой результат в «Некоторых математических этюдах» (Exercitationes mathematicae quaedam. Venezia, 1724). Установленные ими случаи оказались единственными, как доказал Ж. Лиувилль (1841), когда «специальное» уравнение Риккати решается в квадратурах. Исследованием этого же уравнения занимался и Эйлер (ср. стр. 377).

Из работ, помещенных в первом томе «Записок» Петербургской академии, упомянем еще «Анализ некоторых дифференциальных уравнений» (Analysis aequationum quarundam differentialium) Николая II Бернулли, где, среди прочего, показано, что уравнение

$$ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$$

с помощью подстановки $x^{p+1} = u$ приводится (при сохранении прежних обозначений всех величин) к

$$ax^m y^n dx + by^q dx = dy,$$

частным случаем которого при $q = 1$ является так называемое «уравнение Бернулли». Дальнейшая замена $y^{1-n} = v$ дает более простое уравнение вида

$$ax^m dx + by^q dx = dy,$$

при $q = 1$ оказывающееся линейным. Общее линейное уравнение первого порядка Николай II Бернулли решил с помощью подстановки $y = e^{bx}z$. Впоследствии экспоненциальные подстановки получили широкое применение в работах Эйлера.

В малоизвестной работе Я. Германа «О построении решений дифференциального уравнения первого порядка» (De constructione aequationis differentialis primi gradus), помещенной во втором томе «Записок» Петербургской академии за 1727 г. (1729), предметом изучения является уравнение $y = P(z)x + Q(z)$, где $dy = zdx$, т. е. $z = dy/dx$. Другими словами, здесь рассматривается уравнение, которое впоследствии было названо уравнением Даламбера — Лагранжа и которое привлекло еще в 1694 г. внимание И. Бернулли. Решение Герман получил с помощью приема дифференцирования, который был несколько ранее, в 1715 г., применен Б. Тейлором, а затем в 1734 г. Клеро (см. стр. 399). Естественно, что решение было получено в параметрической форме:

$$x = RS, \quad y = PRS + Q,$$

где

$$\ln R = \int \frac{dP}{z - P}, \quad S = \int \frac{dQ}{zR - PR}.$$

Случай $P \equiv z$ Герман не рассмотрел, его впервые исследовал Клеро (см. стр. 400). В виде дополнения указывается возможность перенесения приема на уравнения вида

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

где коэффициенты — функции $z = dy/dx$, в предположении, что левая часть может быть представлена как произведение двух линейных множителей.

Основное содержание начального периода теории дифференциальных уравнений, продолжавшегося до второй четверти XVIII в., состояло преимущественно в накоплении материала. Найденные результаты имели фрагментарный характер, постановка задач была неотчетлива, преувеличенное значение приписывалось методу разделения переменных. Вместе с этим уже первые исследователи в отдельных случаях затрагивали весьма существенные проблемы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, не отдавая себе отчета в их принципиальном значении и чрезвычайной сложности. К концу этого периода еще не могло быть и речи о сколько-нибудь отчетливом формировании главных направлений в этой новой области математического анализа.

Новые задачи естествознания и техники

Со второй четверти XVIII в. начинается новый период в развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений, продолжавшийся около ста лет. Именно в это время совокупность приемов решения отдельных типов уравнений переросла в самостоятельную дисциплину со своим специфическим предметом исследования, системой основных понятий и определившимися методами решения проблем.

Основные направления, в которых происходил этот процесс, были в решающей степени обусловлены запросами стремительного прогресса естествознания и техники. Дальнейшее развитие общей и небесной механики, физики жидкостей и газов, физики упругой среды, не говоря уже о технической механике и гидравлике, — все это определило новые задачи математического анализа.

В небесной механике возникли задачи исключительной сложности. Надлежало прежде всего исследовать явления, которые еще не были удовлетворительно объяснены на основе закона всемирного тяготения. Здесь требовалось теоретически вывести все особенности наблюдаемых движений небесных тел, прежде всего принадлежащих Солнечной системе, в рамках ньютоновой механики. Изучение взаимодействия между телами Солнечной системы было необходимо, в частности, для решения вопроса о постоянстве существующего взаиморасположения планетных орбит. Напомним, что Ньютон не считал возможным сохранение существующего состояния Солнечной системы без вмешательства время от времени «сил божественного провидения», полагая, что взаимное притяжение тел этой системы должно привести ее в беспорядок. Исследование вопроса об устойчивости планетных орбит приводило к трудной задаче определения этих орбит для больших интервалов времени. Для ее решения требовалось создать совершенно новые математические методы. В первую очередь они были необходимы для дальнейшего развития динамики материальной точки, теории движения твердого тела, динамики несвободной системы.

Чтобы отчетливее представить себе возникавшие трудности, достаточно напомнить, что к началу XVIII в. даже в динамике точки не существовало аналитических методов. Прежними синтетическо-геометрическими построениями Ньютона, требующими видоизменения для каждой новой сколько-нибудь сложной задачи, довольствоваться было уже невозможно, и Эйлер, Даламбер и Лагранж заложили прочные основы аналитической механики. Решающую роль приобрела при этом теория обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым приводили задачи динамики точки и динамики систем материальных точек.

Первые же задачи динамики точки при их аналитической трактовке потребовали методов интегрирования нелинейных уравнений второго порядка и их систем. Напомним, что определение по закону всемирного тяготения движения центра тяжести планеты, притягиваемой центром тяжести Солнца, эквивалентно решению задачи с начальными условиями для системы

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + K\frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где K — постоянная, определяемая через массу Солнца и абсолютную постоянную, входящую в выражение закона тяготения. Динамические уравнения Эйлера, определяющие движение абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, представляют нелинейную систему трех уравнений второго порядка (относительно эйлеровских углов ψ, θ, φ как функций времени t). К нелинейным уравнениям приводили задачи о движении точки в сопротивляющейся среде, рассмотренные впервые Ньютоном, как и многие экстремальные задачи механики, физики, геометрии, явившиеся предметом развивающегося вариационного исчисления, в частности, важное для практических приложений нахождение геодезических линий на поверхности. Решение задач статики и динамики механических систем со сложными связями также требовало интегрирования нелинейных уравнений.

Поэтому одним из направлений формировавшейся теории обыкновенных дифференциальных уравнений явилось разыскание методов решения нелинейных уравнений в конечной форме. Вопрос о самой возможности решения в таком виде еще не возникал. Именно в этом плане развивались методы понижения порядка и интегрирующего множителя.

Наряду с этим назрела потребность в создании приемов решения линейных уравнений. Это объясняется тем, что в начале XVIII в. приобретает все большее значение исследование малых колебаний материальных систем с конечным числом степеней свободы, в первую очередь в предположении, что отсутствует сопротивление среды. В связи с конструированием достаточно точных маятниковых часов, необходимых для астрономических наблюдений, и с первыми гравиметрическими проблемами (определение ускорения силы тяжести в зависимости от широты, выяснение сжатия Земли у полюсов) потребовалось дальнейшее развитие аналитической теории математического и физического маятников, начала которой положил ранее Гюйгенс. И если в XVII в. вопрос ограничивался, как правило, изучением изохронного движения одной точки, то теперь в центр внимания встали системы любого конечного числа материальных точек. Отсюда берут начало и первые исследования в области колебательных процессов систем с бесконечным числом степеней свободы, начиная со знаменитой задачи о колебании струны.

Весь этот комплекс вопросов требовал создания теории линейных дифференциальных уравнений и их систем, как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Третье большое направление было обусловлено в значительной степени нуждами опять-таки небесной механики. Мы имеем в виду численные методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, без которых невозможным оказалось изучение сложных нелинейных систем, не интегрируемых в конечном виде. Наряду с усовершенствованием метода степенных рядов, успешно применявшихся в предшествующем столетии, уже в середине XVIII в. получают применение тригонометрические ряды. Несколько позже теория дифференциальных уравнений обогащается первым общим методом аппроксимации решения для любых уравнений первого и второго порядков.

Наконец, четвертым направлением теории обыкновенных дифференциальных уравнений было изучение особых решений. Оно определялось главным образом запросами дифференциальной геометрии, например исследованием огибающих и изогональных траекторий семейств кривых (позже семейств поверхностей). Это направление, связанное прежде всего с изучением семейств плоских кривых и, в частности, семейств интегральных линий, играло в XVIII в. меньшую роль, чем три названных ранее. Однако уже в начале второй четверти XIX в. тесно связанная с теорией особых решений проблема единственности решений задач с начальными условиями, а вместе с тем и общая проблема существования решений приобрели в теории обыкновенных дифференциальных уравнений первостепенное значение.

Обзор достижений математики XVIII в. в развитии этих направлений требует более всего анализа работ Эйлера и его самых выдающихся современников — Даламбера и Лагранжа.

Первые методы решения нелинейных уравнений

Интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений связано с исключительными трудностями и в настоящее время.

Казалось бы, что в историческом процессе развитие теории должно было начинаться с изучения линейных проблем. Однако история науки далеко не всегда следует пути, «естественному» с точки зрения логического построения современной теории. Полтора десятилетия отделяют первую работу Эйлера о некоторых классах нелинейных дифференциальных уравнений от его первого классического мемуара по теории линейных уравнений. Именно при исследовании отдельных классов нелинейных уравнений постепенно формировались важнейшие понятия теории, уточнялся смысл самой задачи: решить дифференциальное уравнение.

Впервые в печати такие понятия, как «полный интеграл» (в смысле общего интеграла по современной терминологии), частный интеграл, частное решение были введены Эйлером лишь в 1743 г. в его замечательном мемуаре о линейных уравнениях (см. стр. 383). Анализ предшествующих работ Эйлера позволяет заключить, что этими понятиями он владел в конце 30-х годов XVIII в. В первых своих работах он говорит еще не о «решениях» дифференциального уравнения, а о «конечном» или «интегральном» уравнении.

Множество задач динамики, приводящих к уравнениям второго порядка, и отсутствие методов решения последних определили особый интерес Эйлера к уравнениям этого типа. Одним из методов решения явился метод понижения порядка. Интерес к нему объяснялся тем, что отдельные классы уравнений первого порядка, как было показано выше, умели интегрировать предшественники Эйлера. Первая работа Эйлера по теории дифференциальных уравнений «Новый метод сведения бесчисленных дифференциальных уравнений второго порядка к дифференциальным уравнениям первого порядка» (Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus. Commentarii, (1728) 1732) имеет целью изучение четырех видов уравнений второго порядка, допускающих, с помощью замены независимого переменного и неизвестной функции, приведение к уравнениям первого порядка. Определение этих видов основано на обобщении понятия однородности. Для пояснения укажем один из них: уравнение

$$ax^my^{-m-1}dx^pdy^{2-p} + bx^ny^{-n-1}dx^qdy^{2-q} = d^2y$$

будет однородным, если считать x, y, dx, dy, d^2y имеющими одинаковые измерения.

Содержание первой работы Эйлера в силу новизны подхода воспринималось современниками Эйлера с большим трудом. В частности, в своих письмах к И. Бернулли Эйлер был вынужден трижды разъяснять свое определение однородности уравнения. Эта работа сыграла весьма существенную роль и для теории линейных уравнений, ибо в ней Эйлер применил замену переменных с помощью показательной функции, например для только что приведенного уравнения $x = e^v$, $y = e^vt$, где t — некоторая новая неизвестная функция. Напомним, что экспоненциальной подстановкой пользовался несколько ранее при решении линейного уравнения первого порядка Николай II Бернулли. Характерно, что Эйлер отмечает источник основной идеи нового метода: при любом дифференцировании показательной функции переменный показатель степени сохраняется.

Несколько иначе трактует Эйлер интегрирование обобщенно-однородных уравнений второго порядка в позднейших исследованиях. Так, во втором томе «Интегрального исчисления» (1769) уравнения второго порядка представляются в виде систем двух уравнений первого порядка. С помощью соотношений $dy = pdx$, $dp = qdx$ формулируется следующий критерий однородности: переменные x, y, p, q должны входить в уравнение так, чтобы подстановки $y = ux$, $q = v/x$ исключали из уравнения x.

Поскольку речь идет об уравнениях второго порядка, упомянем, что в случае, когда в них не входит явно искомая функция, Дж. Риккати предложил излагаемый теперь во всех учебниках прием понижения порядка с помощью подстановки $y'' = y'\frac{dy'}{dy}$ (Giorn. de Letterati d'Italia, 1715). К уравнению вида $f(y, y', y'') = 0$ Риккати пришел, решая задачу об определении кривой, радиус кривизны которой есть функция ординаты. Тот же прием был известен задолго до того Я. Бернулли, но соответствующая работа последнего увидела свет только в 1744 г.

В первом и втором томах «Интегрального исчисления» Эйлер изложил и ряд других методов интегрирования отдельных классов нелинейных уравнений. Некоторые из них, в частности параметрическое представление интеграла, применяются и теперь.

Интегрирующий множитель

Особенно много результатов Эйлер получил с помощью метода интегрирующего множителя, который разрабатывал с начала 30-х годов.

Предпосылкой широкого употребления метода интегрирующего множителя, по умножении на который уравнение первого порядка преобразуется в уравнение полного дифференциала, являлось умение интегрировать последнее. В седьмой главе уже говорилось об открытии Эйлером и Клеро необходимых условий, при которых дифференциальные выражения вида $Pdx + Qdy$ или $Pdx + Qdy + Rdz$ могут быть полными дифференциалами. При этом было упомянуто, что в мемуаре «Об интегрировании или построении дифференциальных уравнений первого порядка» (Mém. Ac. Paris, (1740) 1742) Клеро проинтегрировал, как это делают теперь, точные уравнения:

$$Pdx + Qdy = 0 \text{ и } Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Эти же результаты были получены Эйлером, включившим их в первый (1768) и третий (1770) тома «Интегрального исчисления».

В отдельных случаях, как мы видели (см. т. II, стр. 278), интегрирующим множителем воспользовался еще в XVII в. Иоганн Бернулли, за которым последовал его сын Николай II (Acta Eruditorum, 1720). Систематическую разработку метода интегрирующего множителя предприняли Эйлер и, независимо, но в меньшем объеме, Клеро [1]. С наибольшей полнотой этот метод Эйлер изложил в «Интегральном исчислении». Отыскание множителя для уравнения первого порядка приводит к уравнению в частных производных, и, в соответствии с этой трудностью, Эйлер главное внимание сосредоточил на установлении классов уравнений, обладающих множителем заданного вида. В первом томе вопрос исследуется для уравнений первого порядка, во втором метод распространяется на некоторые случаи уравнений второго порядка и, наконец, в третьем обобщается на уравнения n-го порядка.

---

[1] Эйлер указал на существование интегрирующих множителей дифференциальных выражений в статье «Общее решение изопериметрической проблемы...» (Commentarii, (1732—1733), 1736; см. стр. 457) и впервые применил их практически в упомянутой ранее работе «О бесконечном числе кривых одного и того же вида...».

В методологическом отношении интересна попытка Эйлера предвидеть дальнейшее развитие теории. Первая глава раздела «Об интегрировании дифференциальных уравнений» в первом томе «Интегрального исчисления» начинается критическими замечаниями в адрес школы Лейбница. Несомненно, что главным образом имеются в виду работы братьев Бернулли, хотя явно об этом не говорится. «Многие строят весь фундамент решения дифференциальных уравнений на разделении переменных... Желателен метод, посредством которого отыскивается требуемая подстановка; однако мы не обладаем уверенными правилами, так как подобные подстановки не основываются на определенном принципе. Поэтому разделение переменных не следует рассматривать как истинный фундамент решений дифференциальных уравнений, особенно потому, что для уравнений второго и высшего порядка оно неприменимо» [1]. Несколько далее, имея в виду метод интегрирующего множителя, Эйлер говорит, что он переходит к другому принципу, применимому и к дифференциальным уравнениям высших порядков, так что «в нем содержится истинный и естественный источник всех интегрирований» [2]. Характерно и предвидение Эйлером трудностей разыскания таких множителей. В дальнейшем развитии теории в XVIII и XIX вв. эти соображения Эйлера полностью оправдались.

Отметим две теоремы, на которых основаны многие применения метода и важность которых Эйлер специально подчеркивал. Первая формулируется так: если M — интегрирующий множитель уравнения $Pdx + Qdy = 0$, то уравнение $M = 0$ представляет частный интеграл, если при этом P и Q не обращаются в бесконечность.

Вторая теорема — следствие попыток Эйлера доказать существование множителя. Уже в одной статье, помещенной в «Novi Commentarii» ((1760/61) 1763) формулируется следующая теорема: если в дифференциальном уравнении $Mdx + Ndy = 0$ условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ не выполнено, то всегда имеется множитель, посредством умножения на который выражение $Mdx + Ndy$ становится интегрируемым. Аналогичная формулировка дается в первом томе «Интегрального исчисления» [3]. Однако центральный пункт существования соответствующего решения уравнения с частными производными остался в обоих случаях недоказанным.

В своих приложениях интегрирующего множителя к уравнениям высших порядков Эйлер опирался на критерий, при котором функция вида $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)$ есть точная производная по x некоторой функции, содержащей производные лишь до порядка, на единицу меньшего. Этот критерий, совпадающий с необходимым условием экстремума интеграла $\int F dx$ (см. стр. 459), Эйлер привел в «Novi Commentarii» за 1764 г. (1766) и доказал в обзоре вариационного исчисления, приложенном к третьему тому «Интегрального исчисления» (1770). К тому же результату пришел довольно сложным путем Кондорсе в сочинении «Об интегральном исчислении» (Du calcul intégral, Paris, 1765), а Лексель изящно вывел его без помощи вариационного исчисления (Novi Commentarii, (1771) 1772).

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 227.
[2] Там же, стр. 247.
[3] Там же, стр. 256.

Уравнение Риккати

Отметим еще два результата Эйлера относительно нелинейных уравнений. Первый из них — обобщение приема дифференцирования, предложенного Клеро (1734), для решения уравнений вида

$$p - qx = Q(q), \quad q - rx = R(r),$$

где $p = dy/dx$, $q = dp/dx$, $r = dq/dx$ и т. д. В качестве примера решается уравнение

$$\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} = a$$

(«Интегральное исчисление», т. IV, 1794).

Предшественником здесь явился Даламбер, который в «Записках» Берлинской академии за 1748 г. (1750) указал возможность перенесения метода Клеро на уравнения:

$$x = y\,\Phi(u) + \Delta(u), \qquad u = y\,\Phi(K) + \Delta(K),$$

где

$$K = \frac{du}{dy}.$$

Второй результат — исследование уравнения Риккати с помощью непрерывных дробей. Попутно отметим, что, сравнивая операции разложения функций в бесконечные ряды, произведения и непрерывные дроби, Эйлер отдавал предпочтение последнему алгоритму. В известной мере и это мнение Эйлера оправдалось: в частности, алгоритм непрерывных дробей успешно используется в современной вычислительной технике.

Уравнение Риккати вызывало интерес у многих исследователей не только потому, что к нему приводит ряд задач механики, но и в силу возможности свести к нему любое линейное уравнение второго порядка.

Выше говорилось (см. стр. 370) о первых работах, посвященных специальному уравнению Риккати. Общим уравнением Риккати [1]

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$$

занялся еще в 30-е годы Эйлер, более детально изучивший его свойства в статьях, помещенных в «Novi Commentarii» (1760—1761) 1763 и (1762—1763) 1764. В частности, он показал, что, когда известно частное решение этого уравнения, оно подстановкой $y = v + \frac{1}{z}$ может быть приведено к линейному, а если даны два частных решения, то интегрируется квадратурой. Значительную часть своих результатов, относящихся как к специальному, так и к общему уравнению Риккати, Эйлер изложил в двух первых томах «Интегрального исчисления». Однако применение непрерывных дробей к уравнению Риккати содержится в других работах Эйлера, часть которых была опубликована посмертно. Приведем результат, изложенный в статье, представленной Петербургской академии в 1780 г., но появившейся только в VI томе ее «Mémoires» в 1818 г. под названием

[1] Уравнением Риккати назвал это уравнение Даламбер в одном письме к Лагранжу от июня 1769 г.

«Легкий прием решения уравнения Риккати с помощью непрерывных дробей» (Analysis facilis aequationem Riccatianam per fractionem continuam resolvendi). Для уравнения

$$axdz - azdx + z^2dx = x^2dx$$

Эйлер формально получил два решения:

$$z_1 = x\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{e^{x/a} - e^{-x/a}} = a\,\frac{1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \ldots}{1 + \frac{1}{6}\frac{x^2}{a^2} + \ldots},$$

$$z_2 = a + \cfrac{x^2}{3a + \cfrac{x^2}{5a + \ldots}},$$

удовлетворяющие одному и тому же начальному условию $z(0) = a$. На этом основании Эйлер заключает, что эти два решения тождественно совпадают. Записав уравнения в форме двух равенств:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{az + x^2 - z^2}{ax}, \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{ax}{az + x^2 - z^2},$$

убеждаемся, что точка $(0, a)$ является особой, а линия $x = 0$ — интегральной. Тем не менее окончательное заключение Эйлера оказывается справедливым. Точка $(0, a)$, как нетрудно убедиться, является седлообразной, а интегральная линия $x = 0$ не должна учитываться в силу самой постановки задачи.

Дифференциальные уравнения и эллиптические интегралы

Как говорилось в седьмой главе (стр. 354 и след.), математики XVIII в. установили, что проблема разыскания спрямляемых сумм или разностей дуг эллипсов, гипербол и лемнискат приводит к разысканию частных алгебраических интегралов специальных эллиптических уравнений, которые нередко называют по имени Эйлера. Действительно, Эйлер первый получил весьма общие результаты, относящиеся к этой области, и многие из них, хотя и не все, содержатся во втором разделе первого тома его «Интегрального исчисления».

Метод выявляется уже в простейших случаях: Эйлер, исходя из заданного алгебраического соотношения как полного интеграла, стремится найти соответствующее дифференциальное уравнение. Рассмотрим первую задачу V главы этого раздела: пусть дано алгебраическое уравнение $\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$. Требуется найти соответствующее ему дифференциальное уравнение. Дифференциал левой части есть

$$(\beta + \gamma x + \delta y)\,dx + (\beta + \gamma y + \delta x)\,dy = 0.$$

Подстановки $p = \beta + \gamma x + \delta y$, $q = \beta + \gamma y + \delta x$ в исходное уравнение дают соотношения:

$$p^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)\,y + (\delta^2 - \gamma^2)\,y^2,$$
$$q^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)\,x + (\delta^2 - \gamma^2)\,x^2.$$

Дальнейшие подстановки $A = \beta^2 - \alpha\gamma$, $B = \beta(\delta - \gamma)$, $C = \delta^2 - \gamma^2$ позволяют придать уравнению $pdx + qdy = 0$ вид

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}} + \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2}} = 0.$$

В силу исходного соотношения это означает, что полный интеграл этого уравнения есть

$$\beta^2(B^2 - AC) + 2\beta\gamma AB + 2\beta\gamma B^2(x+y) + \gamma^2B^2(x^2+y^2) + \\ +2\gamma B(\beta C - \gamma B)xy = 0.$$

Роль произвольного постоянного играет отношение β/γ.

В частном случае $\beta = 0$ Эйлер получает следствие: уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} = \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}$$

имеет полным интегралом

$$y = x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}.$$

Уже в этом простейшем случае Эйлер получает теорему сложения.

Положим:

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}}, \quad \Pi(y) = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}$$

(у Эйлера обозначения пределов отсутствуют). Тогда дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} = \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}$$

имеет полный интеграл [1]

$$\Pi(y) = \Pi(x) + C_1.$$

Но этот же интеграл имеет выражение

$$y = x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}.$$

При $x = 0$ отсюда следует $y = b$ и, значит, $C_1 = \Pi(b)$. Итак,

$$\Pi(y) = \Pi(x) + \Pi(b).$$

Тот же результат может быть выражен иначе: для выполнения соотношений

$$\Pi(r) = \Pi(p) \pm \Pi(q)$$

необходимо, чтобы

$$r = p\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}} \pm \sqrt{\frac{A+Cp^2}{A}}.$$

---

[1] Произвольное постоянное в тексте обозначено также C.

Как частный случай здесь получаются известные формулы сложения круговых дуг. Пусть

$$\Pi(z) = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z,$$

тогда при $r = p\sqrt{1-q^2} \pm q\sqrt{1-p^2}$ получим

$$\arcsin z = \arcsin p \pm \arcsin q.$$

Все эти рассуждения Эйлера являлись лишь наводящими для исследования значительно более сложной задачи о нахождении алгебраических интегралов уравнения $\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P_4(y)}}$, где $P_4(z)$ — многочлен четвертой степени. На этом пути Эйлер и нашел формулы сложения для эллиптических интегралов всех трех типов.

Приведем лишь один из результатов, содержащихся в VI главе второго раздела первого тома «Интегрального исчисления». Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}} = 0$$

имеет своим полным интегралом соотношение

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \xi x^2y^2 = 0,$$

если [1]

$$\beta^2 - \alpha\gamma = Am, \quad \beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma = Bm,$$
$$\delta^2 - 2\beta\varepsilon - \alpha\xi - \gamma^2 = Cm, \quad \delta\varepsilon - \beta\xi - \gamma\varepsilon = Dm,$$
$$\varepsilon^2 - \gamma = Em.$$

Исследования Эйлера сразу же заинтересовали Лагранжа. В работе «Об интегрировании некоторых дифференциальных уравнений, в которых переменные разделены, но члены которых по отдельности не интегрируемы» (Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre n'est pas intégrable. Miscell. Taurinensia, 1766—1769). Лагранж рассмотрел уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}},$$

несколько упрощая построения Эйлера, хотя и следуя сходному пути. Требуется найти интеграл вида

$$A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + D(xy) + E(x^2y+y^2x) + F(x^2y^2) = 0.$$

Дифференцируя это соотношение, Лагранж устанавливает связь между данными коэффициентами $\alpha, \beta, \ldots$ и неопределенными коэффициентами A, $B, \ldots$:

$$\alpha = B^2 - 4AC, \qquad \beta = 2BD - 4(AE + BC),$$
$$\gamma = 2BE + D^2 - 4(AF + C^2 + BE), \quad \delta = 2DE - 4(BF + CE),$$
$$\varepsilon = E^2 - 4CF.$$

---

[1] Здесь значения пяти отношений шести величин $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$ к одной из них определяются отношением к последней произвольно взятой m.

При этом поясняется, что, поскольку заданных коэффициентов не больше пяти, то из шести неопределенных коэффициентов по крайней мере один будет неопределенным и он будет играть роль произвольного постоянного.

В этой же работе Лагранж стремится развить для уравнений, которые не интегрируются обычными способами, метод дифференцирования. В общей форме схема решения такова. Когда уравнение первого порядка не может быть проинтегрировано, следует его дифференцировать. Затем, комбинируя новое уравнение с предложенным, нужно найти интеграл нового уравнения, который сам будет дифференциальным уравнением первого порядка. После этого надлежит взять разность двух таких интегралов (т. е. дифференциальных уравнений первого порядка), получить алгебраическое соотношение, которое и будет искомым интегралом исходного уравнения.

Проиллюстрируем схему Лагранжа на примере уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}.$$

Положив $dt=\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}$, Лагранж дифференцирует уравнения:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2,\qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\alpha+\beta y+\gamma y^2,$$

что дает

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=\beta+2\gamma x,\qquad 2\frac{d^2y}{dt^2}=\beta+2\gamma y.$$

Сложение и замена $x+y=p$ приводят к уравнению $2\frac{d^2p}{dt^2}=2\beta+2\gamma p$, а затем, после умножения на dp и интегрирования, к уравнению

$$\frac{dp}{dt}=\sqrt{k+2\beta p+\gamma p^2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dx+dy}{dt}=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}.$$

Приравнивая эти выражения dp/dt, Лагранж для уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}$$

получил интеграл

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}=\sqrt{k+2\gamma(x+y)+\gamma(x+y)^2}$$
$$(k=\mathrm{const}).$$

Если же использовать разность двух уравнений второго порядка, то аналогичные вычисления приводят к интегралу

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}=\sqrt{H+\beta(x-y)^2},$$

где H — произвольное постоянное.

Этот метод Лагранж применил и к уравнению

$$\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P_4(y)}},$$

которое сначала исследовал, как показано выше, по методу Эйлера. Метод дифференцирования приводит к интегралу

$$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4} + \sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4} =$$
$$= (x - y)\sqrt{G^2 + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2},$$

где G — произвольное постоянное.

Не ограничиваясь этим, Лагранж предпринял попытку интегрирования более общего уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{X(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}},$$

где одинаковые функции X и Y не предполагаются многочленами. Вводя вспомогательные уравнения

$$\frac{dt}{T} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \qquad \frac{dt}{T} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

а затем замену

$$x = \frac{p+q}{2}, \qquad y = \frac{p-q}{2},$$

Лагранж пришел, следуя своей схеме, к уравнению

$$\frac{d}{dp}\left(T\frac{dp}{dt}\right)^2 = 2T\frac{d}{dq}\left(\frac{X-Y}{T}\right),$$

неявно предполагая, что dp/dt есть функция только p. Однако дальнейшее исследование проводится лишь для отдельных случаев функции T, в частности, $T = P(p)\,Q(q)$.

Результаты Лагранжа, относящиеся к уравнению $\dfrac{dx}{\sqrt{P_4(x)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{P_4(y)}}$, вызвали восхищение Эйлера и вновь побудили его к исследованиям этой проблемы. В заключение напомним, что Эйлеру на этом пути удалось получить теорему сложения эллиптических интегралов всех трех родов (см. стр. 357).

Линейные уравнения

Основная заслуга в развитии теории линейных дифференциальных уравнений опять-таки принадлежит Эйлеру, хотя весьма существенные открытия были сделаны в этой области также Д. Бернулли, а затем Даламбером, Лагранжем, Лежандром. Частные результаты получил Лексель.

В работах этого направления ярко проявилась характерная черта творчества Эйлера: единство теории и практики. Исследования линейных задач механики и физики были важнейшим стимулом теории и соответствующие работы Эйлера нередко непосредственно развивали эту теорию. Например, в статьях о распространении колебаний в упругой среде имеются результаты, относящиеся к интегрированию линейных систем с постоянными коэффициентами, отсутствующие в сочинениях Эйлера по дифференциальным уравнениям.

Вклад Эйлера и его современников в рассматриваемый отдел теории обыкновенных дифференциальных уравнений столь велик и разнообразен, что мы должны ограничиться анализом лишь его наиболее важной части. При этом, несколько отступая от хронологического порядка и сложного переплетения исследований отдельных типов линейных уравнений, мы начнем с уравнений с постоянными коэффициентами, первые примеры которых, второго порядка, встретились еще в конце XVII в. Однако вновь подчеркнем, что выделение этого класса, как простейшего среди линейных уравнений, потребовало значительного времени. Основополагающим явился уже упоминавшийся мемуар Эйлера «Об интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков» (De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. Miscellanea Berolinensia, 1743), где был изложен классический прием решения линейного однородного уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами; прием, которым Эйлер владел ранее, как это видно из его письма к И. Бернулли от 26 сентября — 3 октября 1739 г. Решению уравнения, записанного в производных

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

т. е. в форме, несомненно более удобной, чем обычная тогда запись с помощью дифференциалов, предпосланы очень важные общие указания. Исходя из мысли, что с помощью одного интегрирования, вводящего одну произвольную постоянную, порядок уравнения понижается на единицу, Эйлер заключает, что «полное интегральное уравнение» (aequatio integralis completa), т. е. наше общее решение, должно содержать n произвольных постоянных. Поэтому в силу линейности общее решение можно составить, зная n частных решений p, q,... (у Эйлера — «частные значения», valores particulares) в форме $\alpha p + \beta q + \ldots$, где α, β,... — произвольные постоянные. Понятие линейной зависимости функций явно выделено еще не было. Очевидно, только что приведенное положение относится к однородным линейным уравнениям как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Для отыскания частных решений рассматриваемого уравнения Эйлер применил экспоненциальную подстановку, как он это уже сделал, вслед за Николаем II Бернулли, еще в работе 1728 г. (см. стр. 374). Положив $y = e^{px}$, где p — постоянное, Эйлер пришел к так называемому теперь характеристическому уравнению n-й степени

$$A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \ldots + Np^n = 0,$$

которое в случае действительных различных корней p_1, p_2 ... p_n немедленно дает n частных решений $e^{p_1 x}$, $e^{p_2 x}$,... $e^{p_n x}$ и соответственно общее решение. Эйлер подробно разобрал и случаи, когда характеристическое уравнение имеет кратные действительные, а также мнимые корни, причем воспользовался подстановками вида $y = e^{kx}u$.

Значение этого мемуара в теории дифференциальных уравнений трудно переоценить (ср. стр. 373). Следует добавить, что почти одновременно и независимо решением уравнений того же класса занимался Д. Бернулли. В статье о колебании и звучании упругих стержней, помещенной в «Записках» Петербургской академии за 1741—1743 гг. (1751), он выразил общее решение уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{y}{f^4}$$

(где f — постоянная, зависящая от упругости стержня) как бесконечным степенным рядом, так и в конечном виде. Однако общий метод «абсолютной интеграции» (как он выражался) линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами Бернулли не изложил.

Способ решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами Эйлер опубликовал 10 лет спустя в мемуаре «Дальнейшее развитие метода интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков» (Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota. Novi Commentarii, (1750—1751) 1753). Этот способ, основанный на применении интегрирующего множителя, отличается от общепринятого теперь и приводит к последовательному понижению порядка. Например, уравнение второго порядка

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2}$$

умножается на $e^{\alpha x}$, а затем принимается, что решение возникающего уравнения первого порядка имеет вид

$$\int Xe^{\alpha x}\,dx = e^{\alpha x}\left(A'y + B'\frac{dy}{dx}\right),$$

где A' и B' — неопределенные коэффициенты. Дифференцирование последнего уравнения и почленное сравнение с данным уравнением позволяет найти значения постоянных A', B' и α, после чего дело сводится к решению линейного уравнения первого порядка.

Другой прием, основанный на сведении неоднородного уравнения к системе линейных уравнений первого порядка, указал, несколько опередив Эйлера в публикации, Даламбер в «Записках» Берлинской академии за 1748 г. (1750). Даламбер же позднее указал, что сумма общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного с теми же коэффициентами есть общее решение последнего. Однако вопрос о том, какие линейные комбинации образуют общее решение, теоретически исследован был лишь позже Лагранжем и особенно математиками XIX в.

Что касается излагаемого в теперешних руководствах метода вариации постоянных, то его применил к неоднородному линейному уравнению n-го порядка с переменными коэффициентами Лагранж в «Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin» за 1775 г. (1777). Впрочем, сам метод вариации неоднократно употребляли и ранее. Эйлер им пользовался по крайней мере с 1739 г. и в «Физическом исследовании причины морских приливов и отливов» (Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris, 1741) приложил его к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ky = X.$$

И в данном случае тем же путем, что и Эйлер, причем независимо от него, пошел, как явствует из переписки, Д. Бернулли. Метод вариации постоянных не раз встречался впоследствии в различных исследованиях Эйлера, Лагранжа, Лапласа и их преемников.

Как видим, создание конкретных приемов решения линейных уравнений было неотделимо связано с установлением общих понятий и теорем о свойствах решений этих уравнений. Вот еще один пример, заслуживающий внимания. Применяя метод интегрирующего множителя к линейному уравнению n-го порядка с переменными коэффициентами

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots = T$$

и требуя, чтобы левая часть по умножении на этот множитель z оказалась точной производной по x, Лагранж нашел, что z должен удовлетворять уравнению n-го порядка

$$Lz - \frac{d(Mz)}{dt} + \frac{d^2(Nz)}{dt^2} - \ldots = 0,$$

которое впоследствии получило название сопряженного с однородным уравнением $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots = 0$. Если множитель известен, то для определения y получается таким образом неоднородное уравнение, порядок которого на единицу ниже. Очевидно, что этот прием, изложенный в «Miscellanea Taurinensia» за 1762—1765 гг. (1766). непосредственно примыкал к способу интегрирования, предложенному Эйлером для неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Сопряженное уравнение Лагранж использовал при решении уравнения

$$Ay + B(h + kt)\frac{dy}{dt} + C(h + kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots = T,$$

где A, B, h, k — постоянные, частный случай которого при $h = 0, k = 1$ до того рассмотрел Эйлер. Любопытно, что Эйлер, видимо, не обративший внимания на работу Лагранжа, вновь получил уравнение, которое уже назвал сопряженным, в 1778 г.; при этом он более отчетливо выявил, что сопряженность линейных однородных выражений есть свойство взаимное. Впрочем, эта статья Эйлера была напечатана много спустя после его смерти (Nova Acta, (1797—1798) 1805). Интересно, что в этой работе Эйлер ввел понятие резольвенты — «разрешающего уравнения» (aequatio resolvens). Впоследствии учение о сопряженных уравнениях выросло в специальную главу общей теории линейных дифференциальных уравнений и было широко обобщено в современной теории линейных операторов. В той же работе Лагранж показал, что, зная m частных решений однородного уравнения, можно понизить на m единиц порядок неоднородного уравнения с теми же коэффициентами. Это же по-другому доказал Даламбер в послании к Лагранжу, одновременно напечатанном в «Miscellanea Taurinensia».

Наконец, упомянем, что Эйлер (Novi Commentarii. (1750—1751) 1753; «Интегральное исчисление», т. II, 1769) и за ним Лагранж (та же работа) первые приступили к изучению линейных уравнений бесконечно высокого порядка, которые получили затем применения в теории конечных разностей.

Линейные системы с постоянными коэффициентами

Эта область исследований была открыта Даламбером и Эйлером, причем снова в непосредственной связи с задачами механики. Рассматривая вопрос о колебаниях нагруженной точечными грузами нити, бесконечно мало отклоненной от вертикального положения, Даламбер в «Трактате по динамике» (Traité de dynamique, Paris, 1743) рассмотрел примеры линейных однородных систем с постоянными коэффициентами вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 x + \beta_1 y + c_1 z = T_1(t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2 x + \beta_2 y + c_2 z = T_2(t),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha_3 x + \beta_3 y + c_3 z = T_3(t).$$

Умножая эти уравнения соответственно на числовые множители m_1, m_2, m_3 и складывая произведения, он подбирал множители так, чтобы возникшее уравнение имело форму:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = ku + T(t), \quad u = m_1 x + m_2 y + m_3 z.$$

Решение последнего уравнения позволяет линейно выразить одну из величин x, y, z через две другие и $u(t)$ так, что система трех уравнений с тремя неизвестными функциями приводится к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными функциями, и т. д. Для отыскания множителей получается кубическое уравнение, уравнение же $\frac{d^2u}{dt^2} = ku + T(t)$ Даламбер сводил к однородному подстановкой $u = v \cdot w$, где v и w — новые неизвестные функции, прием, использованный ранее Эйлером (Commentarii, (1732—1733) 1738). Аналогично, указывал Даламбер, можно поступить в случае систем с большим числом неизвестных функций.

Метод числовых множителей Даламбер изложил также, применительно к линейным системам первого порядка, в уже упоминавшейся (см. стр. 384) статье в «Записках» Берлинской академии за 1748 г. (1750). Этот же метод применил к системе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_1 x + \delta_1 y = T_1(t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dx}{dt} + \beta_2 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 x + + \delta_2 y = T_2(t)$$

и другим, более общим, системам Лексель (Acta, (1777, ч. I) 1778; (1779, ч. II) 1783).

Эйлер пошел другим путем.

В работе «О распространении пульсаций через упругую среду» (De propagatione pulsuum per medium elasticum. Novi Commentarii, (1747—1748) 1750) он переносит на системы свой общий метод решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом не только строится, как говорят теперь, фундаментальная система решений, но и решается задача с начальными условиями частного вида. В обозначениях Эйлера система, к которой сведена указанная задача, имеет вид:

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2x}{dt^2} = x^{(\mathrm{I})} - 2x,$$

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2x^{(\mathrm{I})}}{dt^2} = x^{(\mathrm{II})} - 2x^{(\mathrm{I})} + x,$$

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2x^{(II)}}{dt^2} = x^{(III)} - 2x^{(II)} + x^{(I)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2x^{(\lambda-2)}}{dt^2} = x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)},$$

где n — известное постоянное, $x^{(\lambda-1)} \equiv 0$, оно включено в последнее уравнение ради симметрии. Частные решения Эйлер получает с помощью тригонометрических функций:

$$x = \alpha \cos 2npt,$$
$$x^{(I)} = \alpha^{(1)} \cos 2npt,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x^{(\lambda-2)} = \alpha^{(\lambda-2)} \cos 2npt.$$

Возникающее при определении постоянных α, $\alpha^{(1)},\dots, \alpha^{(\lambda-2)}$ алгебраическое (характеристическое) уравнение решается с помощью замены $p = \sin \varphi$. При этом возникает $\lambda - 1$ решений, позволяющих построить решение, зависящее от $\lambda - 1$ произвольных постоянных. Указывается возможность аналогичных построений при замене $\cos 2npt$ на $\sin 2npt$. Далее решается задача с начальными условиями частного вида.

Следует отметить непосредственное развитие этого эйлеровского результата в творчестве Лагранжа (Miscellanea Taurinensia, (1762—1765) 1766). При исследовании натянутой струны с распределенными вдоль нее грузиками Лагранж приходит к такой же системе и решает ее совершенно аналогичным образом, сохраняя при этом даже многие обозначения эйлеровской работы, на которую он, впрочем, не ссылается.

Метод Эйлера значительно превосходил по своей общности способ числовых множителей Даламбера, сравнительно удобный лишь в простейших случаях, когда число неизвестных функций невелико, и в дальнейшем не имевший существенного значения.

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Обратимся к результатам, полученным в решении специальных линейных уравнений с переменными коэффициентами, отдельные классы которых нам встречались уже ранее.

В работе «О дифференциальных уравнениях, допускающих интегрирование в некоторых случаях» (De aequationibus differentialibus quae certis tantum casibus integrationem admittunt. Commentarii, (1738) 1747) с особой выразительностью обнаруживается сила мысли Эйлера. Уже здесь показано, что при известном частном интеграле $v = X(x)$ полный интеграл уравнения $Pd^2 v + Q\, dv\, dx + R\, vdx^2 = 0$ дается формулой

$$v = XC\int \frac{e^{-\int \frac{Q}{P}dx}}{X^2}dx.$$

С точностью до произвольного постоянного, входящего в интеграл правой части, этот результат совпадает с формулой, которая в некоторых руководствах именуется «следствием формулы Лиувилля».

Здесь же дается метод разыскания частного интеграла для весьма общего линейного уравнения с переменными коэффициентами

$$(a + bx^n) x^2 d^2u + (c + fx^n) x\, du\, dx + (g + hx^n) u\, dx^2 = 0,$$

где a, b, c, f, g, h и n — постоянные. Большая общность этого уравнения очевидна, и его частными случаями являются несколько важных классов специальных уравнений:

1) уравнение цилиндрических функций k-го порядка, носящее иногда имя немецкого астронома и математика Бесселя:

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + (x^2 - k^2) u = 0;$$

2) уравнение Лежандра с параметром h

$$(1 - x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + hx = 0;$$

3) уравнение Чебышева

$$(1 - x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + hu = 0;$$

4) уравнение Чебышева — Эрмита

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + h = 0;$$

5) гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$(x^2 - x) \frac{d^2u}{dx^2} + [-\gamma + (1 + \alpha + \beta) x] \frac{du}{dx} + \alpha\beta u = 0.$$

Все перечисленные классы были позднее специально изучены только что названными и другими учеными. Сам Эйлер в дальнейшем встретился с уравнением цилиндрических функций в задаче о колеблющейся мембране (см. стр. 428), а один частный случай его еще ранее решил с помощью степенных рядов Д. Бернулли в связи с изучением малых колебаний однородной весомой подвешенной нити (Commentarii, (1732—1733) 1738 и (1734—1735) 1740).

Возвратимся к рассматриваемому общему уравнению. Эйлер формально представляет искомое частное решение в виде некоторого степенного ряда с неопределенными коэффициентами и находит условие обрыва ряда. Если записать решение в виде

$$u = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + \ldots,$$

где k — некоторое действительное число, то соотношение

$$h = -fk - bk(k - 1),$$

найденное здесь Эйлером, позволяет найти спектры собственных значений известных краевых задач для уравнений Лежандра, Чебышева, Чебышева — Эрмита.

В более поздних работах для решения этого уравнения Эйлер предложил другой метод, который может быть назван методом канонических преобразований («Интегральное исчисление», т. IV, 1794). В этом случае исходное уравнение записывается в виде

$$d^2y\,(1 - ax^2) - bx\,dx\,dy - cy\,dx^2 = 0,$$

где a, b, c — постоянные. Заметив, что при $c = 0$, а также при $a = b$ это уравнение всегда допускает интегрирование в квадратурах, Эйлер предлагает два варианта преобразований неизвестной функции, приводящих это уравнение к виду $d^2Y(1 - ax^2) - Bx\,dY - CYdx^2 = 0$. Отсюда и определяются классы уравнений этого вида, допускающих интегрирование в том же смысле.

Новый метод, основанный на применении интегралов, зависящих от параметров, был предложен Эйлером в работе «Построение дифференциального уравнения второго порядка...» (Constructio aequationis differentio-differentialis $Aydu^2 + (B + Cu)\,du\,dy + (D + Eu + Fu^2)\,d^2y = 0$. Novi Commentarii, (1760—1761) 1763). Идея заключалась в разыскании решений в виде определенных интегралов, у которых подынтегральная функция, или пределы интегрирования, зависит от одного или нескольких параметров[1]. Истоки этой идеи содержались в ранней работе Эйлера о модулярных уравнениях 1734—1735 гг.

Предметом изучения в работе 1763 г. явилось довольно общее линейное уравнение

$$Aydu^2 + (B + Cu)\,dudy + (D + Eu + Fu^2)\,d^2y = 0. \tag{1}$$

Решение строится в виде определенного интеграла, зависящего от параметра, обозначаемого u. Пределы интегрирования, как почти всюду у Эйлера, у знака интеграла не ставятся, их значения указываются дополнительно. В данном случае нахождение этих пределов представляет, по сути дела, основную задачу. Уравнение представляет интерес в современных вопросах математической функции, так как известное уравнение, определяющее полиномы Якоби, является его частным случаем. Несколько подробнее об этом говорится ниже.

Сначала Эйлер, желая как бы подчеркнуть общность уравнения (1), с помощью подстановки $y = e^{\int z\,du}$ сводит его к уравнению первого порядка

$$dz + \frac{(B - Cu)\,z\,du}{D + Eu + Fu^2} + z^2\,du\,\frac{A\,du}{D + Eu + Fu^2} = 0. \tag{2}$$

При этом он отмечает, что уравнение Риккати является лишь частным случаем полученного уравнения (2). Однако все дальнейшее исследование ведется для первоначального уравнения (1).

Неизвестная функция ищется в виде интеграла (повторяем — определенного)

$$y = \int P(x)\,(u + x)^n\,dx,$$

[1] Отметим, что этот же метод Эйлер применял и для некоторых уравнений в конечных разностях.

при этом относительно пределов интегрирования, которые мы обозначим через a и b, Эйлер разъясняет, что после интегрирования x должен быть заменен численными значениями, а при самом интегрировании u рассматривается как постоянное. Немного ниже подчеркивается, что эти пределы не должны зависеть от u. Определение этих «численных значений» (т. е. пределов интеграла a, b) и нахождение функции $P(x)$ и является основным содержанием работы.

Пользуясь своей формулой дифференцирования неопределенного интеграла по параметру и учитывая, что пределы интеграла не зависят от u, Эйлер после подстановки в (1) результатов дифференцирования:

$$dy = n\,du \int P(u+x)^{n-1}dx, \quad d^2y = n(n-1)\,du^2x \int P\,dx\,(u+x)^{n-2},$$

получает (мы сохраняем форму записи оригинального текста)

$$A\int P\,dx\,(u+x)^n + n(B+Cu)\int P\,dx\,(u+x)^{n-1} + \\ + n(n-1)(D+Eu+Fu^2)\int (u+x)^{n-2}P\,dx = 0. \qquad (3)$$

Только теперь становится ясным сам метод Эйлера: если бы, говорит он, в результате интегрирования в левой части (до подстановки пределов интеграла) мы получили выражение $R(x)\,(u+x)^{n-1}$ при некоторых $R(x)$ и n, то при соответствующих значениях x (т. е. при x, равных корням уравнения $R(x)=0$) результат подстановки был бы равен нулю и мы действительно получили бы решение.

Итак, предполагается, что левая часть (3) представляется в виде $R(x)\,(u+x)^{n-1}$ для некоторых $R=R(x)$ и постоянном n. Далее эта левая часть преобразуется таким образом:

$$\int P\,(u+x)^{n-2}\,[A(u+x)^2 + n(B+Cu)(u+x) + n(n-1)(D+Eu+Fu^2)]\,dx = \\ = \int P(u+x)^{n-2}\{[A+nC+n(n-1)F]\,u^2 + \\ + [2Ax+nCx+nB+n(n-1)E]\,u + [Ax^2+nBx+n(n-1)D]\}\,dx. \qquad (4)$$

В силу сделанного предположения подынтегральное выражение должно быть равно дифференциалу

$$d\,[R(x)\,(u+x)^{n-1}] = (u-x)^{n-2}\,[u\,dR + x\,dR + (n-1)\,R\,dx]. \qquad (5)$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях приводит поэтому к равенствам:

$$A + nC + n(n-1)F = 0, \qquad (6_1)$$

$$dR = (2A+nC)\,Pxdx + n\,(B+(n-1)\,E)\,Pdx, \qquad (6_2)$$

$$xdR + (n-1)\,Rdx = APx^2dx + nBPxdx + n(n-1)\,DPdx. \qquad (6_3)$$

Подстановка dR из (6_2) в (6_3) дает

$$(n-1)\,R = (A+nC)\,Px^2 - n(n-1)\,EPx + n(n-1)\,DP.$$

Замена из (6_1)

$$-(A+nC) = n(n-1)\,F$$

дает далее

$$R = nP\,(Fx^2 - Ex + D). \tag{7}$$

Из этого же равенства (7) определяется и dR: если подставить в (6_2) вместо $2A + nC$ выражение $-2n\,(n-1)\,F - nC$, то

$$dR = n\,Pdx\,[-(C + 2\,(n-1)\,F)\,x + B\,(n-1)\,E]. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует

$$\frac{dR}{R} = \frac{-(C + 2\,(n-1)\,F)\,x + B + (n-1)\,E}{Fx^2 - Ex + D}\,dx. \tag{9}$$

Для показателя n из (6_1) в свою очередь имеем:

$$n = \frac{F - C \pm \sqrt{(F-C)^2 - 4AF}}{2F}. \tag{10}$$

Поэтому (9) и (10) определяют функцию $R\,(x)$. Связь между $P\,(x)$ и $R\,(x)$ очевидна в силу соотношения (7), откуда

$$P\,dx = \frac{R\,dx}{n\,(Fx^2 - Ex + D)}. \tag{11}$$

Приведем дальнейшие построения Эйлера и его исследования некоторых частных случаев. Если записать (9) в виде

$$\frac{dR}{R} = \frac{[-(n-1)\,2xF + (n-1)\,E]\,dx - Cx\,dx + B\,dx}{Fx^2 - Ex + D},$$

то

$$\ln R = -(n-1)\ln(Fx^2 - Ex + D) - \int\frac{Cx\,dx - B\,dx}{Fx^2 - Ex + D};$$

правую часть этого равенства Эйлер представляет (без пояснений) таким образом:

$$-\left(n - 1 + \frac{G}{2F}\right)\ln[Fx^2 - Ex + D] + \left(B - \frac{CE}{2F}\right)\int\frac{dx}{Fx^2 - Ex + D},$$

Для доказательства достаточно убедиться в выполнении равенства

$$-\frac{C}{2F}\ln[Fx^2 - Ex + D] - \frac{CE}{2F}\int\frac{dx}{Fx^2 - Ex + D} = -\int\frac{Cx\,dx}{Fx^2 - Ex + D},$$

которое становится очевидным, если объединить интегралы левой и правой частей. Итак, $\ln R$ представляется в виде

$$\ln R = -\left(n - 1 + \frac{C}{2F}\right)\ln[Fx^2 - Ex + D] + \left(B - \frac{CE}{2F}\right)\int\frac{dx}{Fx^2 - Ex + D}.$$

При последнем интегрировании надлежит учесть корни трехчлена $Fx^2 - Ex + D$. При этом, замечает Эйлер, следует, конечно, предполагать, что $F \neq 0$.

Далее Эйлер полностью исследует простейший случай, когда $B - \frac{CE}{2F} = 0$, т. е. исходное уравнение задано так:

$$Ay + \frac{C}{2F}(E + 2u)\frac{dy}{du} + (D + Eu + Fu^2)\frac{d^2y}{du^2} = 0.$$

Для нужных величин получаются следующие равенства:

$$n = \frac{F - C \pm \sqrt{(F-C)^2 - 4AF}}{2F}, \qquad R = (D - Ex + Fx^2)^{-n+1-\frac{C}{2F}}, \qquad (12)$$

$$P = \frac{1}{n}(D - Ex + Fx^2)^{-n-\frac{C}{2F}} \qquad (13)$$

и, следовательно,

$$y = \int P(u+x)^n\, dx = \frac{1}{n}\int \frac{dx\,(u+x)^n}{(D - Ex + Fx^2)^{n+\frac{C}{2F}}}. \qquad (14)$$

Этот интеграл, говорит Эйлер, должен быть взят для таких пределов x, при которых количество $(u + x)^{n-1}(D - Ex + Fx^2)^{-n+1-\frac{C}{2F}}$ обращается в нуль. Следовательно, если только трехчлен $D - Ex + Fx^2$ имеет два действительных корня, определяются оба возможные пределы интегрирования, при этом необходимо, чтобы показатель $-n + 1 - \frac{C}{2F}$, который равен $\frac{F - C \pm \sqrt{(F-C)^2 - 4AF}}{2F}$, был положительным.

Сделаем теперь замечание о значении уравнения (1) в современной теории уравнений второго порядка. Пусть α и β — произвольные действительные числа (как покажет дальнейшее, единственное ограничение для них состоит в том, что они больше -1). Предположив, что коэффициенты в (1) имеют значения: $D = -1$, $E = 0$, $F = 1$, $B = \beta - \alpha$, $C = -(\alpha + \beta + 2)$ и $A = (\alpha + \beta + k + 1)k$, замечаем. что уравнение (1) будет уравнением Якоби

$$(1 - u^2)\, d^2y + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)\, u]\, du dy + [\alpha + \beta + k + 1] k y du^2 = 0. \qquad (15)$$

Если же в уравнении положить $\alpha = \beta = n$, а k заменить на $m - n$, то отсюда, в свою очередь, возникает уравнение, имеющее существенное значение в теории сферических функций:

$$(1 - u^2)\, d^2y - 2(n+1)\, u du dy + (m - n)(2n + m - n + 1)\, y du^2 = 0$$

или

$$(1 - u^2)\frac{d^2y}{du^2} - 2(n+1)\, u\frac{dy}{du} + (m(m+1) - n(n+1))\, y = 0. \qquad (16)$$

Этому уравнению удовлетворяют производные n-го порядка полиномов Лежандра порядка m $P_m^{(n)}(u)$.

Нетрудно заметить, что в рассмотренном Эйлером частном случае, когда

$$B - \frac{CE}{2F} = 0, \qquad (17)$$

из общего уравнения Якоби возникает уравнение, определяющее функции Лежандра $P_m^{(n)}(u)$ n-го порядка. Действительно, так как $E = 0$, то соотношение (17) сводится к равенству $B = 0$ или $\beta - \alpha = 0$. На этом пути возникает возможность интегрального представления решения уравнения (15) и более общего уравнения (16), когда соотношение (17) может и не иметь места.

Приближенные методы

Развитие методов приближенного анализа — одна из важных задач современной математики. Применение средств современной вычислительной техники не может не привести к известной переоценке прежних вычислительных методов и открывает новые возможности их усовершенствования. В виде примера можно указать на алгоритм непрерывных дробей. удобный для его реализации в современной вычислительной технике.

В XVIII в. создавались основы многих методов, применяемых и в настоящее время. Выше было указано, что одной из основных областей математического естествознания, требовавшей быстрейшего развития методов приближенного решения дифференциальных уравнений, явилась небесная механика. В работах Эйлера по небесной механике получает дальнейшее развитие метод бесконечных рядов. При этом наряду с разложениями по степеням приращения независимого переменного Эйлер использовал разложения по степеням малого параметра. Заметим, что применение разложения по степеням малого параметра имеется лишь в его работах по небесной механике.

Наряду с применением степенных рядов Эйлер для приближенного решения дифференциальных уравнений использовал и тригонометрические ряды. Этот метод стимулировался задачами теоретической астрономии и математической физики. К последней области относится, в частности, предложенный Эйлером метод приближенного нахождения первых корней цилиндрической функции нулевого порядка первого рода.

Весьма велика заслуга Эйлера в создании одного из самых общих методов приближенного интегрирования. Основной результат содержится в первом томе «Интегрального исчисления» (1768). Задача ставится сразу же в большой общности: для заданного уравнения $dy/dx = V$, где V — некоторая функция x и y, найти приближенно полный интеграл. Возникает вопрос: почему речь идет о полном, а не о частном интеграле? Последующее замечание Эйлера показывает, что имеется в виду, конечно, задача с начальными условиями. Действительно, то, что теперь ищется полный, а не частный интеграл, указывает Эйлер, следует понимать в том смысле, что переменная y должна принимать некоторое заданное значение $y = b$, если другая переменная x принимает определенное значение $x = a$. Эйлер отдает дань традиционной постановке задачи решения уравнения как задачи нахождения полного интеграла. Основание для такой постановки вопроса он видит в том, что начальные данные задаются в общей форме, а не в виде конкретных численных значений, как было в задачах, рассмотренных ранее.

Ставя вопрос о нахождении общего метода, дающего приближенное решение задачи с произвольными начальными условиями, Эйлер предвосхитил постановку Коши задачи с начальными данными как одной из центральных в теории дифференциальных уравнений.

Решение дается «методом ломаных». Однако вопрос трактуется при этом чисто аналитически. Не довольствуясь изложением метода ломаных, Эйлер стремится сразу же его усовершенствовать с тем, чтобы результат был ближе к истинному. Решение этой задачи имело принципиальное значение: здесь Эйлер фактически предложил второй метод, а именно тот, с помощью которого Коши впервые доказал существование решения дифференциального уравнения с аналитической правой частью. Чтобы учесть изменение правой части уравнения на малом интервале $x - a$, Эйлер поступает следующим образом: написав разложение в ряд Тейлора неизвестного решения, он показывает, как должны быть вычислены коэффициенты этого ряда, записанного в следующей своеобразной форме:

$$y = b + \frac{(x-a)\,db}{da} + \frac{(x-a)^2 d^2b}{1\cdot 2\cdot da^2} + \ldots$$

Коэффициенты вычисляются при помощи последовательного дифференцирования данного уравнения. В несколько измененной записи эйлеровские формулы выглядят так:

$$\frac{db}{da} = V,$$

$$\frac{d^2b}{da^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{d^3b}{da^3} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2V\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + V^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial y}\left[\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y}\right],$$

. . . .

Правые части этих равенств должны быть вычислены, конечно, при $x = a$, $y = b$.

Относительно самого разложения y Эйлер отмечает, что при x, близком к a, ряд сходится очень быстро и поэтому достаточно хорошо представляет $y(x)$. Этот метод он предлагает для того, чтобы точнее определить значение $y = b'$ в точке $a' = a + \omega$ и таким же образом продолжать процесс дальше, отправляясь от уже известных $x = a'$, $y' = b'$. Вполне очевидно, что Эйлер для малой окрестности начальной точки a рассматривал именно тот ряд, сходимость которого при определенных условиях была строго доказана Коши.

Во втором томе «Интегрального исчисления» (1769) Эйлер распространяет свой метод ломаных на уравнение второго порядка, которое записывается в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{dx} = V(x, y, p).$$

При этом он указывает на изменение постановки задачи с начальными условиями: помимо требования $y(a) = b$ должно быть поставлено еще условие $p\,|_{x=a} = c$. Изложение фактически содержит схему применения метода ломаных к любой системе вида:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \qquad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2).$$

Свой метод Эйлер иллюстрирует на примере уравнений первого и второго порядков, вновь затрагивая вопрос об условиях применимости метода. Рассмотрев уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{f^2 y}{x^4} = 0, \qquad f = \text{const},$$

и получив для него полный интеграл

$$y = A \sin\left(\frac{f}{x} + \alpha\right),$$

где A и α — произвольные постоянные, он отмечает: когда x изменяется от 0 до некоторой малой величины ω, угол $\frac{f}{x} + \alpha$ изменяется от бесконечно большого значения до конечного, а его синус бесконечно много раз колеблется между $+1$ и -1. В качестве вывода указывается, что когда встречаются с интервалами, где решение ведет себя подобным образом, то неудивительно, что метод, который должен дать приближенное решение, теряет силу: ведь принцип, на котором он основан, предполагает, что изменения на малых интервалах должны быть также весьма малыми; и наоборот, если подобные интервалы отсутствуют, то метод всегда можно использовать.

Метод малого параметра

Применение Эйлером разложения по степеням малого параметра мы охарактеризуем одним примером из небесной механики. Самим возникновением этот метод обязан задачам, в которых эксцентриситеты планетных орбит, наклоны плоскостей орбит к плоскости эклиптики и силы тяготения соседних планет представляют собою малые величины.

В работе «Новый метод определения движения планет» (Nova methodus motum planetarum determinandi. Acta, (1778) 1781) Эйлер, выбирая наиболее удобную систему прямоугольных координат с началом в центре Солнца, при исследовании планетарного движения приходит после упрощений к следующей системе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2(1 + x^2) = \frac{-n^2(1+x)}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2y = \frac{-n^2y}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}},$$

где x, y — декартовы координаты планеты в момент t, $n = \frac{1}{a\sqrt{a}}$ и a — среднее расстояние планеты от Солнца. В выбранной системе координат y^2 весьма мало̀ по сравнению с $1 + x^2$. Приближенное интегрирование проводится следующим образом. Сначала, учитывая малость y^2, Эйлер разлагает в ряд общий множитель правых частей уравнений

$$\frac{1}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}} = \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{(1+x)^5} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\frac{y^7}{(1+x)^7} - \ldots$$

Затем проводится разложение членов $\frac{1}{(1+x^2)}, \frac{1}{(1+x)}, \ldots$ После замены $nt = \xi$ Эйлер сохраняет в правых частях преобразованных уравнений члены до шестого порядка. Приближенное решение весьма сложной нелинейной системы уравнений Эйлер строит в виде разложений неизвестных функций x и y по степеням малого параметра, за который в данном случае берется эксцентриситет орбиты ε (в самих уравнениях системы ε отсутствует):

$$x = \varepsilon P + \varepsilon^2 Q + \varepsilon^3 R + \ldots$$

$$y = \varepsilon p + \varepsilon^2 q + \varepsilon^3 r + \ldots,$$

где P, $Q,\ldots$, p, $q,\ldots$ — неизвестные функции аргумента ξ, подлежащие определению. Определение их проводится соответственно задаваемой степени точности, т. е. максимальной степени ε, участвующей в уравнениях. Сохраняя члены лишь первого и второго порядков, Эйлер при помощи метода неопределенных коэффициентов получает линейную систему:

$$\frac{d^2P}{d\xi^2}-\frac{2dp}{d\xi}=3P,$$

$$\frac{d^2p}{d\xi^2}+\frac{2dP}{d\xi}=0,$$

$$\frac{\partial^2Q}{\partial\xi^2}-\frac{2dq}{d\xi}=3Q-3P^2+\frac{3}{2}p^2,$$

$$\frac{d^2q}{d\xi^2}+\frac{2dQ}{d\xi}=3Pp.$$

Первые два уравнения образуют простую самостоятельную систему. Аналогичные системы последовательно выписываются при учете членов до шестого порядка включительно. Не ограничиваясь этим, Эйлер дает затем алгоритмический прием для последовательного решения всех этих систем.

В ряде работ по небесной механике Эйлер для приближенного решения уравнений применяет тригонометрические ряды как для разложения правых частей уравнений, так и для отыскания приближенных решений нелинейных систем в виде неполных тригонометрических рядов. Отметим, что именно эти исследования послужили источником теоретических работ Эйлера об определении коэффициентов разложения функций в тригонометрические ряды (см. стр. 316).

Метод Лапласа (модификация метода малого параметра)

Мы не раз отмечали, что разработка методов приближенного интегрирования настоятельно диктовалась небесной механикой. В работах Лапласа это проявилось особенно отчетливо. Первый набросок своего метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, основанного на вариации произвольных постоянных, входящих в приближенные интегралы, он дал в «Мемуаре о частных решениях дифференциальных уравнений и о вековых неравенствах планет» (Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires de planètes. Mém. Ac. Paris, (1772) 1775), а несколько более полное изложение — в «Исследованиях об интегральном исчислении и системе мира» (Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Mém. Ac. Paris, (1772) 1776). Более развернутое изложение того же метода содержится в «Мемуаре о приближенном интегрировании дифференциальных уравнений» (Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par approximation. Mém. Ac. Paris, (1777) 1780).

Во второй из указанных работ метод изложен применительно к уравнению $\frac{d^2y}{dt^2}+y=\alpha y\cos 2t$, где α — весьма малое число. Идея вариации произвольных постоянных в приближенных интегралах здесь выявляется более отчетливо, чем в третьей из указанных работ. Сначала находится общий интеграл уравнения $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$, т. е. $y=p\sin t+q\cos t$. Произвольные постоянные, отмечает Лаплас, определяются через значения y и dy/dt при $t = 0$. Найденное выражение y дает решение исходного уравнения при $\alpha = 0$. Далее с помощью «естественной» подстановки $y = p\sin t + q\cos t + \alpha z$, широко используемой и в современных методах, вопрос, если пренебречь членами порядка α^2, сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = \frac{p}{2}\sin 3t - \frac{p}{2}\sin t + \frac{q}{2}\cos 3t + \frac{q}{2}\cos t.$$

Интегрируя последнее уравнение и учитывая найденное выше значение y, Лаплас получает первое приближение в виде

$$y = \left(p + \frac{\alpha}{4}qt\right)\sin t + \left(q + \frac{\alpha}{4}pt\right)\cos t - \frac{\alpha p}{16}\sin 3t - \frac{\alpha q}{16}\cos 3t. \quad (18)$$

Следующий шаг состоит в определении приближенного значения y при $t = T + t_1$, где $T = \mathrm{const}$. Исходное уравнение получает вид $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \alpha y\cos(2T + 2t_1)$. На основании предыдущего сразу же можно написать приближенное значение интеграла

$$y = \left(p_1 + \frac{\alpha}{4}q_1t_1\right)\sin(T + t_1) + \left(q_1 + \frac{\alpha}{4}p_1t_1\right)\cos(T + t_1) - \\ - \frac{\alpha^2}{16}p_1\sin(3T + 3t_1) - \frac{\alpha}{16}q_1\cos(3T + 3t_1), \quad (19)$$

где p_1 и q_1 — два новых произвольных постоянных, которые могут быть определены через значения y и dy/dt при $t_1 = 0$. Таким образом произвольные постоянные изменились. Теперь возникает задача: установить связи между p, q и p_1, q_1. Из (18) и (19) при $\alpha = 0$ сразу следуют равенства $p = p_1$, $q = q_1$. Полагая $p_1 = p + \delta p$, $q_1 = q + \delta q$, Лаплас стремится получить выражения для δp и δq через параметр α. Вычитание уравнения (18) из уравнения (19), где t_1 заменено на $t - T$, дает основное соотношение

$$\left(\delta p - \frac{\alpha}{4}Tq\right)\sin t + \left(\delta q - \frac{\alpha}{4}Tp\right)\cos t = 0.$$

В силу того, что $T = \mathrm{const}$, $\delta p = \frac{\alpha}{4}Tq$, $\delta q = \frac{\alpha}{4}Tp$. Подстановка $\frac{\alpha}{4}T = x$ и разложений

$$p_1 = p + \delta p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{x^2}{2!}\frac{d^2p}{dx^2} + \ldots,$$
$$q_1 = q + \delta q = q + x\frac{dq}{dx} + \frac{x^2}{2!}\frac{d^2q}{dx^2} + \ldots$$

приводит поэтому к равенствам $dp/dx = q$, $dq/dx = p$. При этом Лаплас пренебрегает величинами порядка α^2. Отсюда при учете соотношений для δp и δq легко определяются p_1 и q_1. Подстановка этих значений в (19) и дает выражение для y при $t = T$

$$y = fe^{\frac{\alpha}{4}T}\left(\sin T + \cos T - \frac{\alpha}{16}\sin 3T - \frac{\alpha}{16}\cos 3T\right) + \\ + f_1e^{-\frac{\alpha}{4}T}\left(\sin T - \cos T - \frac{\alpha}{16}\sin 3T + \frac{\alpha}{16}\cos 3T\right),$$

где f и f_1 — произвольные постоянные. В заключение подчеркивается, что приближенное значение найдено, пренебрегая членами порядка α^2.

В третьей работе 1777 г. Лаплас развивает свой метод для более сложных уравнений, в частности для нелинейных второго порядка. Напомнив о своей работе 1772 г., он излагает общую схему приближенного решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h^2y + T(\cos kt, \sin kt) + Y\left(\alpha,\ y,\ \sin kt,\ \cos kt,\ \frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Исходной является замена $y = z + \alpha z' + \alpha^2 z'' + \ldots$ Подстановка в уравнение приводит (в предположении разложимости функций T и Y в степенные ряды по их аргументам) к уравнениям:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2z}{dt^2} + h^2z + T = 0,\\ &\frac{d^2z'}{dt^2} + h^2z' + T' = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где, как сказано, T есть функция синуса и косинуса kt; T', кроме того, зависит от z и z' и т. д. Для приближения с точностью до членов порядка α^n имеется $n+1$ уравнений. Их можно интегрировать последовательно «обычными методами», но лучше использовать, говорит Лаплас, прием вариации произвольного постоянного. Лаплас указывает принципиальную возможность перенесения этого метода на системы вида:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} + h^2y + T + \alpha Y = 0,\\ &\frac{d^2y'}{dt^2} + h^2y' + T' + \alpha Y' = 0,\\ &\frac{d^2y''}{dt^2} + h^2y'' + T'' + \alpha Y'' = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где T, T', T'' — целые рациональные функции синусов и косинусов аргумента, пропорционального t; Y, Y', Y'',..., зависят, кроме того, от α, y, y', y'',... и их производных.

Однако более подробно Лаплас свою модификацию метода малого параметра поясняет на примере значительно более простого уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \alpha my\cos 2t = 0.$$

Приближение теперь ищется с точностью до членов второго порядка малости включительно. С этой целью используется замена $y = z + \alpha z' + \alpha^2 z''$, приводящая путем приравнивания членов при одинаковых степенях α к системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2z}{dt^2} + z = 0,\\ &\frac{d^2z'}{dt^2} + z' + mz\cos 2t = 0,\\ &\frac{d^2z''}{dt^2} + z'' + mz'\cos 2t = 0. \end{aligned}$$

Подстановка общего интеграла первого из них $z = p\sin t + q\cos t$ во второе дает уравнение

$$\frac{d^2z'}{dt^2} + z' - \frac{mp}{2}\sin t + \frac{mq}{2}\cos t + \frac{mp}{2}\sin 3t + \frac{mq}{2}\cos 3t = 0.$$

Сначала ищется частное решение неоднородного уравнения, содержащего лишь члены с $\sin t$ и $\cos t$. Молчаливо учитывая, что корни характеристического уравнения равны $\pm i$, Лаплас ищет решение для этого случая в виде $At\sin t + Bt\cos t$. Значения $A = -\frac{mq}{4}$ и $B = -\frac{mp}{4}$ находятся по методу неопределенных коэффициентов. Затем учитываются члены, содержащие $\sin 3t$ и $\cos 3t$. Таким образом для z'' возникает уравнение

$$\frac{d^2z''}{dt^2} + z'' + \left(\frac{m^2q}{8}t + \frac{m^2p}{32}\right)\sin t - \left(\frac{m^2p}{8}t - \frac{m^2q}{32}\right)\cos t - \frac{m^2q}{8}t\sin 3t -$$
$$- \frac{m^2p}{8}t\cos 3t + \frac{m^2}{32}\sin 5t + \frac{m^2q}{32}\cos 5t = 0,$$

которое решается с помощью того же приема.

Истоки теории особых решений

Первые результаты, полученные в учении об особых решениях дифференциальных уравнений, представляют значительный интерес, как и предыстория проблемы единственности решения задачи с начальными условиями. К такому новому типу решений прежде других пришел в «Методе приращений» (1715) Б. Тейлор, применив к уравнению с разделяющимися переменными

$$4x^3 - 4x^2 = (1 + z^2)^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \tag{20}$$

следующий своеобразный прием. Он привел его подстановками

$$x = \frac{1+z^2}{y^2}, \qquad 1 + z^2 = v$$

к виду

$$y^2 - 2zyy' + vy'^2 = 1 \tag{21}$$

и затем продифференцировал по z:

$$2y''(vy' - zy) = 0. \tag{22}$$

Положив $y'' = 0$, он нашел, подставив $y' = a$ в (21), обычное решение, которое получается при интегрировании (20) после разделения переменных. Но, кроме того, Тейлор положил равным нулю второй множитель в (22) и, вводя $y' = zy/v$ в (21), получил еще $y^2 = v$ и $x = 1$ «некоторое особое решение (singularis quaedam solutio) задачи». Впрочем, этим результатом Тейлор и ограничился[1]. Двадцать лет спустя тот же метод дифференцирования применил к уравнению

$$y = (x+1)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

[1] Мы привели только схему выкладок Тейлора и притом в современной символике.

Клеро (Mém. Ac. Paris, (1734) 1736), который уже отметил различие между его особым решением (уравнением параболы) и общим решением (уравнением семейства прямых). Дифференциальные уравнения рассмотренного только что вида $y = xy' + Q(y')$ были названы затем по имени Клеро. Обобщением уравнения Клеро являются уравнения вида $y = xP(y') + Q(y')$, изучавшиеся Даламбером (Mém. Ac. Berlin, (1748) 1750 и Mém. Ac. Paris, (1769) 1772), а до того Я. Германом, который, однако, особых решений не заметил (см. стр. 371 и 377).

Особенно содержательны были исследования Эйлера. Они изложены во втором томе его «Механики» (1736), в мемуаре «Рассуждение о некоторых парадоксах интегрального исчисления» (Exposition de quelques paradoxes dans le calcul intégral. Mém. Ac. Berlin, (1756) 1758) и в первом томе «Интегрального исчисления» (1768). Мы ограничимся характеристикой отдельных результатов.

Решение одной из задач динамики точки приводит в «Механике» к задаче с начальным условием $u(0) = 0$ для уравнения

$$(k^2 + 1)\,dx - k^2du = \pm\frac{\sqrt{\alpha^2x(1 + k^2) - k^2u}}{\sqrt{u}}\,du,$$

где k — известное постоянное, α — параметр, принимающий положительные значения. Поскольку

$$\frac{du}{dx} = \frac{(k^2+1)\sqrt{u}}{\pm\sqrt{\alpha^2x(1 - k^2) - k^2u} + k^2\sqrt{u}},$$

ясно, что точка (0, 0), по современному определению, особая. Характер особой точки зависит от значения параметра α. В том случае, когда $\alpha < 1$, Эйлер получает решение в виде

$$C(\pm\sqrt{\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2u} + A\sqrt{u})^{-\pi} = (\pm\sqrt{\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2u} + B\sqrt{u})^{\rho},$$

где все числа A, B, π и ρ положительны. Это позволяет Эйлеру сделать заключение, что начальное условие $u(0) = 0$ удовлетворяется при любом значении произвольного постоянного C. Установив наличие «бесконечного количества» решений, Эйлер указывает необходимое дополнительное уточнение постановки самой механической задачи для того, чтобы решение определялось однозначно. Особый интерес представляет детальное исследование Эйлером случая $\alpha = 1$, приводящего к следующим двум решениям той же задачи с начальным условием:

$$u_1 = x, \qquad u_2 = \frac{k^2 + 1}{k^2}x.$$

Эйлер отмечает, что последнее не получается из «интегрального уравнения» (термин «полный интеграл» был введен Эйлером позднее). Действительно, при $\alpha = 1$ возникает уравнение

$$\frac{(k^2 + 1)\,dx - k^2du}{\sqrt{(k^2 + 1)x - k^2u}} = \frac{\pm du}{\sqrt{u}},$$

которое приводит к полному (т. е. общему) интегралу

$$\sqrt{(k^2 + 1)x - k^2u} = \pm\sqrt{u} + C,$$

дающему при начальном условии $u(0) = 0$ лишь частное решение $u_1 = x$. Любопытно отметить, что к решению

$$u_2 = \frac{k^2+1}{k} x$$

Эйлер приходит обходным, громоздким и не строгим путем: он находит сначала решение, соответствующее значению $\alpha > 1$, а затем полагает в этом решении $\alpha = 1$. То, что функция u_2 есть решение уравнения, становится очевидным, если последнее переписать в форме

$$(k^2+1)\,dx - k^2 du = \sqrt{(k^2+1)\,x - k^2 u}\;\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Получив два решения задачи с начальным условием, Эйлер выясняет механический смысл того и другого решения. Решение u_2, как легко видеть, будет, согласно современному определению, особым. Полученный результат позволяет Эйлеру сделать некоторое обобщение и фактически дать один из способов нахождения особых решений. Предлагается рассмотреть уравнение $\frac{dt}{T(t)} = V du$, где $T(t)$ обращается в нуль при $t = 0$, V — заданная функция u. Наряду с интегралом $\int \frac{dt}{T} = \int V du$ этому уравнению удовлетворяет решение $t = 0$, которое не может быть найдено из полного интеграла.

Наличие дифференциальных уравнений, полные интегралы которых не исчерпывают всех решений этих уравнений, представлялось Эйлеру одним из парадоксов интегрального исчисления. Другим парадоксом он считал метод решения уравнений при помощи дифференцирования. Эти вопросы явились предметом работы, напечатанной в «Mémoires» Берлинской академии наук (см. стр. 400). Здесь используются задачи геометрического содержания, сводящиеся к уравнению Клеро. Эйлер находит все особые решения, однако он не выясняет их геометрический смысл и не отмечает, что они представляют огибающие однопараметрических семейств, образующих полные интегралы. Он не скрывает своего удивления, что полный интеграл не всегда оказывается «полным». Он говорит даже, что возможность подобных случаев противоречит самим принципам анализа: «если интегральное уравнение, найденное по точным правилам, не в состоянии охватить дифференциальное уравнение, то проблема допускает решения, которые совершенно не могут быть получены интегрированием, и, следовательно, приходят к несовершенному решению, что представляется, без сомнения, опрокидывающим обычные понятия интегрального исчисления»[1]. Эйлер стремится защитить анализ от упрека в несовершенстве, однако полностью сделать это ему не удается. Его попытки сводятся к стремлению разграничить частные и особые решения (по современным определениям). В понятие полного интеграла он включает лишь те решения, которые получаются именно в процессе интегрирования, т. е. при частных значениях произвольных постоянных. Ссылаясь на свою «Механику», он указывает, что там дано «надежное правило», при помощи которого можно найти решения иной природы, т. е. не получающиеся из «интегрального уравнения». Прежний результат формулируется теперь в несколько более общей форме. Пусть $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $V =$

[1] *L. Euler.* Opera omnia, series I, v. 22, p. 230.

$= V(x, y)$, $Z = Z(z)$ — заданные функции указанных аргументов, с помощью которых задано дифференциальное уравнение

$$Vdz = Z(Pdx + Qdy).$$

Если $z(x, y)$ найдено из уравнения $Z(z) = 0$, то $y = y(x)$, найденное из уравнения $z(x, y) = c$, $c = \text{const}$, очевидно, удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению и не может быть, вообще говоря, получено из полного интеграла.

Дальнейшее развитие этот вопрос получает в первом томе «Интегрального исчисления». Здесь Эйлеру удается предложить первый сравнительно общий критерий различия частных и особых интегралов. Терминология несколько уточняется. Частными интегралами здесь называются только решения, возникающие из полного интеграла, любые другие решения именуются «величинами» или «конечными уравнениями, удовлетворяющими дифференциальному уравнению». Приведем постановку и решение задачи о критерии различия между частными интегралами и «величинами» указанного вида. Пусть в дифференциальном уравнении $dy = dx/Q$ функция Q обращается в нуль при $x = a$; записав уравнение в виде $Q = dx/dy$, заключаем, что величина $x = a$ удовлетворяет предложенному дифференциальному уравнению; однако отсюда еще не следует, что она является частным интегралом. Требуется определить, когда уравнение $x = a$ будет частным интегралом предложенного дифференциального уравнения. Для этого нужно, чтобы уравнение $x = a$ было заключено в полном интеграле при некотором определенном значении постоянной интегрирования. Если мы положим, что $P(x)$ — интеграл дифференциального выражения dx/Q, то полный интеграл будет $y = P(x) + C$. Уравнение $x = a$ может удовлетворить «интегральному уравнению» лишь в том случае, если для $x = a$ выполнено равенство $P = \infty$. В этом последнем случае замечаем, что если считать постоянную C бесконечно большой, то y останется неопределенным при $x = a$. Итак, только в случае, когда величина P при $x = a$ становится бесконечной, уравнение, выражающее y, можно считать частным интегралом; мы имеем, следовательно, искомый критерий: только в том случае, когда при $x = a$ функция Q обращается в нуль, а функция P — в бесконечность, величина $x = a$ будет частным интегралом. Все рассуждение проведено, конечно, в стиле математики XVIII в. Основным является, как мы видим, учет Эйлером того, что «при подстановке $x = a$ количество y остается неопределенным» [1].

Таким образом, вопрос полностью решается поведением, по современной терминологии, несобственного интеграла; при его расходимости интегральная кривая $x = a$ принадлежит общему интегралу, при сходимости — не принадлежит. Результат имеет очевидную связь с вопросом о единственности интегральной кривой, проходящей через произвольную точку (a, y_0) прямой $x = a$. Действительно, если $x = a$ не принадлежит полному интегралу, то через эту точку можно провести соответствующее частное решение. Поэтому не случайно критерий Эйлера совпадает с известным необходимым и достаточным условием единственности интегральной линии уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q(x)}$, проходящей через точку (a, y_0), если $Q(x)$ непрерывна при $x \neq a$ в окрестности $x = a$ и обращается в бесконеч-

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. I, стр. 306.

ность в самой точке $x = a$. Подчеркнем, однако, что в самом тексте вопрос о единственности решения Эйлером в явной форме не затрагивается.

Эти результаты Эйлера были направлены к разрешению «парадоксов» интегрального исчисления, о которых говорилось выше. Но Эйлеру, как он сам указывал, не удалось полностью разрешить эти парадоксы. Его внимание было направлено фактически на одну сторону вопроса: на разграничение частных и особых интегралов, — и ему не удалось найти истинную связь между полными и особыми интегралами.

«Частные интегралы» и «частные решения» у Лапласа

Немного позже теория особых решений получила некоторое продвижение в уже упомянутом «Мемуаре о частных решениях дифференциальных уравнений и о вековых неравенствах планет» Лапласа (см. стр. 396). Отметив, что впервые проблема успешно изучалась Эйлером, Лаплас указывает недостаток его результатов: изучались лишь конечные решения вида $y = X(x)$ для дифференциальных уравнений первого порядка. Сам Лаплас предлагает «метод, свободный от этих ограничений».

Интересно уже уточнение терминологии: решением дифференциального уравнения любого порядка Лаплас называет всякое конечное или дифференциальное выражение, которое удовлетворяет данному дифференциальному уравнению; частным интегралом он называет всякое решение, которое заключено в общем или полном интеграле, и, наконец, частным решением — всякое решение дифференциального уравнения, не заключающееся в общем (полном) интеграле.

Первая проблема такова: определить, будет ли данное решение уравнения $dy = p(x, y)\,dx$ заключено в общем интеграле, если этот интеграл неизвестен. Идея всей работы заключается в использовании самого дифференциального уравнения. Все построения проводятся в классе решений,

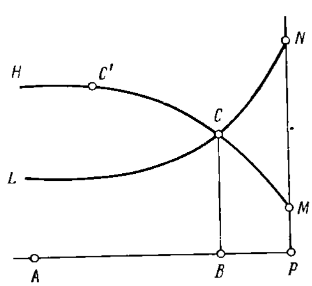

Рис. 30

раскладывающихся в степенные ряды. Допустим, что общий интеграл представлен уравнением $\varphi = 0$, а исследуемое решение дифференциального уравнения есть $\mu(x, y) = 0$. Рассуждения Лапласа интересны с точки зрения проблемы единственности интегральных кривых, проходящих через данную точку. Построим, говорит Лаплас, соответствующие уравнениям $\mu = 0$, $\varphi = 0$ кривые HCM, LCN (рис. 30), причем значение произвольного постоянного в общем интеграле определено так, что кривая LCN, принадлежащая общему интегралу $\varphi = 0$, проходит через точку C кривой HCM. Если уравнение $\mu = 0$ содержится в уравнении $\varphi = 0$, то кривые LCM и HCM должны совпадать во всех их точках; если этого нет, то уравнение $\mu = 0$ есть частное решение.

Прежде чем рассмотреть дальнейшие аналитические рассуждения Лапласа, отметим, что геометрическая сторона вопроса ускользнула от его внимания. Действительно, даже в том случае, когда кривая HCM не принадлежит семейству $\varphi = 0$, она должна иметь в точке C общую касательную с LCN. Это обстоятельство не учтено на чертеже Лапласа. Отметим также, что точку C Лаплас неявно предполагает обыкновенной по современной терминологии, т. е. предполагается, что значение произвольного постоянного однозначно определяется заданием начальной точки.

Обозначая $AB = x$, $BP = \alpha$, $CB = y$, $PM = y'$, $PN = Y'$, $\delta y/\delta x$ — производную для функции, определяющей кривую HCM, и dy/dx — производную для кривой LCN, Лаплас пишет разложения этих функций в окрестности точки C:

$$y' = y + \alpha\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} + \ldots,$$

$$Y' = y + \alpha\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$$

Для совпадения кривых необходимо, чтобы $y' = Y'$ при любом α, а это возможно только при выполнении в точке C равенств $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ и т. д. Но так как C — любая точка, то эти равенства должны выполняться для любой точки C'. В заключение Лаплас замечает, что выполнение этих равенств можно проверить, не зная общего интеграла. Действительно значения $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$, ..., которые обозначены соответственно ν, ν', ..., вычисляются по уравнению $\mu = 0$. Значения же $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$, обозначаемые p, p', ..., вычисляются путем дифференцирования самого уравнения $\frac{dy}{dx} = p(x, y)$. Таким образом, предыдущие условия в дальнейшем записываются так: $\nu - p = 0$, $\nu' - p' = 0$ и т. д. Уравнение $\nu - p = 0$ выполнено всегда в силу предположения, что $\mu = 0$ удовлетворяет уравнению. Выполнение же остальных уравнений зависит от того, будет ли $\mu = 0$ частным решением или нет.

Применяя свой метод к уравнению $\frac{dy}{dx} = y^n q(x)$, допускающему при $n > 0$ решение $y = 0$, Лаплас приходит к выводу, что при $n \geqslant 1$ уравнение будет частным интегралом, при $0 < n < 1$ — частным решением. Этот результат был найден Эйлером с помощью определения сходимости соответствующего несобственного интеграла (см. стр. 402). Ту же идею Лаплас развивал для уравнений $d^2y = pdx^2$, где $p = p(x, y, y')$ и для частных видов уравнений высших порядков.

Теория особых решений Лагранжа

Следующий шаг был сделан Лагранжем. Применение излюбленной идеи — вариации произвольных постоянных — позволило ему найти правильный подход к разрешению «парадоксов» интегрального исчисления.

Основные результаты Лагранжа в этой области были опубликованы в статье «О частных интегралах дифференциальных уравнений» (Sur les intégrales particulières des équations différentielles. Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1774) 1776). Изложение начинается с краткого обзора результатов предшественников. Отмечая результаты Клеро, Эйлера, Лапласа и некоторых других ученых, Лагранж приходит к выводу, что до сих пор не найден метод нахождения решений, не получающихся из полного интеграла при частных значениях произвольной постоянной. Обзор показывает, что не установилась даже сама терминология. Действительно, характеризуя исследования Эйлера, Лагранж использует его терминологию и говорит о «конечных уравнениях, удовлетворяющих дифференциальному уравнению», а описывая результаты Лапласа, он пользуется на той же странице термином «частное решение, не получающееся из полного интеграла»[1].

С полным основанием в заключение обзора Лагранж писал, что предлагает новую теорию. Постановка основного вопроса такова: будем изучать частные интегралы, которые теряются при обычном методе интегрирования. Для пояснения прежде всего используется один из примеров Эйлера, именно: дифференциальное уравнение $xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$, имеющее полный интеграл $x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$, где a — произвольное постоянное, а также решение $x^2 + y^2 - b^2 = 0$, которое есть окружность и, следовательно, не содержится в полном интеграле, представляющем семейство парабол.

Вслед за этим вопрос рассматривается в общей форме, что в исследованиях Эйлера отсутствует: пусть дано дифференциальное уравнение и $V(x, y, a) = 0$ — его полный интеграл. Сначала выясняется, каким образом от полного интеграла можно вернуться к данному дифференциальному уравнению. Решение достигается, как известно, путем дифференцирования полным образом по x равенства $V = 0$ и исключения параметра a из результата этого дифференцирования $\frac{dy}{dx} = p(x, y, a)$ и уравнения $V = 0$. Для пояснения используется тот же пример Эйлера.

Основная новая идея крайне проста: нельзя ли тем же путем прийти от полного интеграла к исходному уравнению при переменном a? Естественным образом возникает вопрос об условиях, которым для этого должна удовлетворять a как функция x. Соответствующие рассуждения Лагранжа вошли во все учебники по дифференциальным уравнениям. В случае переменного a, говорит он, вместо равенства $\frac{dy}{dx} = p(x, y, a)$ мы имели бы $dy = pdx + qdx$ и, чтобы оно сводилось к предыдущему, должно выполняться равенство $q = 0$. Но из выражения dy следует, что $q = \partial y/\partial a$ (у Лагранжа для частных производных специальных обозначений нет). Итак, вопрос решен: функции $a = a(x)$ определяются из уравнений $q = q(x, y, a) = 0$, $q = \partial y/\partial a$; y определяется, как неявная функция, выражением полного интеграла $V(x, y, a) = 0$.

К уравнению вида $y = xP(y') + Q(y')$, которое неоднократно уже нам встречалось и без основания иногда еще называется «уравнением Лагранжа», применяется и метод дифференцирования самого уравнения.

Для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений оказалось весьма существенным выяснение геометрической стороны вопроса

[1] Впоследствии благодаря «Лекциям об исчислении функций» (1801) Лагранжа укоренился термин «особое решение», которое Лагранж называл «особое первообразное уравнение» — équation primitive singulière. Впервые такое выражение, как говорилось, употребил еще Б. Тейлор (стр. 399).

о частных решениях указанного вида. Этому Лагранж посвятил специальный раздел статьи. Прежде всего он замечает, что кривая, которая касается всех кривых, определяемых полным интегралом, удовлетворяет дифференциальному уравнению. Заключение является прямым следствием геометрического смысла уравнения: уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ определяет положение касательной к кривой (интегральной — по современной терминологии) в точке (x, y).

Впрочем, рассуждения Лагранжа об уравнении, определяющем кривую, касающуюся кривых интегрального семейства, не строги. Рассматривая две «бесконечно близкие точки» этой кривой с ординатами y и $y + \frac{\partial y}{\partial a} da$, отвечающие значениям параметра a и $a + da$, Лагранж заключает, что в силу одинаковости ординат $\partial y / \partial a = 0$. Таким образом, исключение a из уравнений $V = 0$ и $\partial y / \partial a = 0$ приводит к кривой, касающейся всех кривых, выражаемых уравнением $V(x, y, a) = 0$. В заключение этого раздела Лагранж упоминает и об огибающей применительно к семействам прямых на плоскости.

Интересны выводы Лагранжа, в которых, по-видимому, впервые отчетливо затрагивается в сравнительной общей форме вопрос о неединственности интегральных кривых, проходящих через данную точку. Лагранж пишет: «таким образом, в каждой точке этой кривой (которая касается кривых, определяемых полным интегралом. — *Ред.*) имеются две ветви, которые встречаются в этой точке и которые имеют общую касательную; одна из них есть сама эта кривая и другая та, которой она касается»[1]. Напомним, что по современной терминологии любая точка огибающей является существенно особой точкой, так как в ней нарушается единственность. Более строго, отметим, что Лагранж не прав, говоря лишь о двух кривых, проходящих через точки «касающейся кривой». Действительно, через такую точку проходит бесконечно много интегральных кривых, которые различны между собой на любом, как угодно малом интервале, окружающем точку.

Отмечая далее, что значение d^2y/dx^2 для этих двух кривых должно быть различным, Лагранж указывает: это со своей стороны дает способ для нахождения таких кривых. Идея вариации произвольного постоянного в вопросе об особых решениях оказалась, таким образом, весьма плодотворной.

Лагранж распространил свой метод также на уравнения второго порядка, а затем и на уравнения с частными производными первого порядка. В «Лекциях об исчислении функций» он дал систематическое изложение теории особых решений на уровне, какого она достигла, в значительной мере благодаря его собственным работам, к началу XIX в.

Краевые задачи

Первая постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, относящихся к середине XVIII в., была обусловлена, с одной стороны, вариационным исчислением, с другой — задачами математической физики. Предвосхищая дальнейшее, более подробное изложение (см. десятую главу), укажем постановку основной вариационной

[1] *J. L. Lagrange.* Oeuvres, v. IV, p. 38.

задачи, данную Эйлером в его «Методе нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума» (1744): среди всех (достаточно гладких) кривых $y = y(x)$, соединяющих две заданные точки плоскости (a, A), (b, B), найти такую, вдоль которой интеграл $\int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx$ имеет наименьшее или наибольшее значение. Уравнение Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ при $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Требование прохождения допустимых кривых через заданные точки означает, что искомое решение должно удовлетворять краевым условиям: $y(a) = A$, $y(b) = B$. Наличие двух произвольных постоянных в общем интеграле этого уравнения позволяло выделить нужное частное решение без особых трудностей. Таким образом, эта краевая задача не потребовала новых методов.

Более существенное влияние оказала классическая проблема колебаний струны, закрепленной на концах. Первые решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, полученные почти одновременно Даламбером (1747) и Эйлером (1748), были даны сначала для частных случаев, когда в начальный момент $t = 0$ либо равно нулю отклонение струны от положения равновесия (Даламбер), либо равен нулю начальный импульс. Эта и другие задачи математической физики, которые будут рассмотрены в девятой главе, в ряде случаев приводились к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым удавалось свести соответствующие уравнения с частными производными. Даламбер, Эйлер, Лагранж и другие математики рассматриваемого времени решили таким образом несколько важных проблем математической физики. Упомянем, что, применяя уже известный ему прием разделения переменных, Эйлер в статье, напечатанной в «Miscellanea Taurinensia» (1762—1765) 1766), приходит к простейшему случаю классической краевой задачи для однородного дифференциального уравнения второго порядка с однородными краевыми условиями. Полагая $y = T(t)\,X(x)$, Эйлер получает уравнение $X''(x) - \lambda X = 0$, для которого нужно найти решение $X = X(x)$, удовлетворяющее краевым условиям: $X(0) = 0$, $X(a) = 0$; при этом λ — некоторое, пока неопределенное постоянное, возникающее в процессе разделения переменных. Учитывая необходимость удовлетворить и начальным условиям, Эйлер должен найти нетривиальное решение возникшей краевой задачи. Исследуя все возможности в отношении знака λ, Эйлер приходит к выводу, содержащемуся в любом современном учебнике: решения краевой задачи даются функциями $X_k = \sin \frac{k\pi}{a} x$, отвечающими значениям параметра $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{a^2}$.

Краевая задача для несколько более сложного уравнения и иных краевых условий возникает в работе Эйлера, помещенной в «Acta», (1781 : I) 1784. Здесь интересен особый прием разделения переменных. Уравнение задачи таково:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2gx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2g \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Однако принципиальный шаг в более общем изучении краевых задач был сделан в 30-е годы XIX в. в замечательных исследованиях Штурма и Лиувилля.

Дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений

К концу XVIII в. учение об обыкновенных дифференциальных уравнениях сформировалось в самостоятельную науку, имеющую весьма широкую сферу приложений. Достигнутые в это время в основных направлениях результаты оказали большое воздействие на прогресс этой ветви анализа в XIX в., когда с большей силой проявилось влияние самой логики развития теории, а также влияние на нее алгебры и реформы оснований анализа.

Для развития проблемы интегрирования в конечном виде принципиальное значение имело установление невозможности такого интегрирования в общем случае, а не расширение классов уравнений, допускающих подобное решение. В этой области фундаментальные результаты были получены Лиувиллем, а затем С. Ли, выяснившим теоретико-групповой аспект этой проблемы.

На протяжении всего XIX в. совершенствовались методы решения линейных уравнений и их систем. Здесь решающее влияние оказали успехи алгебры. Выяснение аналогий между линейными алгебраическими и линейными дифференциальными уравнениями явилось исходным пунктом символических методов, начиная с Бриссона и Коши. Создание Вейерштрассом теории элементарных делителей позволило ему вместе с Жорданом построить общую теорию линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами.

Необходимость разработки методов численного решения дифференциальных уравнений диктовалась, как и раньше, всей практикой математического естествознания. Однако совершенствование этих методов происходило в тесной связи с формированием и развитием нового большого направления — обширным комплексом проблем существования и единственности решения задач с начальными условиями, а также решения краевых задач.

Новое весьма важное направление добавилось в последние два десятилетия XIX в. Мы имеем в виду качественную теорию дифференциальных уравнений, созданную, прежде всего, А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым. Блестящие успехи этого важного раздела теории были подготовлены всем предшествующим периодом теории. И в наши дни качественная теория представляет одно из центральных направлений современной теории дифференциальных уравнений.