ДЕВЯТАЯ ГЛАВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Первые геометрические задачи

Дифференциальным уравнением с частными производными называется соотношение вида

$$F(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0,$$

где F — функция переменных $x, y, \ldots u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ Величины $x, y, \ldots$ в этом уравнении являются независимыми переменными, u есть искомая функция переменных $x, y, \ldots$;

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \; u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$$

Уравнение с частными производными может содержать и более одной неизвестной функции.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений с частными производными является нахождение и исследование решений этих уравнений. Вообще ищется вся совокупность решений того или иного уравнения. Однако многие физические задачи требуют изучения лишь тех решений соответствующих им дифференциальных уравнений, которые удовлетворяют некоторым добавочным условиям, носящим название краевых и начальных условий.

Дифференциальные уравнения с частными производными различаются по порядку, аналогично обыкновенным уравнениям.

Дифференциальное уравнение $F = 0$ называется линейным, если функция F линейна по переменным $u, u_x\ u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ и коэффициенты зависят только от независимых переменных $x, y, \ldots$

Если функция F линейна по производным наивысшего порядка (например, n-го) с коэффициентами, зависящими от $x, y, \ldots,$ а также, может быть, от u и ее производных до n — 1-го порядка, то дифференциальное уравнение $F = 0$ называется квазилинейным. Таково, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0.$$

Зарождение и развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных было связано с расширением в XVIII в. круга приложений математического анализа, с теми задачами естествознания, в частности, механики, физики, некоторых разделов самой математики, в которых появилась необходимость в функциях многих переменных. Это были прежде всего задачи небесной механики, гидродинамики, физики упругих тел, плоской и пространственной геометрии, технической практики.

С первыми подходами к уравнениям в частных производных мы встречаемся в уже упоминавшейся (стр. 342) работе Эйлера «О бесчисленных кривых одного рода...» и «Дополнении» к ней (Commentarii, (1734—1735) 1740).

По геометрическому содержанию эти статьи принадлежали к работам об изогональных траекториях, т. е. кривых, пересекающих все кривые данного однопараметрического семейства под данным углом. Эйлер рассмотрел несколько более общую задачу о нахождении семейства кривых по данному соотношению с данным однопараметрическим семейством. Аналитически вопрос сводился к следующей задаче. Исходя из уравнения

$$\frac{\partial z(x, a)}{\partial x} = P(x, a),$$

которое пишется самим Эйлером в виде $z = \int P dx$ с оговоркой, что P зависит от x и a, причем a при интегрировании рассматривается как постоянная величина, требуется определить полный дифференциал

$$dz = P(x, a)\, dx + Q(x, a)\, da, \qquad (1)$$

содержащий a уже как переменную величину (параметр). Иначе говоря, зная частную производную $\frac{\partial z(x, a)}{\partial x} = P(x, a)$, требуется найти вторую частную производную

$$\frac{\partial z(x, a)}{\partial a} = Q(x, a).$$

Полученное при этом дифференциальное равенство (1) Эйлер называет модулярным уравнением, т. е. уравнением, содержащим модуль a, — вместо слова «параметр» он здесь употребляет слово «модуль», предложенное Я. Германом (Acta Eruditorum, 1717—1719). Полученное «модулярное уравнение» должно задавать однопараметрическое семейство кривых на плоскости. Следовательно, из него в конце концов, в конкретных случаях, надо уметь находить величину z — ординату кривой как функцию x и параметра a, другими словами, в конкретных случаях надо уметь проинтегрировать равенство (1). Именно для решения этой основной задачи Л. Эйлер доказывал в начале статей теорему о независимости частных производных от порядка дифференцирования и выводил условие полного дифференциала (ср. стр. 342).

Воспользовавшись признаком полного дифференциала

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

Эйлер находит, что

$$Q = \int \frac{\partial P}{\partial a}\, dx \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial a} = \int \frac{\partial P}{\partial a}\, dx. \qquad (2)$$

Если вспомнить, что $z = \int P(x, a)\, dx$, то формула (2) имеет и самостоятельное значение, как формула дифференцирования интеграла по параметру. Вывод этой формулы Эйлер позднее включил в первый том своего «Интегрального исчисления» (1768).

Беря в качестве $P(x, a)$ различные конкретные функции, Эйлер показывает, какой вид имеет функция $Q(x, a)$. Затем в «Добавлении к исследованию...» он показывает, как в конкретных случаях можно проинтегрировать равенство (1). Посмотрим, как он это делает в самом первом его случае.

В качестве функции $P(x, a)$ Эйлер берет однородную функцию степени -1. Тогда искомая функция $z(x, a)$ должна быть однородной функцией нулевой степени и, следовательно, по свойству такой функции должно выполняться равенство

$$P(x, a)\,x + Q(x, a)\,a = 0,$$

т. е.

$$Q = -\frac{Px}{a}. \tag{3}$$

Здесь Эйлер, между прочим, применил известную теперь под его именем теорему об однородных функциях. В силу (3)

$$dz = Pdx - \frac{Px}{a}\,da \quad \text{или} \quad dz = P\left(dx - \frac{xda}{a}\right).$$

Далее Эйлер замечает, что выражение $dx - \frac{xda}{a}$ становится интегрируемым, если его умножить на $1/a$, так как

$$\frac{1}{a}\left(dx - \frac{xda}{a}\right) = d\left(\frac{x}{a} + c\right),$$

где c — произвольная постоянная величина. Поэтому, говорит Эйлер, если в качестве функции $P(x, a)$ взять любую функцию вида $\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$, то выражение $dz = P\left(dx - \frac{xda}{a}\right)$ будет интегрируемым. Действительно, тогда можно написать (чего сам Эйлер не делает):

$$z = \int f\left(\frac{x}{a} + c\right) d\left(\frac{x}{a} + c\right). \tag{4}$$

Конечно, $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ здесь молчаливо предполагается интегрируемой.

Далее в своей статье Эйлер в качестве функции $P(x, a)$ берет еще более сложные функции, в частности однородные любой степени.

В рассмотренных геометрических статьях Л. Эйлера даны первые примеры интегрирования уравнений в частных производных. Однако здесь уравнения в частных производных еще не были выделены как особый объект исследования, обладающий своими специфическими свойствами, хотя решение и оказалось зависящим от произвольной функции.

Вскоре после появления этих работ Эйлера к решению уравнений в частных производных было сведено еще несколько задач, первой из которых была задача о колебании струны. В процессе решения этой знаменитой задачи уже стали проявляться характерные особенности теории уравнений в частных производных. В дальнейшем в связи с решением других конкретных вопросов механики, физики, геометрии наметились и основные направления развития теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Начиная с 1740 г., на протяжении около трех десятилетий в области уравнений в частных производных накопилось уже столько результатов, что можно было подвести и некоторые итоги. Огромное число этих результатов было получено Л. Эйлером. И первый систематический обзор формирующейся теории дифференциальных уравнений в частных производных был сделан им же в третьем томе его «Интегрального исчисления» (1770).

Наряду с Л. Эйлером теорию дифференциальных уравнений в частных производных в указанный период интенсивно разрабатывали Ж. Даламбер и Д. Бернулли. В последней трети XVIII в. новые идеи в области теории уравнений в частных производных были даны в трудах следующего поколения математиков — Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа и Г. Монжа.

Задача о колебаниях струны. Волновое уравнение

Проблему колебаний струны, одну из простейших задач о широко распространенных в природе колебательных процессах, без изучения которых не могут обойтись физика и техника, исследовали многие ученые — Г. Галилей, М. Мерсенн, Р. Декарт, X. Гюйгенс и другие. Но лишь в XVIII в. эту задачу удалось выразить в терминах исчисления бесконечно малых. Это, как мы увидим, имело далеко идущие последствия для развития всего анализа: интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, тригонометрических рядов, самого понятия функции и т. д.

В 1713—1715 гг. Б. Тейлор, пользуясь терминологией и понятиями механики и геометрии, вывел уравнение малых поперечных колебаний бесконечно тонкой однородной струны, имеющей длину l, закрепленной на концах, выведенной из положения равновесия и затем предоставленной самой себе. Но только около 1747 г. Даламбер выразил механико-геометрическую формулировку Тейлора линейным уравнением в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{5}$$

где x и y — соответственно абсцисса и ордината точки струны, отнесенной к прямоугольным осям; t — время; a — постоянная величина, выражающаяся через плотность струны и ее натяжение.

Уравнение (5) мы записали в современной форме. Сам Даламбер обозначал частные производные буквами: $\frac{\partial y}{\partial t}$ — буквой p, $\frac{\partial y}{\partial x}$ —буквой q и т. д.

Позднее уравнение (5), по характеру его решения, было названо волновым уравнением или, после появления в XIX в. классификации уравнений в частных производных, уравнением гиперболического типа.

Уже сам Б. Тейлор, а затем, в 1729 и 1732 гг., И. Бернулли пытались дать решение уравнения колеблющейся струны. Они пришли к выводу, что струна в любой момент времени должна принимать форму синусоиды с зависящей от времени амплитудой. Из рассуждений Тейлора вытекало существование бесчисленного множества синусоидальных форм струны. Однако он ошибочно полагал, что любое движение звучащей струны стремится перейти в найденное им основное колебание, даже при произвольном начальном движении.

Решение Даламбера

Общее решение уравнения (5) при $a = 1$, граничных условиях:

$$y(0, t) = 0, \qquad y(l, t) = 0 \tag{6}$$

и начальных условиях

$$y(x, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) \tag{7}$$

первым получил Даламбер методом, опирающимся на понятие полного дифференциала. Свое открытие он изложил в двух статьях: «Исследования о кривой, образуемой натянутой струной, приведенной в колебательное движение» и «Продолжение исследований о кривой...» (Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. Suite des recherches sur la courbe que forme une corde... Mém. Ac. Berlin, (1747) 1749).

При $a = 1$ уравнение (5) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right). \tag{5'}$$

Даламбер находит дифференциалы функций $\frac{\partial y}{\partial t}$ и $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\,dt,$$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\,dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dt$$

и замечает, что получаются равенства:

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\right)(dx + dt),$$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\right)(dx - dt).$$

Эти равенства показывают, что выражения $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t}$ являются произвольными функциями Φ и Ψ аргументов $x + t$ и $x - t$ соответственно, т. е.

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = \Phi(x + t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t} = \Psi(x - t).$$

Но тогда

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\right)(dx + dt) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial t}\right)(dx - dt) =$$

$$= \frac{1}{2}\Phi(x + t)\,d(x + t) + \frac{1}{2}\Psi(x - t)\,d(x - t).$$

Отсюда интегрирование дает

$$y = \varphi(x + t) + \varphi(x - t), \tag{8}$$

где под φ и ψ можно понимать произвольные функции — неопределенные интегралы от вышеуказанных выражений.

Полученное выражение (8) Даламбер назвал общим решением уравнения колебаний струны, по-видимому, желая подчеркнуть, что в нем содержится фактически бесчисленное множество решений. Это выражение можно назвать общим решением и в современном смысле, так как оно является решением уравнения в частных производных второго порядка, содержащим две произвольные функции.

Используя граничные условия (6), Даламбер получает затем:

$$\varphi(t) + \psi(-t) = 0, \quad \varphi(l + t) + \psi(l - t) = 0,$$

откуда следует, что функции φ и ψ выражаются одна через другую и обладают периодом, равным $2l$:

$$\psi(z) = -\varphi(-z) \quad \text{и} \quad \varphi(z + 2l) = \varphi(z).$$

Таким образом, решение, удовлетворяющее граничным условиям, должно иметь вид

$$y = \varphi(t + x) - \varphi(t - x).$$

Чтобы удовлетворялись еще начальные условия (7), должны выполняться равенства:

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = f(x), \tag{9}$$
$$\varphi'(x) - \varphi'(-x) = g(x).$$

Последнее из них, проинтегрировав, можно заменить следующим:

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \int g(x)\, dx, \tag{10}$$

где $0 \leqslant x \leqslant l$.

Из равенств (9) и (10) функция $\varphi(x)$ определяется через заданные функции $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $-l \leqslant x \leqslant l$, но тогда, в силу периодичности, она становится определенной на всей числовой прямой.

Таким образом, при конкретных граничных и начальных условиях решение задачи о струне становится вполне определенным.

Исследование Даламбера прежде всего ясно показало, что в решения уравнений в частных производных могут входить произвольные функции в отличие от решений обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих произвольные постоянные величины. Однако сразу же следует заметить, что сам Даламбер сильно ограничивал произвольность этих функций, требуя, чтобы они задавались единым аналитическим выражением во всей области определения, т. е. были непрерывны в смысле Эйлера (см. стр. 251). Практически Даламбер имел в виду функции, разлагающиеся в степенные ряды, за исключением отдельных точек, т. е. за исключением отдельных точек, — аналитические функции по современной терминологии.

Добавим, что во второй из рассматриваемых статей Даламбер предложил искать решение в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одного из двух аргументов. Если положить

$$y = f(t)\, g(x),$$

то для определения $f(t)$ и $g(x)$ получаются два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Таким образом, к Даламберу восходит прием решения волнового уравнения с помощью разделения переменных. Однако французский математик не развил этот метод с достаточной полнотой, как это сделал уже в начале XIX в. Ж. Б. Фурье.

Решение Эйлера

Уже через год после появления первых работ Даламбера о струне Эйлер опубликовал статью «О колебании струны» (Sur la vibration des cordes. Mém. Ac. Berlin, (1748) 1750), существенно углубившую анализ проблемы, о чем будет сказано далее.

В только что названной статье Эйлер сначала выводит уравнение (5) колебания струны. Затем он формулирует требование отыскания общего решения этого уравнения при произвольно заданной фигуре струны. О начальной скорости струны прямо не говорится, но из дальнейших выкладок вытекает, что она считается равной нулю. При этих условиях Эйлер нашел решение, которое, по его собственному признанию, по форме существенно не отличается от решения Даламбера. Эйлер решил уравнение (5) при любом постоянном a, и потому его решение имеет вид

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \tag{11}$$

где φ и ψ — функции, определяемые из граничных и начальных условий задачи так же, как это сделано у Даламбера.

Заметим, кстати, что рассмотренное Эйлером уравнение (5) легко приводится к уравнению (5′) Даламбера (т. е. к случаю $a = 1$) заменой $at = t'$ и опусканием штриха у t' после преобразований. Следовательно, этой же заменой связаны и решения Эйлера и Даламбера.

В 1766 г. Эйлер предложил новый метод решения уравнения колебания струны, вошедший затем в третий том его «Интегрального исчисления» (1770), а позднее — во все учебники по дифференциальным уравнениям. Вводя новые координаты: $u = x + at$, $v = x - at$,— он преобразовал уравнение (5) колебания струны к легко интегрируемому виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

По современной терминологии координаты u и v Эйлера называются характеристическими. В этих координатах от вторых производных функции остается только смешанная производная.

Эйлер первый понял, что уравнение колебания струны отражает процесс распространения волн. Волной при этом называют процесс передвижения отклонения какой-либо точки струны по струне.

В «Разъяснении о движении колеблющихся струн» (Éclaircissement sur le mouvement des cordes vibrantes. Miscellanea Taurinensia, t. III, (1762—1765) 1766) Эйлер рассматривает струну, отклоненную в начальный момент на некотором участке, и указывает время, в течение которого точка струны вне этого участка остается в покое. В решении (11) Эйлера слагаемое $\psi(x - at)$ означает волну, движущуюся со скоростью a в положительную сторону оси абсцисс, слагаемое $\varphi(x + at)$ — волну, движущуюся с той же скоростью в противоположную сторону оси. Общее движение струны получается геометрическим построением путем наложения указанных двух волн.

Эйлер завершил разработку метода Даламбера, который позднее стал называться также методом характеристик.

Начало спора об интеграле волнового уравнения

Появление первой статьи Эйлера по рассматриваемой проблеме «О колебании струн» послужило началом продолжительной дискуссии между Эйлером и Даламбером, а затем и между другими математиками XVIII в. о природе функций, входящих в решение дифференциального уравнения струны и уравнений с частными производными, а затем о природе понятия функций вообще, о выразимости функций средствами анализа и о других важных математических вопросах.

Хотя решение Эйлера (11) несущественно отличалось от решения Даламбера (8) по форме, Эйлер не был согласен с Даламбером в понимании физической сути этого решения, в оценке степени произвола допускаемых при решении функций.

В силу того что начальная форма струны может быть любой связной кривой, начерченной, по выражению Эйлера, «свободным влечением руки», Эйлер сначала считал возможным определить начальное положение струны «разрывной» или «смешанной» функцией, задаваемой не одним аналитическим выражением, а несколькими, отвечающими различным дугам струны (т. е. функцией кусочно-аналитической). Позднее для изображения начальной формы струны Эйлер допускал и вообще неаналитические, по нашей терминологии, функции. Следствием произвольности начальной формы струны являлась такая же произвольность функций, входящих в решение задачи. Поэтому свое решение задачи о колебании струны Эйлер не без основания считал более общим, нежели решение Даламбера.

Даламбер не соглашался с Эйлером. Нельзя, говорил он, решить задачу при любой начальной форме струны. Решение должно быть, во-первых, дважды дифференцируемым, для чего начальная фигура струны должна быть гладкой. Гладкости требует и физическая сила упругости: в угловых точках она не может быть конечной. Следовательно, произвольные функции в решении должны быть аналитическими. Во-вторых, решение является периодическим. Следовательно, и начальная форма струны должна быть периодической.

Эйлер и Даламбер опубликовали еще ряд статей о колебании струны, однако мы не найдем в них убедительных ответов на поднятые вопросы.

Вопрос о возможности применения негладких функций (с разрывными производными) в теории волнового уравнения прояснился лишь в наши дни благодаря работам С. Л. Соболева, который ввел понятие «предельных решений» этого уравнения. Предельное решение может иметь разрывные производные или даже совсем не иметь производных в обычном смысле.

Д. Бернулли и решение в форме тригонометрического ряда

В спор между Эйлером и Даламбером вскоре вмешался третий знаменитый участник — Даниил Бернулли, выступивший в «Записках» Берлинской академии со статьями «Размышления и разъяснения о новых колебаниях струн, изложенных в «Записках» Академии за 1747 и 1748 годы» и «О сочетании различного рода простых изохронных колебаний, которые могут сосуществовать в одной и той же системе тел» (Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l Académie de 1747 et 1748; Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps. Mém. Ac. Berlin, (1753) 1755). В этих статьях высказаны новые принципиально важные общие положения о колебательных процессах и дана идея нового приема решения задачи о струне, ставшего впоследствии весьма мощным методом решения дифференциальных уравнений.

Общее решение уравнения колебания струны Д. Бернулли представил в виде тригонометрического ряда с неопределенными коэффициентами

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{l} + \ldots, \tag{12}$$

где l — длина струны; коэффициенты α, β, γ, ... считаются функциями времени.

Д. Бернулли исходил при этом из физических соображений, именно из того факта, что звук, издаваемый струной, состоит из главного тона и бесчисленного множества более слабых обертонов. Но каждому тону струны, как показывало еще исследование Б. Тейлора, соответствует форма струны в виде синусоиды, записываемой уравнением

$$y = A(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где n — натуральное число, t — время. Следовательно, заключил Д. Бернулли, фигура колеблющейся струны должна образовываться сочетанием таких синусоид. В переводе на язык современной математики это означало, что общее решение волнового уравнения можно представить в виде ряда, членами которого являются частные решения. Этот «принцип наложения колебаний» Бернулли в дальнейшем оказался исключительно плодотворным и лег в основу метода разделения переменных (обратим внимание на то, что в тригонометрическом ряде члены являются произведениями сомножителей, каждый из которых зависит только от одной переменной — либо от t, либо от x).

Д. Бернулли был убежден, что тригонометрическим рядом можно изобразить любую связную кривую и соответствующую ей функцию. Для этого, говорил он, нужно лишь соответствующим образом подобрать коэффициенты α, β, γ, ... ряда. Но ему не удалось найти общий закон получения этих коэффициентов.

Д. Бернулли правильно утверждал, что тригонометрический ряд является не менее общим, чем степенной ряд

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots,$$

широко применявшийся до него для представления функций. Однако он даже не попытался строго обосновать свое утверждение. Его уверенность в универсальности такого рода разложений основывалась лишь на физических соображениях.

На протяжении почти всей своей творческой жизни Д. Бернулли занимался исследованием колебаний различных механических систем. Он рассмотрел ряд конкретных задач о линейных колебаниях систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы. При этом он дал определение простых синхронных колебаний и высказал убеждение о возможности получить любое колебание сложением простых синхронных колебаний. Корни принципа наложения колебаний он усматривал в самой природе. Его высказывания о форме колеблющейся струны вытекали из этого его общего принципа.

Возражения Эйлера и Даламбера

Д. Бернулли неоднократно указывал на большую общность его метода исследования колебаний струны по сравнению с методом Даламбера — Эйлера. Однако ни Даламбер, ни Эйлер не признали общности его решения задачи, хотя не отрицали самого принципа наложения. Первое же исследование Д. Бернулли о струне вызвало ряд их возражений. Суть этих возражений сводилась к тому, что тригонометрическим рядом можно представить лишь весьма ограниченный класс функций.

Хотя сам Эйлер в конце статьи «О колебании струн» также дал решение частного случая задачи в виде тригонометрического ряда, он полагал, что тригонометрический ряд (12) не годится для представления даже произвольной алгебраической функции, так как такая функция непериодична и не обязательно нечетная, в то время как ряд (12) является периодической и нечетной функцией. Вообще тригонометрический ряд, задающий определяемую им функцию на всей числовой прямой, не пригоден был, по мнению Эйлера, для изображения произвольной функции. Эйлер считал, что метод Д. Бернулли не дает решения задачи о струне, если, например, начальное возмущение имеет место лишь на части струны. В основе этих возражений Эйлера лежало его ошибочное мнение, что два аналитических выражения не могут совпадать на одном каком-либо участке и различаться на другом.

Даламбер вновь подчеркивал, что полученная в результате решения форма струны должна быть гладкой, иметь непрерывную кривизну. Другими словами, решение должно иметь непрерывные производные первых двух порядков. Для опровержения общности метода Д. Бернулли он давал пример начального отклонения струны в виде треугольника. О дальнейшем развитии теории тригонометрических рядов в XVIII в. уже говорилось ранее (см. стр. 315).

Лагранж и Арбогаст

После Д. Бернулли в конце 50-х годов XVIII в. в обсуждение задачи о колебании струны включился Ж. Л. Лагранж, начинавший тогда свою научную деятельность (Miscellanea Taurinensia, 1759). Лагранж решил задачу о колебании струны для некоторой интерполяционной кривой, аппроксимирующей заданную кривую. Решение Лагранжа подводило к тригонометрическим рядам и к открытию формул для коэффициентов этих рядов. Оставалось совершить предельный переход от конечного к бесконечному. Но Лагранж пришел в конце концов к результатам Эйлера.

Лагранж поддержал Эйлера в вопросе введения в математический анализ произвольных, «разрывных» или «смешанных» функций и в связи с изучением движений воздуха в трубах постоянного сечения. Оказалось, что эти движения при малых продольных отклонениях частиц воздуха от положения равновесия также описываются уравнением (5). Лагранж заметил в 1761 г., что при изучении таких движений необходимо пользоваться кривой, течение которой в некоторой точке внезапно сменяется на прямолинейное, т. е. необходимо пользоваться «смешанной», по терминологии Эйлера, кривой, а значит и соответствующей ей неаналитической функцией.

В обсуждении вопросов, поднятых решением проблемы о колебании струны, затем участвовали и другие математики того времени. Но все эти вопросы, как уже говорилось, не получили полного освещения в XVIII в.

В 1787 г. Петербургской академией наук был объявлен конкурс на тему о природе произвольных функций, входящих в решения уравнений с частными производными. Премия была присуждена профессору Страсбургского университета Луи Франсуа Арбогасту. Его «Мемуар о природе произвольных функций, входящих в интегралы уравнений в частных дифференциалах» (Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles) был издан в Петербурге в 1791 г. Арбогаст в целом поддержал позицию Эйлера, выступил против чрезмерных ограничений, на которых настаивал и Даламбер и, в ослабленной форме, Лаплас.

Задачи гидромеханики; уравнение Лапласа

После того как были достигнуты успехи в изучении полного дифференциала функций и решении задачи о колебании струны, математики приступили к изучению других физических и математических вопросов, выражающихся уравнениями с частными производными.

Практические потребности «морской науки» и машиностроения, а также нужды небесной механики побуждали ученых XVIII в. интенсивно разрабатывать механику жидкости и газа.

Уже в «Опыте новой теории сопротивления жидкостей» (Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides. Paris, 1752) Даламбер, в связи с изучением обтекания твердого тела однородной невесомой жидкостью, решил задачу отыскания двух функций p и q по их полным дифференциалам:

$$dq = Mdx + Ndz, \qquad dp = Ndx - Mdz.$$

Даламбер рассматривал плоскопараллельное движение жидкости, в котором функции p и q являются компонентами вектора скорости частицы жидкости в точке (x, z) координатной плоскости.

Сравнивая полные дифференциалы dq и dp, Даламбер приходит к следующей системе уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{13}$$

Он проинтегрировал полученную систему, прибегнув к функциям комплексного аргумента. В своих прежних исследованиях он часто пользовался комплексными переменными величинами и был знаком со многими их свойствами.

Так как уравнения системы (13) говорят о том, что $qdx + pdz$ и $pdx - qdz$ являются полными дифференциалами некоторых функций, то Даламбер сделал вывод, что полными дифференциалами будут и следующие выражения:

$$qdx + pdz + \sqrt{-1}\,(pdx - qdz) = (q + \sqrt{-1}\,p)\cdot\left(dx + \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right),$$

$$qdx + pdz - \sqrt{-1}\,(pdx - qdz) = (q - \sqrt{-1}\,p)\cdot\left(dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right).$$

Отсюда, в точности, как при решении волнового уравнения, распространяя соответствующий вывод относительно функций действительного аргумента на функции комплексного аргумента, Даламбер заключил, что $q+\sqrt{-1}\,p$ является некоторой функцией от $x+\frac{z}{\sqrt{-1}}$, а $q-\sqrt{-1}\,p$ — функцией от $x-\frac{z}{\sqrt{-1}}$. Полагая

$$q+\sqrt{-1}\,p=2\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right), \tag{14}$$

Даламбер нашел, что тогда

$$q-\sqrt{-1}\,p=2\xi\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)-2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right). \tag{15}$$

При этом он воспользовался тем свойством функций комплексного аргумента, полученных расширением действительных функций (это свойство не было сформулировано еще тогда в общем виде), что при $f(x+\sqrt{-1}z)=$ $=q+\sqrt{-1}\,p$ имеем $f(x-\sqrt{-1}\,z)=q-\sqrt{-1}\,p$. Из равенств (14) и (15) Даламбер получил, наконец:

$$q=\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+\xi\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)-$$
$$-\sqrt{-1}\,\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right),$$

$$p=\frac{\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}}-\frac{\xi\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}}+\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right).$$

Иначе говоря, Даламбер представил искомые функции q и p — компоненты скорости частицы жидкости — в виде действительной и мнимой частей функции

$$2\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)$$

комплексного аргумента. Метод Даламбера в дальнейшем вошел в учебники по гидромеханике.

Позднее, в 1761 г. в первом томе своих «Математических сочинений» (Opuscules mathématiques) Даламбер заметил, что функции q и p, удовлетворяющие системе (13), удовлетворяют также уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{16}$$

и что это уравнение имеет связь с функциями комплексной переменной. В том же году Эйлер, как мы увидим далее, получил аналогичное уравнение для трехмерного пространства.

Система уравнений Даламбера (13) по мере развития теории функций комплексной переменной стала иметь исключительно важное значение как одно из условий аналитичности таких функций (см. стр. 365). Уже Эйлер существенно использовал систему (13) в своих исследованиях по гидромеханике, о которых мы еще будем говорить, а также в работах по картографии и вычислению интегралов. Роль этой системы в теории функций комплексной переменной особенно стала ясна в XIX в. после работ Коши и Римана. Поэтому система (13) впоследствии стала называться уравнениями Коши — Римана, хотя первые ее применения, как мы видим, принадлежат Даламберу и Эйлеру.

Точно так же уравнение (16) и подобное ему уравнение для трехмерного пространства, получившие позднее имя Лапласа, стали играть важную роль в различных областях математики и физики — теории потенциала, теории функций комплексной переменной и др.

Решения уравнения (16), обладающие непрерывными частными производными первого и второго порядков, позднее были названы гармоническими функциями, а две гармонические функции, удовлетворяющие системе (13), были названы сопряженными. Употребляя эту терминологию, можно сказать, что при рассмотрении системы (13) Даламбер впервые выразил сопряженные гармонические функции q и p в виде действительной и мнимой частей некоторой функции комплексного аргумента.

Гидромеханические исследования Эйлера

Вслед за Даламбером важные результаты в гидромеханике, а одновременно и в области уравнений с частными производными были получены Эйлером.

В «Общих принципах движения жидкостей» (Principes généraux du mouvement des fluides, Mém. Ac. Berlin, (1755) 1757) Эйлер положил начало гидродинамике как теоретической науке. Здесь он впервые вывел основные уравнения гидродинамики для жидкости, лишенной вязкости. Эти уравнения характеризуют в любой момент времени t скорость движения и давление жидкости в произвольной точке (x, y, z) пространства, заполненного жидкостью. Если обозначить в указанной точке компоненты вектора скорости через u, v, w, давление — через p, плотность — через ρ, проекции внешних сил, отнесенные к единице массы жидкости,— через X, Y, Z, то полученные Эйлером уравнения можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial (\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial (\rho w)}{\partial z}=0.
\end{aligned}\tag{17}$$

Последнее уравнение в этой системе носит название уравнения неразрывности жидкости. Для случая несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{18}$$

Нелинейная система основных уравнений гидродинамики (17) не принадлежит ни к одному из трех типов, известных в современной теории дифференциальных уравнений. Ее интегрирование в общем виде затруднительно и в наше время; она интегрируется в различных частных случаях движения жидкости и газа. Заметим, что система Эйлера (17) в одном из этих частных случаев сводится к уже рассмотренному нами волновому уравнению (5). В этом случае она описывает возникающее в результате малых возмущений параллельное оси x баротропное движение сжимаемой жидкости или газа, зависящее лишь от координаты x и времени t.

Естественно, что и Эйлер начал интегрирование системы (17) с частных случаев.

В названной основополагающей работе 1755 г. Эйлер рассмотрел, в частности, говоря современным языком, плоское потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости. При таком движении компонента w скорости обращается в нуль и плотность ρ жидкости постоянна. Как и Даламбер в упомянутой выше гидродинамической задаче, Эйлер считает, что выражения $udy - vdx$ и $udx + vdy$ являются полными дифференциалами некоторых функций (это и означает, что рассматривается потенциальное движение). Для нахождения компонент скорости u и v Эйлер применяет изложенный выше метод Даламбера перехода к функции комплексного аргумента. При этом, чтобы явно представить компоненты u и v в виде действительных функций, Эйлер прибегнул еще к разложению функции комплексного аргумента, записанного в тригонометрической форме, в степенной ряд, расположенный по однородным гармоническим многочленам.

Таким образом, в рассматриваемом труде Эйлер также пришел к системе Даламбера (13). Уравнение (16) при этом появлялось у Эйлера как уравнение неразрывности (18) при $w = 0$.

В другой гидродинамической работе Эйлера «Принципы движения жидкостей» (Principia motus fluidorum. Novi Commentarii, (1756—1757) 1761) вводится функция $s(x, y, z, t)$, частные производные которой по x, y, z равны компонентам u, v, w скорости частицы жидкости:

$$u = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial s}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Тогда уравнение (18) превращается в уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0. \tag{19}$$

Здесь впервые в истории математики появилось так называемое уравнение Лапласа для случая трехмерного пространства.

Эйлер наметил и некоторые подходы к интегрированию уравнения (19). В той же работе «Принципы движения жидкостей» функцию $s(x, y, z, t)$, удовлетворяющую уравнению (19), Эйлер ищет в виде линейной комбинации (по-видимому, конечной, как показывают рассмотренные им частные случаи) однородных полиномов степени n вида

$$(Ax + By + Cz)^n,$$

в которых коэффициенты, предполагаемые функциями времени, следует соответствующим образом определить.

Подставляя каждый такой полином в отдельности вместо s в уравнение (19), Эйлер получает условие

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0, \tag{20}$$

которому при $n > 1$ должны удовлетворять коэффициенты полинома, для того чтобы полином был решением уравнения (19). При $n = 0$ и $n = 1$ коэффициенты могут быть любыми. Образуя функцию $s(x, y, z, t)$ в виде линейной комбинации некоторого числа полиномов различных степеней, Эйлер выписывает соответствующее число условий вида (20) для их коэффициентов.

Здесь интересно, что решение уравнения (19), как мы бы сказали, Эйлер ищет в виде линейной комбинации частных решений этого уравнения.

Одну из своих работ по гидродинамике, опубликованную в 1769 г., Эйлер посвятил интегрированию общего уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \qquad (21)$$

При дополнительных предположениях о характере искомых функций ρ, u, v, w, зависящих от переменных x, y, z, t, Эйлер получил из уравнения (21) ряд более простых дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, общие интегралы которых ему удалось усмотреть методом сведения этих уравнений к уравнениям в полных дифференциалах.

Сначала делается предположение, что искомые функции в уравнении (21) зависят только от x. Тогда оно сводится к уравнению

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dP(x)}{dx} = 0, \quad \text{где} \quad P(x) = \rho(x) u(x).$$

Следовательно, общим интегралом уравнения (21) в этом случае будет $P(x) = \text{const}$.

Предполагая далее, что искомые функции в (21) зависят только от x и y, Эйлер приходит к уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \qquad \left(\text{или } \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

где

$$P(x, y) = \rho(x, y) u(x, y), \qquad Q(x, y) = \rho(x, y) v(x, y).$$

Равенство $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$ показывает, что выражение $-Qdx + Pdy$ является полным дифференциалом некоторой функции, и Эйлер заключает, что если $\Delta(x)$, $\Gamma(y)$, $R(x, y)$ — произвольные функции своих аргументов и если положить

$$dR(x, y) = K(x, y)\,dx + L(x, y)\,dy \quad \left(\text{тогда } \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial y}\right),$$

то искомые функции P и Q можно определить равенствами:

$$P(x, y) = L(x, y) + \Gamma(y), \qquad Q(x, y) = -K(x, y) + \Delta(x),$$

так как при этом выполняется уравнение $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$.

Аналогичным образом Эйлер интегрирует уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

получающееся из (21) в предположении, что искомые функции не зависят от времени t. Здесь $P(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, u(x, y, z)$,

$$Q(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, v(x, y, z), \quad R(x, y, z) = \rho(x, y, z)\, w(x, y, z).$$

Предположение, что компоненты вектора скорости u, v, w находятся в постоянных отношениях между собой:

$$u = \alpha\omega, \quad v = \beta\omega, \quad w = \gamma\omega,$$

где α, β, γ — заданные постоянные, ω — неизвестная функция от x, y, z, t, привело Эйлера к простейшему линейному уравнению с одной неизвестной функцией

$$\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x} + \beta\frac{\partial\omega}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22) Эйлер также приводит к уравнению в полных дифференциалах следующим образом. В выражение

$$\alpha\, d\omega = \alpha\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz\right)$$

Эйлер подставляет значение $\alpha\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$, найденное из уравнения (22). и получает равенство

$$\alpha d\omega = (\alpha dy - \beta dx)\frac{\partial\omega}{\partial y} + (\alpha dz - \gamma dx)\frac{\partial\omega}{\partial z}.$$

Это равенство показывает, что искомая функция $\omega(x, y, z, t)$ должна быть следующего вида:

$$\omega(x, y, z, t) = f\left[\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right), \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)\right] + \Gamma(t),$$

где f и Γ — произвольные функции. Наконец, Эйлер предполагает, что компоненты вектора скорости имеют вид:

$$u = T(\alpha y - \beta z), \quad v = T(\gamma z - \alpha x), \quad w = T(\beta x - \gamma y),$$

где T — неизвестная функция, а α, β, γ — заданные постоянные. Тогда уравнение (21) сводится к линейному уравнению с переменными коэффициентами и одной неизвестной функцией T:

$$(\alpha y - \beta z)\frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma z - \alpha x)\frac{\partial T}{\partial y} + (\beta x - \gamma y)\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Последнее уравнение показывает, что его левая часть может получиться лишь в результате дифференцирования функции следующего вида:

$$T = T\left[(\alpha y - \beta z)^2 + (\gamma z - \alpha x)^2 + (\beta x - \gamma y)^2\right],$$

которая, следовательно, и является общим решением уравнения.

Сложные задачи гидродинамики были в XVIII в. одним из важнейших источников уравнений в частных производных, в частности уравнений первого порядка, которые удавалось проинтегрировать сведéнием к уравнениям в полных дифференциалах. Пути такого сведéния были в каждой частной задаче свои.

Уравнения первого порядка

В 60-х годах XVIII в. стали появляться первые исследования Эйлера и Даламбера, специально посвященные интегрированию уравнений в частных производных. Первой была работа Л. Эйлера «Нахождение функций по данному дифференциальному условию» (Investigatio functionum ex data differentialium conditione. Novi Commentarii, (1762—1763) 1764). В 1768 г. в четвертом томе «Математических сочинений» Даламбера появилась такого же характера статья «Исследования по интегральному исчислению» (Recherches sur le calcul intégral), в которой были изложены результаты, полученные автором еще в 1762 г.

В названных работах Эйлера и Даламбера интегрируются простейшие уравнения в частных производных первого порядка. При этом Эйлер отмечает, что к общей задаче нахождения функции $V = V(x, y)$ по заданному соотношению между x, y, V, $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$ приводят проблемы колебания струны и движения жидкости. Он ссылается также на рассмотренные выше его исследования по «модулярным» уравнениям.

Интегрируя отдельные уравнения в частных производных первого порядка, Эйлер и Даламбер устанавливают их связь с уравнениями в полных дифференциалах и используют методы интегрирования последних. Выше уже приводились примеры таких интегрирований. Рассмотрим еще один характерный пример.

Линейное уравнение первого порядка[1]

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} p(x, y) + t(x, y), \tag{23}$$

в котором функции $p(x, y)$ и $t(x, y)$ считаются известными, Эйлер интегрирует следующим образом. Поскольку

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy,$$

то в силу (23)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} (dx + pdy) + tdy.$$

Затем подбирается интегрирующий множитель для выражения $dx + pdy$, т. е. такая функция $q(x, y)$, что

$$q(dx + pdy) = ds(x, y), \tag{24}$$

где $s(x, y)$ — некоторая функция от x, y. При этом

$$dV = \frac{1}{q} \frac{\partial V}{\partial x} ds + tdy. \tag{25}$$

Найденная из уравнения (24) функция $s(x, y)$ берется за новую переменную; через нее и y выражается переменная x. Тогда в правой части равенства (25) коэффициенты можно считать функциями от s и y и рассматривать это равенство как уравнение в полных дифференциалах относительно s и y. Далее функция V определяется по ее полному дифференциалу. Излагая идею Эйлера, мы незначительно лишь изменим его записи.

---

[1] Такого названия у самого Эйлера еще нет. Вообще Эйлер не дает какой-либо классификации уравнений в частных производных.

Согласно условию полного дифференциала, должно иметь место равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{\partial t}{\partial s},$$

откуда

$$\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}=\int\frac{\partial t}{\partial s}\,dy=\frac{\partial}{\partial s}\int t\,dy.$$

Полагая

$$\int t\,dy=T(y,s)+f(s),$$

где $f(s)$ — произвольная функция от s, Эйлер находит, что

$$\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial T(y,s)}{\partial s}+f'(s).$$

Но $\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial s}$ согласно равенству (25). Поэтому

$$V=\int\frac{\partial V}{\partial s}\,ds=\int\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial x}\,ds=\int\left[\frac{\partial T(y,s)}{\partial s}+f'(s)\right]ds,$$

откуда Эйлер получает, что

$$V=T(y,s)+f(s)$$

есть общий интеграл уравнения (25). Если подставить здесь вместо s его выражение через x и y, то получится общий интеграл уравнения (23).

Аналогично Эйлер интегрирует и некоторые простейшие нелинейные уравнения:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=a^2,\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=\varphi\left(x,\frac{V}{x}\right),\qquad V=\varphi\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

Даламбер в «Исследованиях по интегральному исчислению» (1768) также проинтегрировал ряд различных простейших дифференциальных уравнений с частными производными.

У Даламбера имеется уже, хотя и неясно высказанная, классификация уравнений с частными производными первого и высшего порядков на линейные и нелинейные, с постоянными или же с переменными коэффициентами.

Прежде всего Даламбер рассматривает линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Интересно, что к одному из них

$$\frac{\partial z}{\partial x}+A\frac{\partial z}{\partial y}+Cz=0$$

Даламбер применил метод известной также Эйлеру подстановки $z=e^{\omega}$, которая преобразовала уравнение в более простое:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+A\frac{\partial\omega}{\partial y}+C=0.$$

Последнее уравнение решается затем так же, как это делает в рассмотренных выше примерах Эйлер. К уравнению присоединяется равенство

$$d\omega=\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy,$$

которое в силу предыдущего уравнения превращается в равенство

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial y}(dy - Adx) - Cdx.$$

Из последнего делается вывод, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \varphi(y - Ax),$$

тогда из уравнения следует, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -C - A\varphi(y - Ax).$$

Зная $\partial\omega/\partial x$ и $\partial\omega/\partial y$, Даламбер находит ω, а затем z.

Решение неоднородного, по современной терминологии, уравнения первого порядка, линейного относительно $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ и z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + \psi(x, y)z + \chi(x, y) = 0,$$

Даламбер поставил в зависимость от решения более простого однородного уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + \psi(x, y)z = 0.$$

Его исследование в указанном направлении близко подводило к общему методу, данному несколько лет спустя Лагранжем.

Новые задачи математической физики

Мы рассмотрели содержание первых специальных работ по уравнениям с частными производными. Наряду с такими исследованиями продолжали выходить статьи, посвященные решению отдельных физических задач. Назовем важнейшие из них.

В 1759 г. Эйлер представил Берлинской академии наук три большие работы: «О распространении звука», «Дополнение к исследованиям о распространении звука» и «Продолжение исследований о распространении звука» (De la propagation du son; Supplément aux recherches sur la propagation du son; Continuation des recherches sur la propagation du son. Mém. Ac. Berlin, (1759) 1766). Некоторые результаты этих и других исследований о колебаниях в упругой среде Эйлер изложил также в письме к Лагранжу от 1 января 1760 г. (Miscellanea Taurinensia, 1760—1761). Из основных уравнений гидродинамики Эйлер вывел общие дифференциальные уравнения для смещений p, q, r частиц воздуха при звуковых колебаниях. Он получил волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right), \tag{26}$$

где a — постоянная, и аналогичные уравнения для q и r. Проинтегрировать волновое уравнение (26) для трехмерного пространства в общем виде ему не удалось. Найти общее решение Эйлеру удалось лишь для случая сферических волн, когда движение направлено от некоторого фиксированного центра (источника звука) и скорости в точках, равноудаленных от центра, одинаковы. Тот же результат был получен Лагранжем в 1760 г.

Эйлер рассмотрел и более сложную задачу о движении воздуха в трубе постоянного сечения (плоские звуковые волны). Для соответствующего волнового уравнения он искал частные решения. Общее решение линейного волнового уравнения для трехмерного пространства было дано лишь в XIX в. Риманом с помощью так называемой функции Римана.

Вскоре Эйлер опубликовал статьи «О движении струн переменной толщины» и «Об интегрировании уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{c}{x^2}z$» (Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses; Recherches sur l'intégration de l'équation... Miscellanea Taurinensia, 1762—1765), в которых выводится и исследуется как уравнение, указанное в заголовке второй статьи, так и уравнение колебания струны переменной толщины:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = p^2(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{27}$$

где $p(x)$ — известная функция.

О методах Эйлера решения волнового уравнения в частных случаях мы скажем несколько далее.

В упомянутом письме к Лагранжу от 1 января 1760 г. Эйлер говорил, в частности, о задаче о колеблющейся мембране, решение которой изложил в статье «О колебании мембран» (De motu vibratorio tympanorum. Novi Commentarii, (1764) 1766). Он свел задачу к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{28}$$

которое называется теперь уравнением цилиндрических волн.

Эйлер нашел полную систему частных, т. е. собственных, колебаний уравнения (28) как для прямоугольной, так и для круглой мембраны. При решении последней задачи он ввел впервые цилиндрические функции с произвольным целым индексом. Частный случай цилиндрических функций — функции нулевого индекса открыл еще Д. Бернулли в 1732 г.

В случае круглой мембраны Эйлер преобразовал уравнение (28) к полярным координатам r и φ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}, \tag{29}$$

и допустил, что решение имеет вид

$$z(r, \varphi, t) = u(r)\sin\alpha t\cdot\sin\beta\varphi,$$

где α и β — некоторые постоянные величины. Для определения функции $u(r)$ Эйлер, применив еще одно преобразование, получил уравнение типа Риккати, решить которое в элементарных функциях удается лишь в некоторых случаях. Поэтому Эйлер прибегнул к разложениям в ряды. Таким образом он нашел ряд

$$u(r) = r^{\beta}\left\{1 - \frac{1}{1(\beta+1)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^6 + \ldots\right\},$$

который с точностью до числового множителя совпадает с так называемой бесселевой функцией $J_{\beta}(\alpha r)$ целого индекса β.

Третий том «Интегрального исчисления» Эйлера

Большинство изложенных выше результатов вошло в первую монографию, посвященную уравнениям с частными производными. Такого рода монографией явился основной отдел третьего тома «Интегрального исчисления» (1770) Эйлера. Этот отдел, занимающий более двух третей тома, озаглавлен «Метод определения функций двух и многих переменных из данного дифференциального соотношения любого порядка». Подавляющая часть содержания принадлежит здесь лично Эйлеру и показывает, какую огромную роль сыграл Эйлер в развитии рассматриваемой дисциплины.

«Метод определения функций...» делится на две части, в первой из которых рассмотрена проблема отыскания функций двух независимых переменных, а во второй — проблема отыскания функций трех или более независимых переменных. В трех разделах первой части рассматриваются соответственно уравнения первого, второго и третьего и более высоких порядков. Здесь, как и во второй части, исследуются отдельные уравнения, о системах не говорится.

Некоторые важные открытия Эйлера в этой области, полученные в связи с решением задач механики, в «Интегральное исчисление» не вошли. Это относится, например, к решению задачи о колебании мембраны. Эйлер включил в свою книгу в основном только те уравнения, решение которых он мог получить в явном виде при помощи произвольных функций.

В части «Интегрального исчисления», посвященной отысканию функций двух независимых переменных, изложено, в частности, содержание его статьи «Определение функций из данного дифференциального соотношения», о которой мы говорили выше. Здесь приводится решение рассмотренного нами выше линейного уравнения первого порядка (23) и указанных выше нелинейных уравнений первого порядка. Здесь же Эйлер дает общие решения многочисленных нелинейных уравнений первого порядка. При этом ряд нелинейных уравнений сводится к линейным при помощи преобразования

$$d(z - px - qy) = -xdp - ydq \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

которое впоследствии стало несправедливо называться «преобразованием Лежандра». Эйлер пользуется также несимметричным преобразованием

$$d(z - qy) = pdx - ydq.$$

При решении уравнений в частных производных первого порядка Эйлер фактически пользуется теми линиями интегральной поверхности, которые в настоящее время называются характеристиками, но геометрическую картину решения он, очевидно, себе не представлял,— эту сторону дела раскрыл, главным образом, Монж. Эйлер подчеркивает, что произвольная функция, входящая всегда в выражение общего решения, может быть «разрывной» в его смысле слова.

Так как интегрирование уравнений с частными производными первого порядка Эйлер сводит к интегрированию соответствующих уравнений в полных дифференциалах, то в первой главе первого раздела первой части третьего тома «Интегрального исчисления» Эйлер рассматривает уравнение

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

являющееся обобщением уравнения

$$Mdx + Ndy = 0,$$

и говорит об условиях его интегрируемости.

Эйлер считал, что если условия интегрируемости не выполняются, то указанное дифференциальное уравнение теряет смысл — становится «нереальным». Мы видели (см. т. II, стр. 247), что Ньютон, рассматривая простейший пример такого уравнения, правильно указал, что в этом случае можно дополнительно ввести произвольную зависимость между двумя переменными, входящими в уравнение, и тогда уравнение преобразуется к интегрируемой форме. Во второй главе того же раздела интегрируются уравнения вида:

$$p = \varphi(x, y, z), \quad q = \psi(x, y, z),$$

где $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$. В третьей главе рассматриваются уравнения типа $\varphi(p, q) = 0$ и, как частный случай,— линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\alpha p + \beta q = \gamma.$$

В четвертой главе интегрируются уравнения вида:

$$\varphi(x, p, q) = 0, \quad \varphi(y, p, q) = 0.$$

В пятой главе указаны способы построения общего интеграла для уравнений вида $\varphi(x, y, p, q) = 0$, в частности линейного уравнения (23), и «уравнения с разделенными переменными»

$$P(x, p) = Q(y, q).$$

В шестой главе рассматриваются отдельные типы уравнений:

$$Z(z) = pX(x) + qY(y), \qquad q = T(x, y) + V(x, z),$$
$$z = M(x, y)p + N(x, y)q, \qquad Z(z) = pP(x, y) + qQ(x, y).$$

В конце этой же главы метод интегрирования линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами распространяется на случай трех независимых переменных. Однако Эйлер ставит задачу отыскания решений, зависящих только от двух переменных.

Во втором и третьем разделах первой части, как уже сказано, изложена теория дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков для функций двух переменных. Здесь прежде всего дается теория преобразования уравнений к другим независимым переменным. При этом Эйлер пользуется функциональным определителем этого преобразования, который позднее назвали именем К. Г. Якоби (XIX в.). Эйлер рассматривает также вопрос о преобразовании уравнения при заменах зависимой переменной z через новую переменную v, а именно $z = vp$, $z = v + p$, где $p = p(x, y)$ — заданная функция.

Следует подчеркнуть, что основное внимание во всей монографии Эйлер уделяет уравнениям в частных производных второго порядка, преимущественно гиперболического типа. К таким уравнениям, как говорилось, приводили в то время задачи о колебаниях струн, мембран, упругих стержней, о распространении звука.

Сначала дается общее решение при помощи произвольных функций простейших уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = P(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = P(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y), \tag{30}$$

которые заменой $\partial z/\partial x = v$ легко приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

При интегрировании этих простейших уравнений второго порядка Эйлер формулирует постановку задачи с начальными условиями и говорит, что такую задачу можно решить только тогда, когда можно найти общий (полный, по Эйлеру) интеграл уравнения.

Затем рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = az,$$

к которому в настоящее время сводится телеграфное уравнение. Подстановкой $z = e^{\alpha x} Y(y)$ Эйлер находит его частные решения вида

$$z = Ae^{\alpha x + \frac{ay}{\alpha}}$$

и

$$z = B \sin(mx - ny), \text{ или } z = B \cos(mx - ny),$$

где $mn = a$, и указывает на возможность получения более общих решений в виде линейных комбинаций решений такого вида. Однако он сомневается, можно ли таким путем получить общее решение уравнения в случае, когда оно представляет «разрывную» в его смысле функцию.

Непосредственно далее исследуется наиболее общее линейное уравнение второго порядка, содержащее смешанную вторую производную:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Rz + S = 0. \tag{31}$$

Эйлер выясняет, какими должны быть функции P, Q, R и S, зависящие от x и y, чтобы общее решение уравнения можно было записать в явном виде. Для этой цели он полагает $z = e^V v$, где $V = V(x, y)$ — любая заданная функция, и находит, что при выполнении равенств:

$$P = T - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Q = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - T\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}$$

новая искомая функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + T\frac{\partial v}{\partial x} + e^{-V}S = 0,$$

принадлежащему к уравнениям вида (30), которые он уже проинтегрировал с помощью произвольных функций.

Общее решение уравнения (31) гиперболического типа при произвольных функциях P, Q, R, S было дано только в следующем столетии (при помощи фундаментальных решений и квадратур).

Далее решается уравнение (5) колебания струны.

В последующих задачах при исследовании гиперболических уравнений с переменными коэффициентами Эйлер каждый раз переходит к характеристическим координатам, т. е. к таким, что из вторых производных в уравнении остается только $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}$, и ищет условия, при которых решение задачи сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Исследуя общее линейное уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2P\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (P^2 - Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + R\frac{\partial z}{\partial y} + S\frac{\partial z}{\partial x} + Tz + V = 0, \qquad (32)$$

Эйлер вводит общие характеристические координаты

$$t = \int p\,[dx + (P + Q)\,dy] \quad \text{и} \quad u = \int q\,[dx + (P - Q)\,dy],$$

где p и q — интегрирующие множители. В координатах t и u уравнение (32) сводится к уже рассмотренному уравнению (31). Хотя у Эйлера не было общего метода решения последнего уравнения, важное значение имело уже введение общих характеристических координат.

Во втором разделе первой части рассмотрено уравнение

$$(x + y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + m(x + y)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + nz = 0, \qquad (33)$$

впоследствии названное уравнением Эйлера — Пуассона (иногда его неверно называют «уравнением Дарбу», хотя Дарбу ссылался в соответствующем вопросе на Эйлера и Пуассона). Уравнение (33) и его решение, данное Эйлером, в дальнейшем нашло большое число применений в газовой динамике. Сам Эйлер пришел к нему в связи с исследованиями о распространении звука и о колебании струн переменной толщины. Он получил общее решение уравнения (33) при целых m в виде формулы, содержащей две произвольные функции и конечное число их производных. В том же разделе книги и таким же образом Эйлер выразил общие решения еще ряда уравнений гиперболического типа.

Третий раздел первой части невелик по сравнению с предыдущими, но также содержит важные результаты в интегрировании уравнений третьего и более высокого порядков. Здесь на простейших примерах устанавливается, что общее решение уравнения в частных производных содержит столько произвольных функций, каждая из которых зависит от одной переменной, каков порядок уравнения.

Здесь Эйлер рассматривает случаи, когда однородно-линейное дифференциальное уравнение сводится к уравнениям менее высокого порядка, в частности, уравнение

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

сводящееся к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -a \frac{\partial z}{\partial x},$$

для которых даются частные решения вида:

$$z = e^{\lambda a (y \pm \lambda x)}, \quad z = e^{\pm \lambda a x} \cos(\lambda a y + \alpha).$$

Эйлер рассматривает также однородно-линейное уравнение любого порядка с постоянными коэффициентами

$$A \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda} + B \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-1} \partial y} + C \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-2} \partial y^2} + \ldots \quad (34)$$

Он образует характеристическое уравнение

$$Au^\lambda + Bu^{\lambda-1} + Cu^{\lambda-2} + \ldots = 0$$

и, обозначив корни этого уравнения через α, β, γ,..., дает общее решение уравнения (34) в виде

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + \Delta(y + \beta x) + \Sigma(y + \gamma x) + \ldots$$

Прямые $y + \alpha x = \text{const}$, $y + \beta x = \text{const}$,... в настоящее время носят название характеристик уравнения (34). Мы видим таким образом, что Эйлер положил начало теории характеристик для уравнений в частных производных любого порядка.

В небольшой второй части третьего тома «Интегрального исчисления», посвященной уравнениям для функций трех аргументов, исследование ведется теми же методами, как и в случае функций двух переменных.

В заключительном параграфе второй части Эйлер писал, что в его книге «содержатся лишь первые элементы этой науки, дальнейшее развитие которой следует всячески рекомендовать проницательности геометров» [1]. Он говорит далее, что из-за недостатка материала он не решился даже приступить к уравнениям второго порядка для функций четырех переменных, и отмечает «величайшее» значение для гидромеханики уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

общий интеграл которого должен содержать две произвольные функции. Эйлер указывает на существование бесчисленных частных решений

$$v = \Gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t)$$

---

[1] *Л. Эйлер.* Интегральное исчисление, т. III, стр. 303.

при условии $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, а также

$$v = \frac{\Gamma(t \pm \sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(по современной терминологии — опережающие и запаздывающие потенциалы неподвижного источника) и

$$v = \frac{\Gamma(x \pm \sqrt{t^2-y^2-z^2})}{\sqrt{t^2-y^2-z^2}}.$$

В XIX в. Пуассон и другие ученые показали, что, используя каждый из указанных Эйлером частных видов решений, можно построить общее решение.

Таково исключительно богатое содержание монографии Эйлера по уравнениям с частными производными, сыгравшей в свое время огромную роль. В ней заложены основы будущих важнейших методов — метода характеристик и метода рядов для решения уравнений в частных производных. Большое число содержащихся в ней результатов и приемов сохраняет значение и до наших дней.

Новые успехи в теории уравнений первого порядка

В последней трети XVIII в. прежде всего были достигнуты большие успехи в создании общей теории линейных и нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Наряду с этим различные проблемы механики и физики приводили к изучению отдельных типов уравнений в частных производных высших порядков.

Выше говорилось, что ряд уравнений первого порядка проинтегрировали еще Эйлер и Даламбер, сводя задачу к интегрированию соответствующих уравнений в полных дифференциалах. Большая роль в их методах отводилась нахождению интегрирующих множителей, в чем и заключалась трудность этих методов.

Общее линейное уравнение для функции двух переменных

$$P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \qquad (35)$$

решили почти одновременно Лаплас и Лагранж. Свое решение Лаплас изложил в «Исследованиях по интегральному исчислению в частных дифференциалах» (Recherches sur le calcul intégral aux différentielles partielles, Mém. Ac. Paris., (1773) 1777). Лаплас при этом отправлялся от работ Даламбера и Эйлера. Он вводил вспомогательную переменную, выбирал ее подходящим образом и использовал разложение искомой функции в ряд. В той же работе свой метод решения Лаплас применил и к уравнению в частных производных второго порядка. Позднее его метод получил название «метода каскадов», о нем мы еще будем говорить далее (см. стр. 440).

Метод Лагранжа, изложенный в статье «О частных интегралах дифференциальных уравнений» (1774) 1776 (см. стр. 404), заключался в сведéнии интегрирования уравнения (35) к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \tag{36}$$

Метод Лагранжа, о котором идет речь, и поныне входит в учебники по дифференциальным уравнениям. Этот метод в статьях, опубликованных в «Записках» Берлинской академии в 1781—1785 гг., Лагранж распространил на линейные уравнения первого порядка с любым числом переменных. В связи с этим он подчеркнул, что решение уравнений с частными производными зависит от искусства сведéния их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

На протяжении 70—90-х годов Лагранж занимался исследованием и нелинейных уравнений первого порядка общего вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{37}$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Результаты, полученные в области дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на протяжении почти трети века, Лагранж систематически изложил в знаменитых «Лекциях об исчислении функций» (1806).

Метод Лагранжа — Шарпи

В третьем томе «Интегрального исчисления» (1770) Эйлер показал, что любое уравнение первого порядка с тремя переменными можно привести к линейному уравнению с четырьмя переменными. Этот результат, которому сам Эйлер не придал существенного значения, вскоре был оценен Лагранжем в статье, помещенной в «Записках» Берлинской Академии за 1772 г. (1774), в которой подробно исследовался вопрос о сведéнии одного дифференциального уравнения к другому.

Однако ни Эйлер, ни Лагранж не завершили решения нелинейного уравнения первого порядка. Их идеи были затем развиты в работах П. Шарпи и Г. Монжа.

Работа П. Шарпи, подававшего большие надежды, но умершего молодым (около 1785 г.), была представлена Парижской академии наук в 1784 г., но осталась неопубликованной. О ней говорится в известном французском учебнике Лакруа — «Трактате по дифференциальному и интегральному исчислению» (т. II, Париж, 1814). Метод решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка, развитый Лагранжем и Шарпи, до сих пор входит в учебники под именами обоих этих ученых. Идея метода состоит в том, что к нелинейному уравнению (37) подбирается другое уравнение

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a, \tag{38}$$

содержащее произвольную постоянную a так, чтобы система уравнений (37) и (38) стала бы вполне интегрируемой. Для этого необходимо, чтобы систему можно было решить относительно совокупности переменных p

и q и чтобы найденные при этом функции удовлетворяли условию полной интегрируемости:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}. \tag{39}$$

Условие (39) приводит к линейному уравнению в частных производных для подбираемой функции $\Phi(x, y, z, p, q)$:

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial\Phi}{\partial y} + (Pp+Qq)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - (X+Zp)\frac{\partial\Phi}{\partial p} - (Y+Zq)\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0,$$

где

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Достаточно найти одно частное решение последнего уравнения, а так как оно эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp+Qq} = -\frac{dp}{X+Zp} = -\frac{dq}{Y+Zq}, \tag{40}$$

то достаточно найти один первый интеграл этой системы

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a.$$

После подбора функции $\Phi(x, y, z, p, q)$ в уравнении (38) из системы уравнений (37) и (38) находят p и q:

$$p = \varphi_1(x, y, z, a) \text{ и } q = \varphi_2(x, y, z, a)$$

и для неизвестной функции $z(x, y)$ получается вполне интегрируемое уравнение

$$dz = \varphi_1(x, y, z, a)\,dx + \varphi_2(x, y, z, a)\,dy.$$

Интеграл последнего уравнения

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

где a и b — произвольные постоянные, будет так называемым полным интегралом нелинейного уравнения (37).

Шарпи пытался распространить метод, о котором только что шла речь, на уравнения с большим числом переменных, но ему не удалось преодолеть встретившиеся при этом трудности. Новые методы решения нелинейных уравнений в частных производных первого порядка были даны в следующем столетии, в трудах И. Ф. Пфаффа, О. Коши, К. Г. Якоби.

В названных выше статьях, опубликованных в 1774 и 1776 гг., Лагранж в общем виде установил связи между различными видами решений уравнений в частных производных первого порядка и ввел сохранившуюся до настоящего времени терминологию.

Как мы только что сказали, решение уравнения (37)

$$z = \varphi(x, y, a, b),$$

зависящее от двух произвольных постоянных, Лагранж назвал «полным». Пользуясь приемом варьирования постоянных, употребленным им тогда же для обыкновенных неоднородных линейных дифференциальных уравнений, он показал, что из полного решения можно получить все другие.

Если в полном решении положить

$$b = \psi(a),$$

где $\psi(a)$ — произвольная функция, а затем из уравнений

$$z = \varphi[x, y, a, \psi(a)] \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

исключить a, то получится решение, названное им «общим». Наконец, исключение a и b из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, b), \qquad \frac{\partial z}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

доставляло Лагранжу решение, которое он назвал сначала «специальным», а позже, в «Теории аналитических функций» (1797), «особым».

Лагранж ввел также сам термин «решение» дифференциального уравнения вместо «интеграл» в связи с тем, что решение не всегда сводится к квадратурам.

В статьях 1774 (1776) и 1779 (1781) гг. Лагранж вкратце охарактеризовал и геометрический смысл различных видов решений дифференциальных уравнений в частных производных и разъяснил его на некоторых примерах. Однако в целом Лагранж, как Эйлер и Даламбер, развивал аналитико-вычислительные методы теории дифференциальных уравнений.

Геометрическая теория Монжа

Начало геометрической теории уравнений в частных производных было положено главным образом в трудах выдающегося геометра Гаспара Монжа, подметившего глубокие связи между этими уравнениями и свойствами поверхностей и пространственных кривых. Соответствующие публикации Г. Монжа появлялись начиная с 70-х годов XVIII в. Мы отметим прежде всего «Мемуар об интегральном исчислении уравнений в частных дифференциалах» (Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles. Mém. Ac. Paris, (1784) 1787). Вместе с этой работой в том же томе «Записок» Парижской академии был опубликован еще ряд статей Монжа, тесно связанных с ней по содержанию. Из дальнейших работ Монжа особенно важное значение имеют уже упоминавшиеся его книги: «Листы анализа, приложенного к геометрии» (1795; изд. 2—1801, изд. 3 — 1805), «Приложение алгебры к геометрии» (1805; написана совместно с учеником Монжа Ж. Ашеттом) и «Приложение анализа к геометрии» (1807). В последнюю книгу вошло основное содержание двух предыдущих. В конце книги дается важное добавление под названием «Об интегрировании уравнений в частных разностях первого порядка с тремя переменными». В основу перечисленных книг были положены лекции, прочитанные Г. Монжем в Политехнической школе.

В своих работах, законченных к 1784 г., Монж, исходя из геометрического образования целого ряда поверхностей, вывел их дифференциальные уравнения, а затем, с помощью обратных умозаключений, получал интегралы дифференциальных уравнений.

Например, рассматривая цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны прямой:

$$x = az, \qquad y = bz,$$

и выражая условие параллельности с этой прямой касательной плоскости

$$z - z_1 = p\,(x - x_1) + q\,(y - y_1),$$

Монж нашел дифференциальное уравнение цилиндрических поверхностей

$$ap + bq = 1.$$

Общий интеграл последнего уравнения Монж получил затем следующим способом. Уравнения образующей рассматриваемых поверхностей должны иметь вид:

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

где α и β постоянны для конкретной образующей и меняются при переходе от одной образующей к другой. Так как α и β одновременно бывают постоянны и одновременно начинают изменяться, Монж заключил, что они находятся в некоторой зависимости друг от друга, $\beta = \varphi\,(\alpha)$, откуда вытекает равенство

$$y - bz = \varphi\,(x - az),$$

являющееся конечным уравнением цилиндрических поверхностей, т. е. искомым интегралом дифференциального уравнения.

Таким же способом Монж рассматривал семейства конических поверхностей, поверхностей вращения, каналовых поверхностей (образующихся движением окружности постоянного радиуса, плоскость круга которой перпендикулярна заданной кривой, а центр передвигается по ней), поверхностей склонов насыпей, винтовых поверхностей, получая для них дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, а затем — интегралы этих уравнений. Монж рассматривал и более сложные семейства поверхностей, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных высшего порядка (общие линейчатые поверхности и др.).

Характеристики

В тех же работах Монж разработал метод характеристик и, опираясь на геометрические соображения, показал, что интегрирование уравнений в частных производных первого порядка сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод характеристик Монжа и его геометрическая трактовка решения дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$F\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0 \tag{37}$$

особенно ясно изложены в его «Приложении анализа к геометрии». Полный интеграл таких уравнений

$$f\,(x,\ y,\ z,\ a,\ b) = 0$$

представляет собой двухпараметрическое семейство поверхностей. Поверхности, возникающие при $b = \varphi\,(a)$, где $\varphi\,(a)$ — произвольная функция, и принадлежащие, следовательно, к однопараметрическому семейству, Монж назвал огибаемыми. Огибающая их поверхность, уравнение которой получается путем исключения параметра a из уравнений

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \tag{41}$$

оказывалась геометрическим образом общего интеграла дифференциального уравнения (37).

Кривые, по которым пересекаются любые две последовательные поверхности семейства или же вдоль которых огибаемые касаются огибающей, т. е. кривые, заданные уравнениями (41) при фиксированных значениях параметра a, Монж назвал «характеристиками» и придавал им большое значение, так как именно они лучше всего характеризуют огибающую интегральную поверхность, являясь образующими этой поверхности.

Наконец, огибающую семейства характеристик, определяемую уравнениями:

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0, \tag{42}$$

Монж назвал ребром возврата огибающей поверхности, ибо точки этой линии являются, вообще говоря, точками возврата для кривой, по которой огибающая поверхность пересекается с плоскостью, не проходящей через касательную к ребру. Ввиду произвольности функции $\varphi(a)$ общий интеграл дифференциального уравнения (37) заключает в себе бесчисленное множество огибающих поверхностей.

Исходя из определения характеристики и полного дифференциала функции $F(x, y, z, p, q)$ в уравнении (37)

$$P dp + Q dq + X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

для нахождения уравнений характеристик Монж получил систему обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dP}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ} \tag{43}$$

(ср. эту систему с системой (40) в методе Лагранжа — Шарпи).

Зная уравнения характеристик — образующих огибающей интегральной поверхности, Монж находил и общий интеграл уравнения (37).

Благодаря работам Монжа теория интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными к началу XIX в. стала геометрически прозрачной. Монж сделал первые шаги и по применению метода характеристик к уравнениям в частных производных высших порядков. При этом он, между прочим, ввел сокращенные обозначения частных производных высших порядков (r, s, t), ставшие впоследствии общеупотребительными в дифференциальной геометрии и в теории дифференциальных уравнений.

В XIX в. метод характеристик Монжа стал отправным пунктом для соответствующего метода Коши решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Уравнение Пфаффа

Геометрические выводы Монжа внесли также ясность в трактовку уравнения

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0, \tag{44}$$

названного впоследствии уравнением Пфаффа.

Как уже говорилось (см. стр. 430), Эйлер считал такое уравнение бессмысленным в случае, когда его коэффициенты не удовлетворяют условию интегрируемости. Если же условие интегрируемости выполнено, то его решение представляется соотношением

$$f(x, y, z) = C,$$

где C — константа. Монж показал, что в этом случае любые кривые, расположенные на поверхности семейства

$$f(x, y, z) = C,$$

ортогональны к кривым, определяемым системой

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Если же условие интегрируемости не выполнено, то, как показал Монж, при задании дополнительной зависимости $\varphi(x, y, z) = 0$ уравнение (44) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с двумя переменными и определяет однопараметрическое семейство кривых, лежащих на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ и ортогональных к кривым той же системы

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Г. Монж рассматривал отдельные случаи и нелинейных уравнений вида

$$F(x, y, z, dx, dy, dz) = 0.$$

По предложению норвежского математика Софуса Ли уравнения такого вида стали в XIX в. называть уравнениями Монжа.

Метод каскадов Лапласа

В последней трети XVIII в. были получены некоторые крупные результаты и в области уравнений в частных производных второго порядка, связанных с задачами механики и физики.

Поиски единого приема решения известных в указанное время уравнений в частных производных второго порядка привели Лапласа к так называемому методу каскадов (название дано было позднее). Как уже говорилось (см. стр. 434), Лаплас решил этим методом линейное уравнение первого порядка с тремя переменными в «Записках» Парижской академии ((1773) 1777) и тут же применил его к линейному уравнению с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial z}{\partial x} + \delta\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T = 0, \tag{45}$$

где α, β, γ, δ, λ, T — заданные функции x и y, и предполагается, что $\alpha^2 > 4\beta$ (т. е., как мы теперь говорим, предполагается, что тип уравнения гиперболический). Вводя две новые переменные, Лаплас сначала привел уравнение (45) к виду

$$D(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_1} m \frac{\partial u}{\partial s} + n \frac{\partial u}{\partial s_1} + lu + T = 0, \tag{46}$$

после этого искомую функцию $u(s, s_1)$ Лаплас ищет в виде ряда

$$u(s, s_1) = A_0 \varphi_1(s) + A_1 \varphi_2(s) + A_2 \varphi_3(s) + \ldots$$
$$\ldots + B_0 \psi_1(s_1) + B_1 \psi_2(s_1) + B_2 \psi_3(s_1) + \ldots,$$

в котором функции $\varphi_k(s)$ и $\psi_k(s_1)$ ($k = 1, 2, \ldots$) выражаются через две произвольные функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ равенствами:

$$\varphi_1(s) = \int \varphi(s)\, ds, \quad \varphi_2(s) = \int \varphi_1(s)\, ds, \ldots$$
$$\psi_1(s) = \int \psi(s_1)\, ds_1, \quad \psi_2(s_1) = \int \psi_1(s_1)\, ds_1, \ldots$$

Коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ определяются дифференциальными уравнениями, получающимися при подстановке ряда в уравнение (46):

$$\frac{\partial A_0}{\partial s_1} + mA_0 = 0, \qquad \frac{\partial B_0}{\partial s} + nB_0 = 0,$$
$$\frac{\partial A_1}{\partial s_1} + mA_1 + D(A_0) = 0, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial s} + nB_1 + D(B_0) = 0,$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial s_1} + mA_2 + D(A_1) = 0, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial s} + nB_2 + D(B_1) = 0,$$

и т. д. и т. д.

Если в ходе решения последних уравнений при некотором определенном значении индекса k коэффициенты $A_k = 0$ или $B_k = 0$, то ряд (46) для $u(s, s_1)$ обрывается и общий интеграл дифференциального уравнения $D(u) = 0$ выражается в конечной форме. Если же этот случай не имеет места, то, как показал Лаплас в своем «Мемуаре о рядах» (Mémoire sur les suites. Mém. Ac. Paris, (1799) 1782), искомое решение можно выразить с помощью определенных интегралов, в которые преобразуется ряд. Именно, тогда $u(s, s_1)$ можно привести к форме

$$u = \int_0^s p \varphi(z)\, dz + \int_0^{s_1} p_1 \psi(z)\, dz,$$

где p и p_1 — частные интегралы уравнения (46), имеющие вид:

$$p = \int_0^s \Gamma(s - z) \varphi(z)\, dz, \qquad p_1 = \int_0^{s_1} \Pi(s - z) \psi(z)\, dz,$$

а в этих интегралах

$$\Gamma(s - z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1} \frac{(s-z)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad \Pi(s - z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{k-1} \frac{(s-z)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

В случае, когда l, m, n — постоянные числа, $T = 0$ и

$$m = \frac{f}{s + s_1}, \quad n = \frac{g}{s + s_1}, \quad l = \frac{h}{(s + s_1)^2}.$$

Лаплас с помощью своего метода свел задачу к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Позднее ((1787) 1789) Лежандр дополнил метод каскадов, показав, что он не нуждается в преобразовании общего линейного уравнения к лапласовой форме. Сам Лаплас в 1809 г. решил этим методом уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Теория потенциала; исследования Лагранжа

В последней трети XVIII в. в работах Лагранжа, Лапласа, Лежандра были заложены основы современной теории потенциала — одного из крупнейших разделов математической физики.

Теория потенциала выросла из решения отдельных задач о притяжении тел по закону всемирного тяготения Ньютона. В развитии учения о притяжении тел были заинтересованы в XVIII в. мореплавание, география, геодезия. Перед небесной механикой со времени Ньютона были поставлены сложные проблемы исследования движения небесных тел, в первую очередь Солнечной системы, что было связано с выяснением фигуры Земли и других планет, с необходимостью определения притяжения различных тел друг к другу (закон Ньютона, как известно, говорит лишь о притяжении материальных точек).

Одной из центральных в теории притяжения явилась задача притяжения материальной точки сфероидом (телом, ограниченным замкнутой гладкой поверхностью), в частности эллипсоидом, так как большинство небесных тел имеет форму, близкую к эллипсоиду. При этом вычисление проекций вдоль прямоугольных осей координат силы притяжения сфероидом материальной точки, находящейся внутри, на поверхности или вне этого тела, имело в каждом из трех случаев свои особенности.

Изучение притяжения материальной точки сфероидом потребовало совместных усилий многих выдающихся ученых. После первых достижений, принадлежащих еще Ньютону (1687), этой задачей занимались в XVIII в. Маклорен, Мопертюи, Стирлинг, Т. Симпсон, Эйлер и другие. До Лагранжа и Лапласа были получены результаты лишь для частных случаев эллипсоида; наиболее замечательные принадлежат Ньютону и Маклорену. При этом, хотя Ньютон и его последователь Маклорен и пользовались своеобразными методами интегрирования, они в сильной мере опирались на геометрические построения, меняющиеся от одного конкретного случая к другому. Только попытки Лагранжа и Лапласа аналитически решить задачу о притяжении сфероида в общем виде привели к созданию элементов современной теории потенциала.

Хронологически первой явилась работа Лагранжа «О притяжении эллиптических сфероидов» (Nouv. Mém. Ac. Berlin, (1773) 1775). Результаты, содержащиеся в этом труде, были развиты далее рядом математиков XVIII и XIX вв.: Лапласом, Лежандром, Дж. Айвори, Гауссом, Пуассоном, Дж. Грином и другими. Напомним, что Лагранж ввел здесь тройные интегралы (см. стр. 351).

Изложив приемы вычисления интегралов, взятых по объему тела, Лагранж приступает далее к задаче об определении силы притяжения материальной точки, расположенной где-либо в пространстве, к однородному эллипсоиду. Все результаты, полученные до него, в частности наиболее общие результаты Маклорена, Лагранж находит здесь аналитически. Лагранж впервые полностью исследовал случай притяжения однородным трехосным эллипсоидом единичной массы, расположенной внутри или на поверхности этого эллипсоида, и нашел выражения силы составляющих притяжения в виде однократных определенных интегралов; эти интегралы в XIX в. были приведены к современному виду. Идеи Лагранжа, относящиеся к только что указанному случаю, до сих пор излагаются в учебниках теории потенциала и небесной механики. Лагранж обращает внимание на трудность решения задачи в общем случае, когда притягиваемая точка находится вне эллипсоида.

В том же году, когда Лагранж представил Берлинской академии работу о притяжении сфероидов, он направил Парижской академии мемуар «О вековом уравнении Луны» (Sur l'équation séculaire de la lune. Mém. savants étrangers, (1773) 1774). Здесь устанавливается, что поле тяготения Ньютона является, как говорят теперь, потенциальным и вводится в теорию притяжения функция, которую в XIX в. стали называть потенциальной (Грин, 1828) или силовой (Гельмгольц, 1834) или просто потенциалом (Гаусс, 1840). У Лагранжа эта функция еще не имела специального названия. Он лишь писал о функции, частные производные которой равны компонентам силы притяжения вдоль прямоугольных осей координат.

Для случая двух притягивающих друг друга материальных точек (x, y, z) и (a, b, c), отнесенных к декартовой системе координат и имеющих массы, соответственно равные m и единице, эта функция имеет вид

$$\frac{m}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

где знаменателем является, как видно, расстояние между точками.

Для случая притяжения материальной точки (a, b, c) с единичной массой неоднородным телом произвольной формы с плотностью $\rho(x, y, z)$ потенциальная функция имеет вид тройного интеграла

$$\iiint \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

взятого по объему притягивающего тела; такой тройной интеграл теперь носит название объемного потенциала.

Ранее говорилось, что Эйлер в своих гидродинамических работах также пользовался понятием потенциальной функции, именно потенциала скоростей. Однако понятие потенциальной функции получило широкое распространение лишь после исследований Лагранжа и его последователей по теории притяжения.

Уравнение Лапласа и сферические функции

Дальнейшее развитие теория притяжения получает прежде всего в трудах Лапласа и Лежандра последней трети XVIII в. Из первых работ Лапласа в этой области наиболее важной является «Теория притяжения сфероидов и фигуры планет» (Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes, Mém. Ac. Paris, (1782) 1785). В более обработанном виде он включил ее содержание во второй том «Трактата по небесной механике» (Traité de Mécanique céleste, t. II, Paris, 1799). Лаплас приходит к ряду замечательных открытий, важнейшим из которых является установление связи между введенным Лагранжем объемным потенциалом (Лаплас обозначает его буквой V)

$$V(a, b, c)=\iiint \frac{\rho(x, y, z)\, d\tau}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

и дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial c^2}=0, \qquad (47)$$

названным именем Лапласа, хотя, как мы видели (см. стр. 422), оно было известно Эйлеру. Только после работ Лапласа это уравнение получило широкую известность как уравнение, отражающее сущность стационарных процессов, в которых действующие силы в любой момент времени одинаковы для данной точки пространства и зависят лишь от координат этой точки (тепловое равновесие тел, равновесие упругих тел, равновесие электричества на проводнике и т. д.).

Лаплас, однако, не заметил, что уравнение (47) удовлетворяется лишь тогда, когда притягиваемая точка (a, b, c) находится вне притягивающего тела, быть может, потому, что он в основном и занимался случаем внешней точки (a, b, c), наиболее трудным в теории притяжения. Упущение Лапласа было замечено впервые С. Д. Пуассоном (1813), который вывел новое дифференциальное уравнение для случая, когда притягиваемая точка лежит внутри тела,— так называемое уравнение Пуассона.

Не рассматривая всех замечательных результатов «Теории притяжения сфероидов и фигуры планет» Лапласа, мы остановимся лишь на его способе решения уравнения (47) и исследования объемного потенциала $V(a, b, c)$.

Прежде всего Лаплас записывает потенциальную функцию $V(a, b, c)$ и уравнение (47) в сферической системе координат, полагая для простоты, что плотность $\rho(x, y, z)$ притягивающего тела равна единице. Полюс сферической системы берется внутри притягивающего тела в начале декартовых координат. Обозначая через z, θ, ω сферические координаты притягиваемой точки и через R, θ', ω' такие же координаты произвольной точки тела, Лаплас находит, что в новой системе координат функция $V(a, b, c)$ имеет вид интеграла

$$V=\iiint \frac{R^2 \sin\theta' d R d\theta' d\omega'}{\sqrt{r^2-2rR\cos\gamma+R^2}}, \qquad (48)$$

где $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\omega-\omega')$, и является косинусом угла между радиус-векторами притягиваемой точки (r, θ, ω) и произвольной точки тела (R, θ', ω'). Квадратный корень в знаменателе, как и в первоначальном выражении $V(a, b, c)$, есть расстояние между притягиваемой точкой и произвольной точкой тела.

Уравнение (47) в сферической системе координат, как впервые показывает Лаплас, приобретает вид

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial V}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}+\frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2}+r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}=0, \qquad (49)$$

где $\mu = \cos\theta$. Затем, предполагая, что точка (r, θ, ω) находится вне притягивающего тела, Лаплас представляет функцию V в виде ряда

$$V = \frac{u^{(0)}}{r} + \frac{u^{(1)}}{r^2} + \frac{u^{(2)}}{r^3} + \ldots, \tag{50}$$

где, говорит он, «благодаря единственности представления интегрального выражения $V, \ldots, u^{(i)}$ является рациональной и целой функцией μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$ и $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$, зависящей от природы сфероида»[1].

Далее Лаплас представляет функцию V в виде ряда и для случая, когда притягиваемая точка находится внутри притягивающего тела; ряд при этом располагается по положительным степеням радиус-вектора r притягиваемой точки. Однако, как уже было отмечено, в основном свое внимание Лаплас обращает на случай внешней притягиваемой точки.

Объемный потенциал V в случае внешней притягиваемой точки Лаплас исследует, решая дифференциальное уравнение (49) методом разделения переменных. При этом, находя частные решения этого уравнения, Лаплас впервые дает достаточно разработанную теорию сферических функций.

Подставляя ряд (50) в уравнение (49), он получает дифференциальное уравнение, которому должны удовлетворять функции $u^{(i)}(\theta, \omega)$ при $i = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial u^{(i)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)u^{(i)} = 0. \tag{51}$$

Функции Лапласа $u^{(i)}(\theta, \omega)$, зависящие от двух сферических координат — углов θ и ω и являющиеся однозначными и ограниченными решениями дифференциального уравнения (51), в XIX в., прежде всего в трудах Гаусса, стали называться сферическими функциями (их можно рассматривать как функции, определенные на сфере единичного радиуса).

Для исследования функций $u^{(i)}(\theta, \omega)$ в его проблеме Лаплас разлагает в ряд величину

$$T = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}}, \tag{52}$$

стоящую под знаком тройного интеграла, изображающего функцию V. Величина T, удовлетворяющая уравнению Лапласа (49), благодаря чему и функция V удовлетворяет тому же уравнению в случае внешней притягиваемой точки, в настоящее время называется фундаментальным решением этого уравнения. Лаплас представляет величину T в виде ряда, расположенного по положительным степеням отношения $\frac{R}{r} < 1$ (так как $r > R$ в рассматриваемом случае):

$$T = \frac{Q^{(0)}}{r} + \frac{Q^{(1)}R}{r^2} + \frac{Q^{(2)}R^2}{r^3} + \ldots, \tag{53}$$

и говорит, что коэффициенты $Q^{(i)}$ в этом ряде должны быть многочленами от выражения $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')$.

---

[1] *P. S. Laplace.* Oeuvres complètes, t. X, Paris, 1896, p. 362.

Если положить $\cos\gamma = x$, то

$$Q^{(i)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)}{1\cdot 2\ldots i}\left[x^i - \frac{i(i-1)}{2(2i-1)}x^{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2\cdot 4\cdot(2i-1)(2i-3)}x^{i-4} - \ldots\right]$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тремя десятилетиями позднее (1816) Олинд Родриг выразил полином $Q^{(i)}(x)$ изящной формулой, вошедшей во все современные учебники по теории сферических функций:

$$Q^{(i)}(x) = \frac{1}{2^i(i!)}\frac{d^i(x^2-1)^i}{dx^i}.$$

Подставляя ряд (53) в уравнение вида (49), записанное для T, Лаплас показывает, что многочлены $Q^{(i)}(\cos\gamma)$, как и функции $u^{(i)}(\theta, \omega)$, удовлетворяют уравнению в частных производных (51), т. е.

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 Q^{(i)}}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)Q^{(i)} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (51')$$

и, следовательно, по современной терминологии, многочлены $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ также являются сферическими функциями.

Подставляя ряд (53) под знак интеграла (48), почленно интегрируя и сравнивая результат с рядом (50), Лаплас находит, что многочлены $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ и функции $u^{(i)}(\theta, \omega)$ должны быть связаны соотношениями

$$u^{(i)}(\theta, \omega) = \iiint R^{i+2}Q^{(i)}\sin\theta' dR d\theta' d\omega' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Интегрируя по R, он находит из этих равенств

$$u^{(i)}(\theta, \omega) = \frac{1}{i+3}\iint R'^{i+3}Q^{(i)}\sin\theta' d\theta' d\omega' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

где интегралы берутся по поверхности притягивающего тела; R' — радиус-вектор произвольной точки поверхности.

Полиномы Лежандра

Функции $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ — коэффициенты при степенях отношения R/r в ряде (53), являющиеся многочленами i-й степени, позднее получили название полиномов Лежандра от $\cos\gamma$, косинуса угла между радиус-векторами точек (r, θ, ω) и (R, θ', ω'). Действительно, эти полиномы впервые применил А. М. Лежандр в «Исследованиях о притяжении однородных сфероидов» и «Исследованиях о фигуре планет» (Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes, Mém. savants étrangers, 1785; Recherches sur la figure des planètes, Mém. Ac. Paris, (1784) 1787). Во второй работе и ее «Продолжении» (Mém. Ac. Paris, (1789) 1794) Лежандр утверждает, что результаты этих работ были получены им до 1782 г. и что они подсказали Лапласу идеи, которые изложены в его «Теории притяжения сфероидов и фигуры планет», обобщившей результаты Лежандра. На приоритет Лежандра в открытии получивших его имя полиномов указывает ряд математиков и историков математики, основывающихся на упомянутом выше утверждении самого Лежандра и на анализе соответствующих работ Лежандра и Лапласа.

Лежандр, как и Лаплас вслед за ним, пришел к интересующим нас здесь полиномам $Q^{(i)}(\cos\gamma)$, разлагая в ряд по степеням R/r при $R < r$ или по степеням r/R при $R > r$ функцию

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}}, \qquad (52')$$

фигурирующую в проблемах о притяжении тел по закону Ньютона. Эта функция в работах Лежандра входила в состав тройного интеграла, выражающего компоненту силы притяжения однородного эллипсоида вращения в направлении радиус-вектора притягиваемой точки.

Разложение функции (52′), называемой ныне производящей функцией полиномов Лежандра, в ряд по степеням R/r или r/R остается одним из путей получения полиномов Лежандра и в современной теории сферических функций.

В «Исследованиях о притяжении однородных сфероидов» появляются лишь полиномы Лежандра четной степени, но в «Исследованиях о фигуре планет» речь идет уже о полиномах $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ любой степени и отчетливо, в виде теорем, сформулирован и доказан ряд их важнейших свойств, в частности свойство ортогональности этих полиномов в интервале $(-1, +1)$ изменения $\cos\gamma$:

$$\int_{-1}^{+1} Q^{(i)}(x)\,Q^{(j)}(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

$$\int_{-1}^{+1} [Q^{(i)}(x)]^2\,dx = \frac{2}{2i+1},$$

где $x = \cos\gamma$.

В «Продолжении исследований о фигуре планет» Лежандр формулирует теорему сложения, говорящую о связи полиномов $Q^{(i)}(\cos\gamma)$, где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')$, с полиномами $Q^{(i)}(\cos\theta)$, $Q^{(i)}(\cos\theta')$ и с так называемыми функциями Лежандра. Однако теорема сложения полиномов Лежандра появилась прежде в «Теории притяжения сфероидов и фигуры планет» (1782) Лапласа. В названной работе Лаплас предполагает полиномы $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ развернутыми по косинусам разности $\omega - \omega'$ и кратных ей. Обозначая через β коэффициент при $\cos n(\omega - \omega')$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и подставляя развернутое указанным образом выражение $Q^{(i)}(\cos\gamma)$ в уравнение (51′), Лаплас получает для β известное теперь в теории сферических функций обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\left[(1-\mu^2)\dfrac{d\beta}{d\mu}\right]}{d\mu} - \frac{n^2\beta}{1-\mu^2} + i(i+2)\beta = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\mu = \cos\theta$.

При $n = 0$ это уравнение в современной литературе называется уравнением Лежандра (ему удовлетворяют полиномы Лежандра), хотя впервые, как мы видим, уравнение появилось у Лапласа. При произвольном натуральном n оно носит название дифференциального уравнения присоединенных функций Лежандра $Q_n^{(i)}(\mu)$ порядка i и ранга n (сам Лаплас обозначал эти функции иначе).

Лаплас находит вид присоединенных функций $Q_n^{(i)}(\mu)$:

$$Q_n^{(i)}(\mu)=(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}-\frac{i^2-n^2}{2(2i-1)}(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}-1}+$$
$$+\frac{(i^2-n^2)[(i-2)^2-n^2]}{2\cdot 4\cdot(2i-1)(2i-3)}(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}-3}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\frac{i-n}{2}}\frac{(i^2-n^2)[(i-2)^2-n^2]\ldots[(n+2)^2-n^2)]}{2\cdot 3\ldots\frac{i-n}{2}\cdot 2^{\frac{i-n}{2}}(2i-1)(2i-3)\ldots(i+n+1)}(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}},$$

где $\mu=\cos\theta$.

Функции $Q_n^{(i)}(\mu)$, как показал О. Родриг (1816), могут быть представлены формулой

$$Q_n^{(i)}(\mu)=(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^nQ^{(i)}(\mu)}{d\mu^n}=(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}\frac{1}{2^i(i!)}\cdot\frac{d^{i+n}}{d\mu^{i+n}}[(\mu^2-1)^i].$$

Затем Лаплас получает равенство, которое в современных символах имеет вид

$$Q^{(i)}(\cos\gamma)=Q^{(i)}(\cos\theta)\,Q^{(i)}(\cos\theta')+$$
$$+2\sum_{n=1}^{i}\frac{(i-n)!}{(i+n)!}Q_n^{(i)}(\cos\theta)\,Q_n^{(i)}(\cos\theta')\cos n(\omega-\omega').$$

В этом равенстве и заключается теорема сложения полиномов Лежандра.

В той же работе, в связи с основной своей задачей о притяжении тел и фигуре планет, Лаплас говорит о разложении какого-либо многочлена от $\mu=\cos\theta$, $\sqrt{(1-\mu^2)}\cos\omega$, $\sqrt{(1-\mu^2)}\sin\omega$, заданного на сфере радиуса a, в ряд вида

$$Y^{(1)}(\theta,\omega)+Y^{(2)}(\theta,\omega)+\ldots,$$

где $Y^{(i)}(\theta,\omega)$ — сферическая функция, удовлетворяющая уравнению (51) в частных производных. Лаплас здесь приходит к выводу, что в таком ряде члены $Y^{(i)}(\theta,\omega)$ должны быть линейными комбинациями вида

$$Y^{(i)}(\theta,\omega)=\sum_{n=0}^{i}(A_{in}\cos n\omega+B_{in}\sin n\omega)\,Q_n^{(i)}(\cos\theta),$$

где A_{in}, B_{in} — постоянные коэффициенты. Такой тригонометрический многочлен $Y^{(i)}(\theta,\omega)$ в современной литературе называется общей сферической функцией степени i.

Исследования Лежандра и Лапласа, касающиеся сферических функций, тесно переплетались между собой и находились во взаимодействии.

Результаты исследований своих полиномов Лежандр собрал во втором томе знаменитых «Упражнений по интегральному исчислению» (Exercices de Calcul Intégral. Paris, 1817).

Лаплас развивал теорию сферических функций в более общей форме, нежели Лежандр. Лаплас первый разработал теорию сферических функций, в том числе полиномов Лежандра, в связи с дифференциальными уравнениями (1782). В пятом томе своего «Трактата по небесной механике» (1825) Лаплас представил полиномы Лежандра целого положительного индекса i в виде определенного интеграла

$$Q^{(i)}(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\mu + \sqrt{-1}\,\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega)^i\,d\omega,$$

где $\mu = \cos\theta$. Эта формула входит теперь во все учебники по теории специальных функций. В том же томе «Трактата по небесной механике» Лаплас получил асимптотическую оценку полиномов Лежандра без остаточного члена:

$$Q^{(i)}(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\theta}},$$

где i — большое число. Во втором томе той же книги (1799) он доказал ортогональность на сфере общих сферических функций $Y^{(i)}(\theta, \omega)$, опираясь на дифференциальное уравнение (51) в частных производных. Здесь же он поставил задачу о разложении произвольной функции $Y(\theta, \omega)$ в ряд по сферическим функциям $Y^{(i)}(\theta, \omega)$, хотя не мог еще установить условия такого разложения.

Вопросом о законности разложения функции двух переменных по сферическим функциям занялся впервые Пуассон (1831). Первое строгое доказательство разложимости дважды дифференцируемой функции двух переменных по сферическим функциям было дано Дирихле (1837). Позднее Бонне, Дини и, наконец, Дарбу доказывали допустимость разложения при более общих предположениях.

С точки зрения современной математической строгости, в рассуждениях Лапласа, относящихся к различным разложениям в ряды и предельным переходам, еще много недоставало. Ряды вида (50), в которых $u^{(i)}(\theta,\omega)$ — сферические функции, как выяснилось позднее, в случае, когда притягиваемая точка находится вблизи поверхности притягивающего тела или на этой поверхности, лишь в редких случаях оказываются сходящимися. В XX в. математики предпочли заменить метод Лапласа другими методами разложения объемного потенциала (А. М. Ляпунова, Вавра). Однако, несмотря на отмеченные недостатки, богатые идеями исследования Лапласа, опирающиеся на понятие объемного потенциала и его связь с дифференциальным уравнением (47) в частных производных, принадлежат к числу основополагающих в области уравнений в частных производных. Исследуя потенциальную функцию для однородных эллипсоидов, Лаплас фактически пользовался обобщенным методом Фурье. На этом пути Лаплас создал в главных чертах общую теорию сферических функций, подошел к разложению произвольной функции двух аргументов в ряд по сферическим и наметил пути этого разложения. Дальнейшее развитие идей Лапласа, решение его методом новых задач, связанных с его уравнением, способствовали постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. При этом разложение функции, заданной на сфере, в ряд по сферическим функциям стало приобретать особенно важное значение. Вместе с разложениями по другим специальным функциям оно послужило основой для формулировки в конце 20-х годов XIX в. обобщенного метода Фурье разложения функций в ряды. Эта формулировка впервые появилась в ранних работах М. В. Остроградского, относящихся к теории теплопроводности, а вслед за ним — в работах французских математиков Ламе и Дюгамеля.

Дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными

Начиная с 30-х годов XVIII в. — времени появления открытий Л. Эйлера и А. Клеро, связанных с полным дифференциалом функции многих переменных и первых подходов к решению простейших дифференциальных уравнений в частных производных, в области таких уравнений был накоплен значительный опыт. Было получено большое число конкретных уравнений в частных производных, к которым приводили задачи механики, астрономии, физики и геометрии. Стало ясным огромное значение теории таких уравнений в развитии точного естествознания. Начали формироваться и получили значительное развитие важнейшие методы решения уравнений в частных производных гиперболического и эллиптического типа.

Из основных трех типов уравнений с частными производными второго порядка, известных с настоящее время, в XVIII в. еще не рассматривались уравнения параболического типа. Но с ними математики встретились уже в самом начале следующего столетия, в теории теплопроводности.

Теории и методы, возникшие в XVIII в., с самого начала следующего столетия усиленно развиваются и обогащаются в связи с весьма расширившимися приложениями. Уравнения в частных производных становятся основным математическим аппаратом не только механики, но и новых областей физики — термодинамики, электродинамики, теории магнетизма. В теории уравнений в частных производных в это время находят отражение новые идеи и методы, созданные в ходе общей реформы всего математического анализа. В частности, появляются теоремы существования и единственности решений уравнений.

В теории уравнений с частными производными первого порядка в XIX в. разрабатываются общие способы интегрирования, пригодные в случае любого числа независимых переменных. Один из таких способов был найден Пфаффом в 1814 г. Затем Коши (1819) и независимо от него Якоби (1837) упростили решение Пфаффа, применив метод характеристик. После этого метод характеристик стал широко применяться для разных видов дифференциальных уравнений в частных производных различных порядков. Большое значение имели разработанные Якоби в связи с работами по механике методы интегрирования нелинейного уравнения первого порядка со многими независимыми переменными.

В теории уравнений с частными производными высших порядков в первой половине XIX в. было получено много важных достижений в решении различных краевых задач. В это время (1807) Фурье впервые вывел общее дифференциальное уравнение теплопроводности в изоморфном твердом теле, как мы теперь говорим, параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

и, решая его, глубоко разработал мощный, носящий теперь его имя метод разделения переменных (ср. стр. 415). В связи с методом Фурье стоят его известные исследования по теории тригонометрических рядов. В первой половине XIX в. усиленно разрабатывается теория потенциала под воздействием запросов электростатики, электродинамики и теории магнетизма. Над решением краевых задач, возникающих в теории теплопроводности и теории потенциала, работало огромное число крупнейших математиков XIX в., таких, как Гаусс, Фурье, Пуассон, Грин, М. В. Остроградский и т. д.

В XIX в. развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков пошло по пути создания отдельных теорий со своими методами и постановками задач для основных типов таких уравнений, называемых гиперболическими, эллиптическими и параболическими. Впрочем, сама классификация уравнений в частных производных была дана Дюбуа-Реймоном лишь во второй половине XIX в.