ДЕСЯТАЯ ГЛАВА

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Функционалы и их экстремумы

Во многих задачах анализа и математического естествознания важную роль играет отыскание экстремумов переменных величин, теперь называемых функционалами. Говорят, что задан функционал, если каждой функции некоторого класса поставлено в соответствие определенное число. Функционалами, в частности, являются величины, зависящие от выбора плоской кривой. В качестве простого примера рассмотрим задачу об отыскании кратчайшей линии, соединяющей две данные точки плоскости. Сформулируем задачу более точно: пусть $y = f(x)$ — линия на плоскости, проходящая через две фиксированные точки A (a, c) и B (b, d), причем функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную (рис. 31). Как известно, длина кривой выражается интегралом

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Каждой функции $f(x)$ рассматриваемого класса соответствует определенное число J — ее длина. Следовательно, $J[y(x)]$ — это функционал. Задача состоит в нахождении кривой, которой соответствует наименьшее значение функционала J.

Вариационное исчисление — это теория экстремумов функционалов $J[y(x)]$. Как известно, в теории экстремумов дифференциального исчисления отыскиваются значения переменной x, при которых имеет максимум или минимум данная функция $y = f(x)$.

В вариационном исчислении разыскиваются функции $y = f(x)$, при которых имеет максимум или минимум данный функционал $J[y(x)]$. Эта аналогия между дифференциальным исчислением и вариационным сыграла значительную роль в развитии последнего.

Простейшая общая задача вариационного исчисления формулируется так: среди всех кривых $y(x)$, проходящих через две данные точки A (a, c) и B (b, d), выбрать ту, на которой имеет максимум или минимум интеграл J:

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\, dx.$$

На протяжении всей истории вариационного исчисления его основные методы создавались для простейшей задачи, а затем распространялись на более широкие классы.

Такова, например, задача об экстремуме функционалов, зависящих от пространственных кривых $y = y(x)$, $z = z(x)$:

$$J = \int_a^b f(x, y, z, y', z')\,dx.$$

В еще более широкой постановке интеграл J зависит от n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их первых производных $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ или от производных до порядка m. Другим обобщением простейшей задачи является задача на экстремум кратных интегралов.

Естественным видоизменением этих проблем является также отыска-

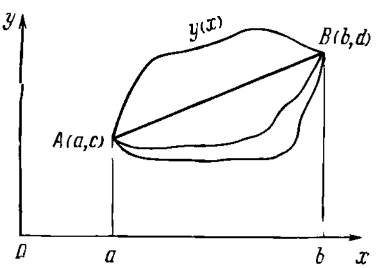

Рис. 31

ние кривой, дающей экстремум, в классе кривых, соединяющих данную точку и данную кривую, или данную точку и данную поверхность. Это так называемые задачи с подвижными концами.

Многие вопросы приложений приводят к задаче разыскания кривой, дающей экстремум интегралу J в классе кривых, на которых интеграл K принимает данное значение l. Такие задачи называются изопериметрическими. Термин произошел от одной из задач этого типа: среди всех замкнутых кривых с одним и тем же периметром, т. е. одной длины l, найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Вариационные проблемы в XVII в.

Некоторые изопериметрические задачи были поставлены и изучены еще в древности. Как говорилось, древнегреческие математики установили, что из всех плоских изопериметрических фигур наибольшую площадь имеет круг, а среди тел с одной и той же площадью поверхности (изоповерхностных) наибольший объем имеет шар (см. т. I, стр. 139). В древности были высказаны первые вариационные принципы физики. Так, Герон Александрийский доказывал, что при движении луча света угол падения равен углу отражения, опираясь на то, что луч света должен идти наикратчайшим путем. «Если,— писал Герон,— природа не хочет попусту обводить кругом (луч) нашего зрения, то она изломит его под равными углами»[1]. Идеи Герона стимулировали в известной мере оптические изыскания Ферма.

[1] *Hero von Alexandrien.* Mechanik und Katoptrik, herausg. und übers. L. Nix und W. Schmidt. *Heroni Alexandrini.* Opera omnia, Bd. 2. Leipzig, 1900, S. 305.

В XVII в. теория изопериметров привлекла внимание Кеплера и затем Галилея. Упомянем, что в связи с изучением падения тел Галилей поставил задачу о брахистохроне — кривой линии, падая по которой с нулевой начальной скоростью тяжелая точка скорее всего опустится из одной данной точки в другую. Опираясь на данные опыта, Галилей доказал, что скатывание по дуге круга происходит быстрее, чем по стягивающей ее хорде. Но он ошибался, когда утверждал, что брахистохрона является дугой круга.

Пьер Ферма в 1662 г. положил в основу исследования закона преломления света принцип кратчайшего времени. По мнению Ферма, «природа действует наиболее легкими и доступными путями». Конкретизируя эту идею, он писал: «Подобно тому, как Галилей, рассматривая движение тяжелых тел в природе, измерял отношение его не столько расстоянием, сколько временем, мы также рассматриваем не кратчайшие расстояния или линии, а те, которые могут быть пройдены легче, удобнее и за более короткое время» [1]. Так в геометрической оптике был разработан принцип кратчайшего времени. Рассмотрение аналогичных задач привело в дальнейшем к принципу наименьшего действия в механике.

Мы не будем останавливаться подробно на отдельных вариационных задачах вплоть до конца XVII в., так как до этого времени способы их решения были индивидуальными и не могли еще составить специального исчисления.

Принципиально новая обстановка сложилась в конце XVII в. Успехи в решении экстремальных задач дифференциального исчисления позволили приступить к успешному исследованию вариационных задач и разработать специфический аппарат их решения. Само возникновение вариационного исчисления и его выделение в самостоятельную математическую дисциплину было вызвано необходимостью решить ряд экстремальных задач геометрии, механики, физики.

Первой из вариационных задач этого периода была задача, рассмотренная Ньютоном в поучении к 34-му предложению VII отдела его «Математических начал натуральной философии»: найти тело вращения, которое при движении в жидкости по направлению своей оси испытывает наименьшее сопротивление. При этом предполагается, что сопротивление жидкости пропорционально квадрату скорости. Ньютон нашел решение задачи в виде некоторой пропорции, которую в наших обозначениях можно выразить дифференциальным уравнением

$$\frac{yy'^3}{(1+y'^2)^2}=\frac{a}{4}.$$

Уравнение можно проинтегрировать подстановкой $y' = p$. В результате

$$y=\frac{a}{4}\,\frac{(1+p^2)^2}{p^3}, \qquad x=\int\frac{dy}{p}=\frac{a}{4}\left[\frac{3}{4p^4}+\frac{1}{p^2}+\ln p\right]+C.$$

Ньютон указал на практическую ценность рассматриваемой задачи: «Я считаю, что это замечание может быть небесполезно при построении судов» [2]. Сам Ньютон не дал никакого указания на метод, которым он

---

[1] *П. Ферма.* Синтез для рефракции. Перевод Ю. Х. Копелевич.— В кн.: Вариационные принципы механики. М., 1959, стр. 7.

[2] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 429.

получил свою пропорцию. Быть может, именно этим объясняется то обстоятельство, что задача Ньютона не привлекла к себе вначале внимания ученых и не оказала заметного влияния на возникновение вариационного исчисления.

Исторически первой задачей, возбудившей к себе общий интерес среди математиков, была задача о брахистохроне, опубликованная И. Бернулли в «Acta Eruditorum» в 1696 г. Еще раньше И. Бернулли сообщил эту задачу Лейбницу. Последний решил ее тотчас по получении письма и предложил И. Бернулли опубликовать эту «прекрасную и до сих пор неслыханную задачу» для состязания между математиками, предоставив

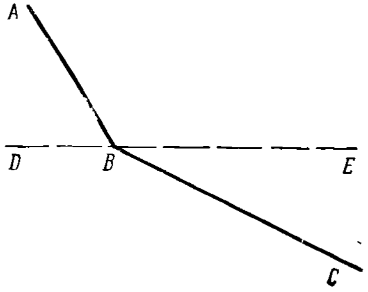

Рис. 32

годичный срок для решения. На конкурс было представлено три решения. Одно из них принадлежало Лопиталю, другое — Я. Бернулли, третье было опубликовано в «Philosophical Transactions» без подписи автора. Но И. Бернулли тотчас угадал в неизвестном авторе Ньютона: по его выражению, «льва узнают по его когтям». Из предложенных решений, показавших, что искомая кривая является циклоидой, наиболее интересны решения И. Бернулли, Лейбница и Я. Бернулли. Ньютон дал ответ, не приведя доказательства. Решение Лейбница представляет собой попытку приложить методы дифференциального исчисления к решению вариационных задач. Он пишет И. Бернулли об основах своего метода: «Заменив кривую многоугольником с бесконечно большим числом сторон, я вижу, что из всех возможных случаев (кривой) легчайшего ската будет, если взять на ломаной три какие-нибудь точки, или вершины A, B, C, причем точка B будет такой, что из всех точек, расположенных на горизонтальной прямой DE, эта единственная дает легчайший путь от A к C. Таким образом, дело сводится к решению легкой задачи: даны две точки A и C и проходящая между ними горизонтальная прямая DE; найти на этой прямой такую точку, чтобы путь ABC был наилегчайшим» [1] (рис. 32).

Следовательно, метод, предложенный Лейбницем, состоит в том, что кривая заменяется ломаной. Затем выбираются три смежные вершины ломаной и рассматривается, как должна быть расположена на данной прямой средняя вершина B при неподвижно закрепленных крайних вершинах A и C, чтобы падение по ломаной ABC происходило в кратчайшее время. Таким образом, вариационная задача сведена к задаче на отыскание обыкновенного экстремума.

---

[1] *G. W. Leibniz.* Mathematische Schriften, Bd. 3. Halle, 1855, S. 310.

Этим методом Лейбниц решил одну конкретную задачу — задачу о брахистохроне. В работах Лейбница не рассматриваются вариационные задачи, поставленные в общем виде, не изучается какой-либо класс задач.

Первое опубликованное решение задачи о брахистохроне принадлежит И. Бернулли. Оно не носит характера развития идей Лейбница. Возникшая как конкретная механическая задача, задача о брахистохроне решалась с помощью физических и механических аналогий. Руководящей идеей в этом доказательстве была идея оптико-механической аналогии. Он пишет: «Я укажу, что мною открыто удивительное совпадение между кривизной луча света в непрерывно изменяющейся среде и нашей брахистохронной кривой» [1].

И. Бернулли рассматривает движение луча из одной точки до другой в некоторой среде с непрерывно меняющейся плотностью. Путь луча является в силу принципа Ферма брахистохроной — кривой быстрейшего прохождения луча. В силу оптико-механической аналогии рассуждения в точности повторяются, если говорить не о луче света, а о шарике, падающем по брахистохроне. Поэтому И. Бернулли мог использовать известное свойство кривой наибыстрейшего прохождения луча — синусы углов наклона к вертикальной линии повсюду находятся в отношении скоростей. Это свойство брахистохроны Бернулли выражает дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

интегрирование которого показывает, что искомая кривая является циклоидой.

Решение Я. Бернулли (Acta Eruditorum, 1697) интересно, поскольку оно представляет первую попытку приложения общих идей Лейбница к решению конкретной вариационной задачи. В нем Я. Бернулли дает по существу вывод того свойства брахистохроны, которым И. Бернулли воспользовался как готовым, взяв его из сочинений Гюйгенса и Ферма. Наконец, в этом решении впервые в явной форме был высказан принцип, хотя и не обладающий полной общностью, но приложимый к широкому классу задач. Этот принцип, сыгравший значительную роль в первоначальном периоде развития вариационного исчисления, утверждает, что если какая-нибудь кривая обладает свойством максимума или минимума, то каждая ее бесконечно малая часть обладает тем же свойством. И. Бернулли и Лейбниц в своих доказательствах опирались на этот принцип, но явно его не высказывали. В дальнейшем были рассмотрены большие классы задач, к которым принцип Бернулли неприменим.

Вместе с решением задачи о брахистохроне Я. Бернулли сформулировал более общую задачу о кривой, по которой материальная точка в кратчайшее время достигнет данной вертикальной прямой (рис. 33). Так впервые была поставлена задача с подвижным концом. Я. Бернулли не дал ее решения.

Одновременно он сформулировал изопериметрическую задачу: «Среди всех кривых BFN (рис. 34) равной длины найти ту, произвольные степени или корни ординат PF или дуг BF которой образуют другую кривую BZN, для которой площадь $BPNZB$ будет наибольшей или наименьшей».

---

[1] *И. Бернулли.* Избранные сочинения по механике. Под редакцией и с примечаниями В. П. Егоршина. М.—Л., 1937, стр. 23.

Решение задачи дал Я. Бернулли (Acta Eruditorum, 1700 и 1701). При этом он впервые заметил, что, для того чтобы удовлетворить добавочному, по сравнению с простейшей задачей, условию, необходимо варьировать уже не одну ординату, как предложил Лейбниц, а две бесконечно близкие ординаты искомой кривой.

В 1697 г. И. Бернулли в «Journal des Savants» была поставлена еще одна экстремальная задача: провести кратчайшую линию между двумя заданными точками на произвольной поверхности. Первые исследования были выполнены Лейбницем и Я. Бернулли, но наиболее важный результат

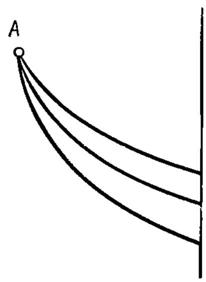

Рис. 33

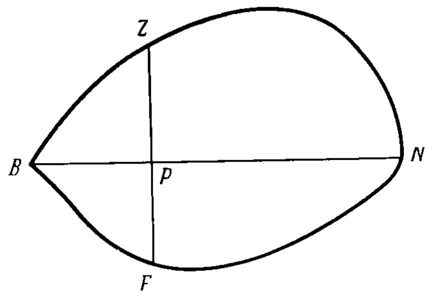

Рис. 34

был найден самим И. Бернулли. Он установил, что в любой точке кратчайшей линии соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к касательной плоскости поверхности, что, как известно, есть основное свойство геодезических. Об этом И. Бернулли сообщил Лейбницу в письме 26 августа 1698 г. Как пришел он к своему выводу и каково было полученное им дифференциальное уравнение, о котором он упоминает в том же письме, неизвестно. Изучение геодезических линий пополнило класс вариационных задач и одновременно дало толчок развитию аналитической геометрии в пространстве, так как потребовалось изучать поверхности в пространстве.

По мере накопления решенных вариационных задач выявилось и то общее, что объединяло эти разные по содержанию задачи, и то особенное, что выделяло их среди всех экстремальных задач математического анализа. Создавалось все больше предпосылок для создания вариационного исчисления. Основы этой дисциплины были заложены в первую очередь в работах Лейбница и братьев Бернулли. Вариационное исчисление было создано в начале XVIII в. Л. Эйлером.

Вариационное исчисление Эйлера

Общий метод решения вариационных задач был разработан Эйлером в 1726—1744 гг. Вначале в 1726 г. Эйлер поставил задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде. В 1728 г. И. Бернулли, понимая всю важность задачи о геодезических линиях, предложил ему заняться и этой проблемой.

В том же 1728 г. Эйлер дал общее решение этой задачи — вывел дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности (ср. стр. 188). Однако Эйлера не удовлетворяла малая общность приемов, применяемых для решения вариационных задач. Он стал искать общий метод для их решения. И вот в статье Эйлера «Общее решение изопериметрической проблемы, поставленной в самом широком смысле» (Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis. Commentarii, (1732—1733) 1736) впервые появляется общая постановка вариационной задачи.

Из первых же слов трактата видно, что Эйлер выделяет в качестве предмета исследования не отдельные конкретные задачи, а построение общей теории. В работе впервые дается общий метод решения вариационных задач, который затем в течение 12 лет Эйлер только совершенствовал, не затрагивая его принципиальных основ.

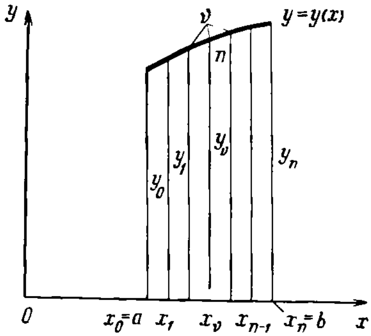

Рис. 35

Наконец, в 1744 г. отдельным изданием вышел трактат, в котором Эйлер собрал почти все свои исследования предыдущих лет. В этом сочинении «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae et Genevae), Эйлер изложил общий «метод максимумов и минимумов в применении к кривым линиям» и решил с его помощью как все поставленные до него вариационные задачи, так и многие другие.

Эйлер сводит вариационную задачу к задаче на экстремум функций многих переменных следующим образом. Пусть требуется найти экстремум интеграла

$$\int z(x, y, y')\,dx$$

с закрепленными концами, Эйлер делит отрезок интегрирования $[a, b]$ на n частей $[dx = \frac{b-a}{n}]$ (рис. 35). Обозначим точки деления $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие ординаты $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Производные в точках y_i Эйлер заменяет конечными разностями

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{dx},$$

а рассматриваемый интеграл $\left[\int Z(x, y, y')\,dx\right]$ суммой

$$\sum_{i=0}^{n} Z\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}\right) dx, \qquad (1)$$

которая представляет собой функцию $n+1$ переменных (ординат y_0, y_1, $y_2,\ldots, y_n$).

Затем Эйлер переходит от искомой кривой к соседней, придавая ординате y_ν некоторое бесконечно малое приращение $n\nu$. Теперь, согласно правилам дифференциального исчисления, нужно найти дифференциал суммы (1) и приравнять его нулю. Но в сумме (1) от y_ν зависят только два слагаемых:

$$Z\left(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{dx}\right)dx, \qquad Z\left(x_\nu, y_\nu, \frac{y_{\nu+1}-y_\nu}{dx}\right)dx.$$

Дифференцируя их, Эйлер получает

$$dZ(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, p_{\nu-1}) = Mdx_{\nu-1} + Ndy_{\nu-1} + Pdp_{\nu-1},$$
$$dZ(x_\nu, y_\nu, p_\nu) = M'dx_\nu + N'dy_\nu + P'dp_\nu,$$

где $y_i' = p_i$.

Непосредственный подсчет дает:

$$dx_{\nu-1} = dx_\nu = dy_{\nu-1} = 0, \qquad dy_\nu = +n\nu,$$
$$dp_{\nu-1} = +\frac{n\nu}{dx}, \qquad dp_\nu = -\frac{n\nu}{dx}.$$

Отсюда следует

$$d\left[\sum_{i=0}^{n} Z\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{dx}\right)dx\right] = Pn\nu + N'n\nu dx - P'n\nu =$$
$$= Pn\nu + Nn\nu dx - P'n\nu = n\nu(-dP + Ndx) = 0$$

(Эйлер заменяет $P' - P = dP$, $N' = N$, так как он считает равными величины, отличающиеся на бесконечно малые второго порядка), откуда

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad Z_y - \frac{d}{dx}Z_{y'} = 0.$$

Так с помощью метода, позже названного прямым, Эйлер привел задачу об экстремуме интеграла

$$\int Z(x, y, y')\,dx$$

к решению дифференциального уравнения

$$Z_y - \frac{d}{dx}Z_{y'} = 0.$$

Затем Эйлер нашел дифференциальное уравнение

$$Z_y - \frac{d}{dx}Z_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}Z_{y''} - \ldots = 0$$

и для задачи об экстремуме интеграла

$$\int Z(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx,$$

в котором подынтегральная функция содержит производные любого порядка.

На большом числе примеров (свыше 60) Эйлер продемонстрировал силу своего метода. Рассматривая вариационные задачи (уже решенные ранее, как задача о брахистохроне, задача Ньютона и другие, и задачи более сложные, которые прежде решить не удавалось), Эйлер записывал для них соответствующие дифференциальные уравнения, а затем искусными путями решал эти уравнения.

Эйлер разработал также метод решения задач на условный экстремум, когда искомая кривая разыскивается в классе кривых, обладающих некоторым общим свойством. Эту обобщенную изопериметрическую задачу Эйлер решает, придавая приращения уже не одной ординате, как раньше, а двум соседним ординатам.

Эйлер решил большое число механических задач с помощью созданного им вариационного исчисления. Он исследует свойства упругих кривых, решает задачи об изгибе упругой пластинки, о критической нагрузке колонн, о движении в несопротивляющейся среде и в жидкости. При этом Эйлер впервые дал четкую математическую формулировку принципу наименьшего действия, который в то время стоял в центре внимания математиков, механиков и философов:

$$\int mvds = \min.$$

Создание метода вариаций

Существенным недостатком метода Эйлера была его громоздкость. Уже в случае простейшей задачи на экстремум интеграла

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

для получения соответствующего дифференциального уравнения Эйлеру приходится проводить трудные вычисления. Выводы значительно усложняются, если перейти к более общим вариационным задачам.

Эйлер не рассматривал в своей книге пространственной задачи на экстремум интеграла

$$\int_a^b f(x, y, z, y', z')\, dx$$

и задач на экстремумы кратных интегралов. А именно такие сложные задачи возникали в практике, и прежде всего в механике. При распространении на эти задачи своего метода, весьма громоздкого уже в простейшем случае, Эйлер встречал значительные трудности. Необходимо было усовершенствовать математический аппарат. Эйлер хорошо понимал это. Так, решая пространственную задачу о движении жидкости, он пишет, что созданный им «метод достаточно разработан только для фигур на плоскости». Эйлер продолжал искать новые методы решения вариационных задач. Он стремился решить вариационные задачи, используя аналогию с дифференциальным исчислением. Эйлер понимал, что речь идет об объектах более общей природы, о функциях, зависящих от линии (по современной терминологии, о функционалах).

И вот на эти более общие функции Эйлер хочет распространить основной принцип, с помощью которого строится теория экстремума функций конечного числа переменных: в точке экстремума производная равна нулю. В «Методе нахождения» Эйлер ищет метод, который позволил бы к решению вариационных задач непосредственно применить аппарат дифференциального исчисления. При этом Эйлер пришел к необходимости доказать некоторое соотношение, послужившее исходным пунктом в исследованиях Лагранжа:

$$f_{y'}\,dy' + y'df_{y'} = 0 \tag{2}$$

или в обозначениях Эйлера

$$Pdp + pdP = 0.$$

Лагранж доказал соотношение (2), применяя интегрирование по частям, и таким образом получил недостающее звено в рассуждениях Эйлера, посвященных созданию нового вариационного метода. Изучение работ Эйлера и Лагранжа и их переписки делает совершенно очевидной тесную связь работ Лагранжа по созданию метода вариаций с исследованиями Эйлера. Лагранж впервые изложил свой метод в письме к Эйлеру в 1755 г. В это время Эйлер был уже всемирно известным ученым, а Лагранжу было девятнадцать лет, и он еще не опубликовал ни одной работы. Эйлер немедленно ответил на письмо Лагранжа, и между ними установилась переписка, продолжавшаяся много лет. В первом письме Лагранж ограничился изложением своего метода. Он написал, что мог бы решить отдельные задачи новым методом, но для начала не входит в частности. Эйлер горячо одобрил новый метод, увидев в нем значительный шаг вперед, и призвал Лагранжа развивать его.

В переписке Лагранжа с Эйлером рассматривались конкретные вариационные задачи. Лагранж рассмотрел задачу о брахистохроне в обобщенной постановке. Эйлер и его предшественники решали эту задачу в случае, когда материальная точка под действием силы тяжести движется из точки A в фиксированную точку B. Лангранж исходил из условия: материальная точка движется из данной точки A в какую-нибудь точку на фиксированной кривой Ф. В качестве брахистохроны он получил циклоиду, пересекающуюся с кривой Ф под прямым углом. Затем он поставил задачу о движении материальной точки под действием силы тяжести из A в B через заданную точку C. Эйлер указал в ответном письме, что искомая кривая должна состоять из дуг циклоиды, так что каждый отрезок пути она будет пробегать в кратчайшее время.

Ознакомившись с методом Лагранжа, Эйлер начала работать над его усовершенствованием и развитием. В письмах юного Лагранжа он нашел то, что давно искал. Уже в 1756 г. Эйлер сообщил Берлинской академии о двух работах, посвященных методу вариаций. Однако он не спешил с публикацией своих сочинений. Причина выяснилась вскоре: в письме от 2 октября 1759 г. Эйлер написал Лагранжу, что у него имеются новые работы по вариационному исчислению, но он пока не хочет их опубликовать, чтобы не умалить заслуг Лагранжа в этом вопросе.

Первой работой Лагранжа по вариационному исчислению был «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул» (Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. Miscellanea Taurinensia, (1760—1761) 1762).

Во вводной части Лагранж, отправляясь от «Метода нахождения» Эйлера, отмечает те главы книги, которые Эйлер посвятил поискам нового метода. Непосредственно за этим Лагранж в нескольких предложениях излагает основы метода вариаций. Для решения задачи об экстремуме интеграла Лагранж предлагает по аналогии с теорией экстремума в дифференциальном исчислении найти производную рассматриваемого выражения и приравнять ее нулю. Для отыскания производной он вводит новый знак дифференцирования δ. В случае простейшей задачи об экстремуме интеграла

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx$$

имеем

$$\delta \int_a^b f(x, y, y')\,dx = 0 \text{ и } \int_a^b \delta f(x, y, y')\,dx = 0.$$

Аналогично соотношению

$$df = f_y dy + f_{y'} dy'$$

Лагранж пишет

$$\delta f = f_y \delta y + f_{y'} \delta y'.$$

Отсюда он получает

$$\int [f_y \delta y + f_{y'} \delta y']\,dx = 0.$$

Далее Лагранж применяет интегрирование по частям

$$\begin{gathered} \int_a^b f_{y'} \delta y' dx = f_{y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} f_{y'} dx, \\ \int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) \delta y dx + f_{y'} \delta y \Big|_a^b = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Подынтегральное выражение, приравненное нулю, дает искомое уравнение Эйлера

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

а внеинтегральные члены — условия для концов кривой.

Так Лагранж чрезвычайно просто вывел уже известное дифференциальное уравнение Эйлера для задачи об экстремуме интеграла $\int f(x, y, y')\,dx$. Затем Лагранж показал, что его методом легко найти дифференциальное уравнение и для более сложной пространственной задачи об экстремуме интеграла

$$\int f(x, y, z, y', z', y'', z'', \ldots)\,dx.$$

Для этого случая он получил систему двух дифференциальных уравнений:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \ldots = 0,$$

$$f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{z''} - \ldots = 0.$$

Метод Лагранжа позволяет непосредственно применять к вариационным задачам аппарат дифференциального исчисления и решать таким образом много новых вариационных задач, например задачу об экстремуме кратного интеграла. Был рассмотрен интеграл

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy,$$

где $dz = pdx + qdy$, соответствующий некоторой поверхности. Для искомой поверхности Лагранж получил уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

До Лагранжа удавалось решать только задачи с закрепленными концами. Он заметил, что внеинтегральные члены уравнения (3) доставляют соотношения для концов кривой. Это дало Лагранжу возможность решать задачи с подвижными концами.

Исследования Лагранжа по вариационному исчислению тесным образом связаны с его работой в области механики. Одновременно с первым мемуаром, излагающим метод вариаций, Лагранж опубликовал статью «Приложение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики» (Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique).

Исчисление вариаций позволило Лагранжу решить новые классы задач механики. В первой же задаче, которую он рассматривает в статье, требуется найти движение тела, притягиваемого к произвольному числу неподвижных центров силами, являющимися функциями расстояний. Принцип наименьшего действия приводит к задаче отыскания экстремума интеграла вида

$$\int f(x, y, z, y', z')\, dx$$

в классе пространственных кривых $y(x)$, $z(x)$, метод решения которой до Лагранжа был неизвестен.

Владея гибкими методами решения вариационных задач, Лагранж мог решать задачи механики, приводящиеся к кратным интегралам. К таким задачам он пришел, изучая движение неупругих жидкостей.

Лагранж обобщил принцип наименьшего действия на систему сил

$$\int mvds + \int m_1 v_1 ds + \int m_2 v_2 ds + \ldots + \int m_k v_k ds = \min.$$

Таким образом, оказалось возможным применить принцип наименьшего действия к динамике системы. Якоби позже писал, что лагранжев принцип наименьшего действия есть мать всей нашей аналитической механики. Возможность широкого применения принципа основывается на методе вариаций.

В 1788 г. выходит в свет «Аналитическая механика» (Mécanique analytique) Лагранжа, открывшая новый этап в развитии механики. В этом произведении, написанном через сто лет после «Начал» Ньютона, вся мощь усовершенствованного математического аппарата была использована для построения механики. Результаты Эйлера, Даламбера и других ученых XVIII в. здесь обработаны и развиты с единой точки зрения. Основная для Лагранжа идея построения механики как систематического и гармоничного здания, возводимого на фундаменте единой общей предпосылки, пронизывает «Аналитическую механику».

Лагранж подчеркнул, что в основе решения задач механики лежит соединение принципа наименьшего действия с методом вариаций. Он пишет: «Таков тот принцип, которому, хотя и не вполне точно, я даю здесь название принципа наименьшего действия и на который я смотрю не как на метафизический принцип, а как на простой и общий вывод из законов механики. Этот принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, дает тотчас же все уравнения, необходимые для разрешения каждой проблемы; отсюда возникает столь же простой, сколь и общий метод разрешения проблем, касающихся движения тел» [1].

Таким образом, с Лагранжа началась новая эпоха в развитии вариационного исчисления. Используя метод вариаций, Лагранж значительно усовершенствовал аппарат аналитической механики. Это были открытия большого значения. Однако вначале они встретили холодный прием, так как исчисление вариаций не было понято современниками Лагранжа, и вскоре после выхода в свет его первого мемуара появились неодобрительные отзывы о методе Лагранжа, попытки заменить его или усовершенствовать. Этот холодный прием становится понятным, если учесть, что Лагранж ни при опубликовании своего метода, ни позже не выяснил его сущности, он только утверждал, что его метод основан исключительно на дифференцировании. Естественно, возникали сомнения в возможности применения дифференцирования к новому кругу задач.

Эйлер разъяснил исчисление вариаций, разработал его и ввел в широкую практику. Его работы «Элементы исчисления вариаций» и «Аналитическое изложение метода максимумов и минимумов» (Elementa calculi variationum; Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum. Novi Commentarii, (1764) 1766) сыграли большую роль в развитии нового метода. В них Эйлер назвал новый алгоритм методом вариаций, а математическую дисциплину, изучающую экстремумы интегралов,— вариационным исчислением.

Идеи первого периода творчества Эйлера были надолго забыты. Однако они имеют не только исторический интерес. В конца XIX в. и XX в. прямой метод Эйлера, идея которого состоит в трактовке вариационной задачи как предельной для некоторой задачи на экстремум функции многих переменных, приобрел основное значение. Наряду с конечно-разностным приемом Эйлера развитие получили и другие прямые методы. Эти методы успешно применяются в тех вариационных задачах, для которых уравнение Эйлера не интегрируется в конечном виде, а также для решения самих дифференциальных уравнений, которые удается представить как уравнение Эйлера для некоторой вариационной задачи.

---

[1] *Ж.-Л. Лагранж.* Аналитическая механика, т. I. 1950, стр. 320.

С помощью метода вариаций Эйлер в третьем томе «Интегрального исчисления» нашел дифференциальное уравнение для задачи об экстремуме двойного интеграла с закрепленными границами. Однако ему не удалось решить эту задачу в случае подвижных концов.

В своих работах Эйлер постоянно подчеркивал, что метод вариаций принадлежит Лагранжу.

Эйлер сделал ясным понятие вариации. Он указал, что в вариационном исчислении искомая кривая сравнивается с бесконечно близкой к ней кривой, причем δy, $\delta y'$ не что иное, как бесконечно малые приращения величин y, y', получающиеся при переходе от искомой кривой к соседней

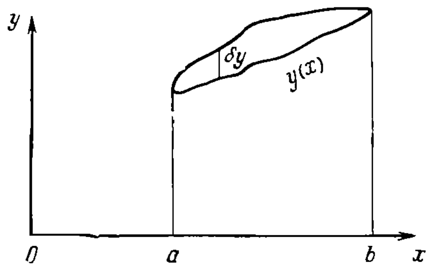

Рис. 36

(рис. 36), т. е. δy — приращение ординаты, $\delta y'$— приращение производной. Выяснилось, что в методе вариаций изучается разность между значениями интегралов, взятых вдоль искомой кривой $y\ (x)$ и соседней с ней кривой

$$\int_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_a^b f(x, y, y')\,dx. \tag{4}$$

Очевидно, что эта разность должна быть положительна в случае, когда на кривой $y\ (x)$ интеграл принимает минимальное значение, отрицательна — когда интеграл принимает максимальное значение.

Разность (4) разлагается по формуле Тейлора

$$\int_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_a^b f(x, y, y')\,dx =$$

$$= \int_a^b [f_y\delta y + f_{y'}\delta y']\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b [f_{yy}\delta y^2 + 2f_{yy'}\delta y\delta y' + f_{y'y'}\delta y'^2]\,dx, \tag{5}$$

причем величины первого порядка малости относительно δy, $\delta y'$ составляют первую вариацию интеграла δJ, имеющую вид

$$\delta J = \int_a^b [f_y\delta y + f_{y'}\delta y']\,dx.$$

Для того чтобы на некоторой кривой $y\ (x)$ интеграл принимал экстремальное значение, необходимо, чтобы на этой кривой первая вариация обращалась в нуль:

$$\delta J = 0$$

или

$$\int_a^b [f_y \delta y + f_{y'} \delta y'] \, dx = 0.$$

Так было получено исходное для рассуждений Лагранжа соотношение $\int_a^b [f_y \delta y + f_{y'} \delta y'] \, dx = 0$, которое он получал простым дифференцированием. Таким образом, Эйлер выяснил сущность метода вариаций. Новое исчисление перестало выглядеть как таинственное дифференцирование, которое неизвестно почему дает правильные результаты для вариационных задач.

Изучение разности (5) с точностью до бесконечно малых второго порядка дало основу для создания теории второй вариации и привело к отысканию достаточных условий экстремума интегралов. Рассмотрение второй вариации явилось новым этапом в развитии вариационного исчисления.

Вторая вариация и условие Лежандра

Задача отыскания условий, достаточных для существования экстремума, тесно связана с вопросом о классификации экстремумов.

Напомним несколько определений. Интеграл J имеет абсолютный максимум на кривой $y(x)$, если выполняется неравенство

$$J[y(x)] \geqslant J[\bar{y}(x)]$$

для всех кривых $\bar{y}(x)$ из рассматриваемого класса. Аналогично определяется абсолютный минимум.

Вариационное исчисление изучает также относительные экстремумы, которые подразделяются на слабый и сильный. Интеграл J достигает на кривой $y(x)$ сильного максимума, если неравенство

$$J[y(x)] \geqslant J[\bar{y}(x)]$$

выполняется для всех кривых $\bar{y}(x)$, удовлетворяющих условию

$$|\bar{y}(x) - y(x)| < \varepsilon,$$

где ε — некоторое положительное число. Таким образом, в случае сильного экстремума искомая кривая сравнивается с кривыми, которые от нее мало отличаются по положению в пространстве, но могут как угодно отличаться по величине производной. Заметим также, что в случае сильного экстремума величину δy можно рассматривать как бесконечно малую, а величина $\delta y'$ может принимать любые значения.

Интеграл J достигает на кривой $y(x)$ слабого максимума, если неравенство

$$J[y(x)] \geqslant J[\bar{y}(x)]$$

выполняется для всех кривых $\bar{y}(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$|\bar{y}(x) - y(x)| < \varepsilon, \qquad |\bar{y}'(x) - y'(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, в случае слабого экстремума искомая кривая $y(x)$ сравнивается с кривыми, мало отличающимися от нее как по положению в пространстве, так и по величине производной, т. е. по направлению касательной. В этом случае обе величины δy и $\delta y'$ можно рассматривать как бесконечно малые.

В методе вариаций разность (4) разлагается по формуле Тейлора, причем величины δy и $\delta y'$ необходимо считать бесконечно малыми, что в XVIII в. молчаливо предполагалось. Поэтому метод вариаций можно применять только для изучения слабого экстремума. Заметим, что всякое условие, необходимое для слабого экстремума, необходимо для сильного и для абсолютного экстремумов, и, в частности, для всех видов экстремумов необходимо, чтобы искомая кривая удовлетворяла уравнению Эйлера. Напротив, достаточные условия, найденные в предположении, что δy и $\delta y'$ бесконечно малы, обеспечивают существование только слабого экстремума и недостаточны для сильного и абсолютного экстремумов.

Понятие о различных видах экстремума складывалось в математике постепенно. Различие между абсолютным и относительным экстремумами было замечено в конце XVIII в. Различие между сильным и слабым экстремумами было обнаружено только во второй половине XIX в. Формирование этих понятий происходило в связи с рассмотрением новых вариационных задач.

В конкретных вариационных задачах, которые рассматривались на первых этапах развития вариационного исчисления, физические, механические или геометрические соображения обычно давали возможность установить, что кривая, полученная как решение уравнения Эйлера, дает экстремум и что это абсолютный экстремум. Это заключение распространялось на все вариационные задачи.

Между тем появился ряд вариационных задач, рассмотрение которых ставило под сомнение справедливость этих взглядов. Прежде всего опровергалось представление о том, что экстремум, который дает кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера, является абсолютным.

В мемуаре «О замечательном парадоксе, встречающемся в анализе максимумов и минимумов» (De insigni paradoxo quod in analysi maximorum et minimorum occurrit, Mém. Ac. St. Pétersbourg, (1809—1810) 1811), Эйлер искал экстремум интеграла

$$\int \sqrt{x(1+y'^2)}\,dx.$$

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$d\frac{y'\sqrt{x}}{\sqrt{1+y'^2}}=0. \qquad (6)$$

Его решение $y=2\sqrt{ax-a^2}+b$ при $b=0$ является параболой $y=2\sqrt{ax-a^2}$ с вершиной в точке $y=0$, $x=a$ (рис. 37).

Эйлер подсчитал значение интеграла, соответствующее отрезку параболы EF, и значение этого интеграла на ломаной $EAVF$. Оказалось, что значение интеграла вдоль ломаной при определенных x и a меньше, чем значение интеграла вдоль параболы. В этом и состоит парадокс — ведь парабола должна давать минимум интегралу. Эйлер заметил, что ломаная также удовлетворяет дифференциальному уравнению (6). Для объяснения парадокса Эйлер использовал аналогию с дифференциальным исчислением. Он указал, что изучаемый там экстремум функции носит локальный характер. Эйлер писал: «Впрочем, достаточно известно, что одна и та же кривая линия часто может содержать много минимальных ординат, которые между собой весьма различаются, только бы каждая ордината была меньше, чем обе близлежащие к ней. Отсюда также можно понять, что, поскольку исчисление приводит нам две кривые между точками F и H, значение для той и другой должно быть минимальным, хотя между собой они весьма различаются» [1].

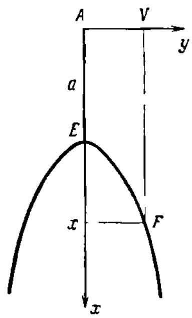

Рис. 37

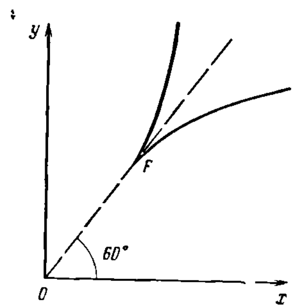

Рис. 38

Таким образом, Эйлер по существу пришел к тому, что экстремумы вариационных задач могут и не быть абсолютными, но смысл относительного экстремума он еще не выяснил.

Затруднения, связанные с характером экстремума, возникли в свое время также в задаче о теле наименьшего сопротивления (см. стр. 454). Кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера, здесь состоит из двух ветвей с общей вершиной в точке F, в которой общая касательная наклонена к оси ox под углом 60°. Ветви кривой неограниченно удаляются; на одной из них $p = y'$ уменьшается от $\sqrt{3}$ до нуля, на второй — растет от $\sqrt{3}$ до ∞ (рис. 38). Между тем было замечено, что минимум может быть уменьшен, а максимум увеличен, если кривую заменить зигзагообразной линией.

В «Мемуаре о способе различения максимумов и минимумов в вариационном исчислении» (Mémoire sur la manière de distinguer les maxima et les minima dans le calcul des variations. Mém. Ac. Paris, 1786) Лежандр доказал, что можно построить ломаные, на которых интеграл

$$\int \frac{y dy^3}{dx^2 + dy^2} = \int \frac{yy'^3}{1 + y'^2} dx,$$

изучаемый в задаче, взятый между двумя фиксированными точками, будет принимать сколько угодно малые значения (а также и ломаные, на которых он будет принимать сколько угодно большие значения). О кривых, удовлетворяющих уравнению Эйлера в данной задаче, Лежандр пишет, что они дают интегралу «относительные или случайные экстремумы».

---

[1] «Mémoires de l'Acad. sci. St.-Pétersb.», v. 3, (1809—1810) 1811, p. 25.

Таким образом, в XVIII в. еще не был ясен смысл понятия относительного экстремума, Ученые ограничивались общими замечаниями об аналогии с дифференциальным исчислением. Проблема была впервые уточнена только полвека спустя Гамильтоном и Якоби, указавшими, что в вариационных задачах искомая кривая сравнивается с «бесконечно близко лежащими линиями». Но и они еще не различали слабый и сильный экстремумы. Между тем в задаче о теле наименьшего сопротивления при замене кривой ломаной не выполняется условие малости $\delta y'$. Поэтому достаточные условия, найденные методом вариаций в предположении, что δy и $\delta y'$ бесконечно малы, не обеспечивают экстремумов в этой задаче.

В 1786 г. А. М. Лежандр в упомянутом выше «Мемуаре о способе различения максимумов и минимумов в вариационном исчислении» нашел критерий, позволяющий установить, дает ли кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера, экстремум рассматриваемому интегралу, и различить, имеют место максимум или минимум. Лежандр использовал аналогию с дифференциальным исчислением. Именно для того, чтобы функция достигла минимума в некоторой точке, достаточно. чтобы в этой точке выполнялись условия:

$$y' = 0, \quad y'' > 0.$$

Лежандр также исходит из того, что для того, чтобы интеграл достигал минимума на некоторой кривой, достаточно, чтобы на этой кривой выполнялись условия:

$$\delta J = 0, \quad \delta^2 J > 0.$$

Чтобы получить достаточные условия экстремума, Лежандр представляет разность (4) двух значений интеграла

$$\int_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

соответствующих произвольной кривой и рассматриваемой кривой $y(x)$, по формуле Тейлора до членов второго порядка малости в виде (5). Первый интеграл в правой части (5) Лежандр интегрированием по частям привел к виду

$$(f_{y'}\delta y)_b - (f_{y'}\delta y)_a + \int_a^b \delta y\,dx\left(f_y - \frac{d}{dx}f_{y'}\right). \tag{7}$$

Так как границы a и b закреплены, то $\delta y = 0$ на концах кривой $y(x)$, поэтому в (7) обращаются в нуль члены $(f_{y'}\delta y)_b$ и $(f_{y'}\delta y)_a$.

Кривая $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, следовательно,

$$\int_a^b \delta y\,dx\left(f_y - \frac{d}{dx}f_{y'}\right) = 0.$$

Таким образом, Лежандр пришел к необходимости исследовать знак интеграла

$$\delta^2 J = \int_a^b (f_{yy}\delta y^2 + 2f_{yy'}\delta y\delta y' + f_{y'y'}\delta y'^2)\,dx.$$

Для этого он прибавляет к подынтегральной функции слагаемое

$$\frac{d}{dx}(v\delta y^2) = \frac{dv}{dx}\delta y^2 + v2\delta y\delta y'$$

и, чтобы величина интеграла не изменилась, добавляет

$$-(v\delta y^2)_b + (v\delta y^2)_a.$$

Таким образом,

$$\delta^2 J = -(v\delta y^2)_b + (v\delta y^2)_a + \\ + \int\left[\left(f_{yy} + \frac{dv}{dx}\right)\delta y^2 + 2\,(f_{yy'} + v)\,\delta y\delta y' + f_{y'y'}\delta y'^2\right]dx,$$

где v — некоторая функция.

Далее функция $v\,(x)$ выбирается так, чтобы под знаком интеграла стоял полный квадрат. Лежандр заметил, что для этого можно взять всякую функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению:

$$f_{y'y'}\left(f_{yy} + \frac{dv}{dx}\right) = (f_{yy'} + v)^2. \tag{8}$$

Лежандр утверждает, что постоянные, входящие в решение v этого уравнения, всегда можно подобрать так, чтобы обращалась в нуль разность

$$-(v\delta y^2)_b + (v\delta y^2)_a. \tag{9}$$

Итак, Лежандр привел вторую вариацию δJ к виду

$$\delta^2 J = \int\limits_a^b f_{y'y'}\left(\delta y' + \frac{f_{yy'} + v}{f_{y'y'}}\,\delta y\right)^2 dx.$$

Отсюда он сделал вывод: для того чтобы экстремаль давала минимум рассматриваемому интегралу, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f_{y'y'} > 0$$

(для максимума достаточно $f_{y'y'} < 0$).

Лежандр вскоре сам указал, что его исследования нельзя считать строгими, потому что необходимо еще дополнительно доказать, что всегда существует функция v, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (8), и что постоянные в функции v можно выбрать так, чтобы обращалось в нуль выражение (9).

Решающее возражение против теории Лежандра выдвинул Лагранж в своей «Теории аналитических функций» (1797). Он заметил, что Лежандр опирался на то, что если подынтегральная функция на некотором отрезке имеет постоянный знак, то и интеграл на этом отрезке имеет тот же знак. Чтобы опровергнуть это утверждение, Лагранж привел пример

$$\int\frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x}.$$

Здесь подынтегральное выражение всегда положительно, а сам интеграл меняет знак, например, при переходе от $x = 1/2$ к $x = 2$.

Лагранж отметил, что утверждение Лежандра справедливо, если подынтегральная функция конечна. Таким образом, чтобы сохранить результаты Лежандра, необходимо было показать, что уравнение (8) имеет конечное решение на отрезке $[a, b]$ интегрирования. Но никаких методов для решения уравнения (8) в это время не было, и Лагранж выразил сомнение в том, что их удастся найти.

Таким образом, вопрос об общем критерии существования экстремума в вариационном исчислении в конце XVIII в. оставался нерешенным.

Дальнейшее развитие вариационного исчисления

Критерий Лежандра, полученный по аналогии с достаточными условиями существования экстремума в дифференциальном исчислении, не обеспечивал экстремума в вариационных задачах. Необходимы были более сильные методы, не имеющие аналогов в дифференциальном исчислении.

Эта задача была решена в XIX в. К. Г. Якоби (1837) впервые рассмотрел совокупность всех экстремалей данной вариационной задачи, т. е. интегральных кривых соответствующего дифференциального уравнения, создав тем самым предпосылки для теории так называемого «поля экстремалей», построенной К. Вейерштрассом. С помощью этой теории Вейерштрасс нашел необходимые и достаточные условия для обоих видов экстремума, различие между которыми было обнаружено в середине века,— эти два вида экстремума получили название слабого и сильного экстремумов.

В начале XIX в. Гауссом и Пуассоном было найдено необходимое условие экстремума для двойного интеграла, а в 1861 г. М. В. Остроградский нашел такое же условие для интегралов любой кратности.

В конце XIX в. результаты Вейерштрасса были перенесены на более общие вариационные задачи. Основным инструментом решения вариационных задач стала теория поля экстремалей, значительно развитая работавшим в Дерпте А. Кнезером и Д. Гильбертом, поставившим задачу развития этой теории в 23-й из своих знаменитых «Математических проблем» (1900). Рассматривая различного вида расстояния между экстремалями, Гильберт тем самым рассматривал различные частные случаи функционального пространства — основного понятия функционального анализа, созданного им вместе с М. Фреше и другими математиками в начале XX в.