ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проследили развитие математики до конца XVIII в., лишь в редких случаях незначительно выйдя за эту границу. Разумеется, 1800 г. не представлял собой характерного рубежа ни в общей истории человечества, ни в истории науки и, в частности, математики. Тем не менее приблизительно к этому времени в математике наметился перелом, по своему значению не уступающий революционным идейным сдвигам Нового времени. В целом XVIII столетие продолжало без существенных перемен линию развития эпохи Декарта, Ферма, Ньютона и Лейбница. Но в это же столетие, особенно к концу его, уже наметились проблемы, а иногда и подходы к их решению, которые привели к новым коренным изменениям в предмете и методе математических исследований. Еще на рубеже XVIII и XIX вв. выступили двое из первого десятка ученых, которым предстояло возглавить дальнейшие пионерские поиски,— мы имеем в виду К. Ф. Гаусса и Б. Больцано. А вскоре за тем начали свою деятельность О. Коши и Н. Г. Абель, Н. И. Лобачевский и Я. Бояи, Э. Галуа и У. Гамильтон, Г. Грассман и А. Кэли.

Темп общественного прогресса и научного развития в XIX в., прежде всего в странах Европы, значительно ускоряется. Под влияниям растущих запросов капиталистического производства и обмена, а также государственных потребностей наука приобретает все большее значение в различных областях человеческой деятельности. Если ранее математизации подверглась главным образом механика, то теперь математические методы находят все более широкое применение во всей физике, во многих вопросах техники, экономической и финансовой деятельности. Важные перемены произошли в организации подготовки научных и технических кадров, исследовательской работы и научной информации. Академии, сохраняя значение крупных научных центров, утрачивают монопольное положение, которое прежде имели в ряде стран. Быстро возрастают число и роль университетов и высших технических школ. Университетский профессор все чаще становится одновременно исследователем; академик все чаще выступает с кафедры перед студентами. Такие перемены неизбежно сопровождались реформой преподавания, охватившей все звенья системы образования. Пример Парижских Политехнической и Нормальной школ с их богатыми программами по физико-математическим наукам оказался убедительным. В университетах создаются физико-математические факультеты или отделения для подготовки специалистов высокой квалификации и вместе с тем более определенного профиля. Почти все крупные математики XIX в. вышли из университетов и других высших школ. Типичной фигурой математика становится состоящий на государственной службе профессор или доцент.

Количественный рост исследований потребовал новых, более специализированных периодических изданий, которые стали выпускать академии, высшие школы и отдельные группы ученых, субсидируемые из государственных или частных средств. Назовем некоторые старейшие журналы: «Annales des mathématiques pures et appliquées» (Ним, 1810—1831), «Journal des mathématiques pures et appliquées» (Париж, с 1836), «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (Берлин, с 1826), «Quarterly journal of pure and applied mathematics» (Лондон, 1857—1929), «Annali di matematica pura ed applicata» (Рим, с 1858), «Математический сборник» (Москва, с 1866). В Париже с 1835 г. стали еженедельно выходить «Comptes rendus de l'Académie des sciences». Все это, естественно, содействовало ускорению темпа исследований. Несколько позднее существенную роль стали играть национальные и — в последние 75 лет — международные съезды.

Мы здесь отметили несколько преимущественно внешних особенностей развития математики в XIX в. В идейном отношении математика перешла на новую, более высокую ступень абстракции, предмет ее стал гораздо более общим, и благодаря этому выросли вширь и вглубь возможности ее приложений. Вплоть до конца XVIII в. практически безраздельно господствовало представление, что теоретическая математика есть наука о величинах, об их порядке и мере, как выразился Декарт. При этом два основных понятия — геометрической величины и отвлеченного количества — считали определенными строго однозначно, в том смысле, что первая может принадлежать только евклидовому пространству не выше трех измерений, а второе должно обладать основными свойствами элементов поля действительных чисел. Все понятия, не укладывавшиеся в такие рамки, например многомерных образов или комплексных мнимых чисел, относили к разряду удобных фикций, допустимых лишь в роли промежуточных звеньев рассуждений. Отдельные ученые иногда задумывались над отвлеченной возможностью нестандартных геометрических или арифметических конструкций, но никто не развил такие мысли последовательно, до конца. В философском плане единственность геометрии и арифметики обосновывалась либо однородностью всех математических свойств реального мира, либо объявлялась следствием априорной однородности всех врожденных математических идей. Революционный переворот в математике XIX в. заключался прежде всего в том, что этим метафизическим представлениям был нанесен сокрушительный удар.

В области геометрии такой удар был нанесен открытием первой системы неевклидовой гиперболической геометрии, с которой в печати выступили Н. И. Лобачевский (1829) и Я. Бояи (1831) и к которой еще раньше пришел Гаусс, оставивший, впрочем, свои мысли, казавшиеся ему слишком смелыми, при себе. Это великое открытие, отчасти подготовленное двухтысячелетними попытками доказать евклидов постулат о параллельных, особенно усилившимися в XVIII в., опровергло догму о единственности геометрии и указало пути построения других геометрических систем, которые не только обогатили саму математику, но и стали служить как новые могучие средства математического естествознания. Методологическое значение открытия Лобачевского и Бояи состояло, в частности, и в том, что априорное убеждение в евклидовости реального мира уступило место чисто научной проблеме геометрических свойств Вселенной и отдельных ее частей — проблеме, решение которой принадлежит физике и астрономии, опирающимся как на опыт и наблюдения, так и на математику. Следующим после открытия гиперболической геометрии шагом вперед явилось создание в 40-е годы Кэли и Грассманом многомерной евклидовой геометрии, получившей в 50-х годах значительное развитие в работах Л. Шлефли, а затем и многомерной проективной и аффинной геометрии, в которых было обобщено учение о проективных и аффинных свойствах фигур трехмерного пространства, развитое Дезаргом и Паскалем, Клеро и Эйлером, Карно, Понселе, Мёбиусом и другими геометрами начала XIX в. Учение о многомерных пространствах вместе с гауссовой внутренней геометрией поверхностей (1827) привели Римана к идее многомерного искривленного пространства (1854). Риман же и Кэли с разных точек зрения подошли к эллиптической геометрии, которая для Римана была пространством постоянной положительной кривизны, а для Кэли — простейшей из проективных метрик. Вскоре Э. Бельтрами показал, что пространство Лобачевского — пространство постоянной отрицательной кривизны, а Ф. Клейн — что оно также есть пространство с проективной метрикой. Идеи Клейна и Римана легли в основу геометрии пространства — времени соответственно специальной и общей теории относительности Эйнштейна. Если Л. Карно и Грассман рассматривали свои проективные и аффинные построения как реализации идей Лейбница о «геометрии положения», то И. Б. Листинг и Риман, развивая ту же идею Лейбница в более широком понимании, положили начало топологии соответственно линий и поверхностей; к Риману же восходят результаты Э. Бетти по топологии многомерных многообразий, развитой в конце XIX в. А. Пуанкаре.

В области арифметики и алгебры первый удар по традиционным представлениям о количестве был нанесен открытием кватернионов Гамильтона и чисел со многими единицами Грассмана (1843—1844). Если гиперболическая геометрия доказала возможность абстрактного неевклидова пространства, то эти гиперкомплексные числовые системы свидетельствовали о возможности некоммутативных алгебр; алгебру же составляют матрицы, теория которых, восходящая к «Арифметическим исследованиям» Гаусса, была построена Кэли. Общую теорию линейных ассоциативных алгебр разрабатывал с 60-х годов Б. Пирс, а затем его сын Ч. Пирс и другие ученые. Работы в этом направлении, значение которых теперь очевидно, сыграли огромную роль в создании векторного и тензорного исчисления; последнее вместе с теорией матриц и теорией групп широко применяется в различных отделах современной физики.

Другим событием величайшей важности в алгебре явилась разработка теории групп Галуа (1830—1832), подготовленная работами Лагранжа, Руффини и Гаусса, а также Абеля (1824), по проблеме решения в радикалах уравнений выше четвертой степени. С помощью своей теории Галуа сумел установить условие, которому удовлетворяют уравнения данной степени, разрешимые в радикалах. Но важность этой теории определялась не только решением труднейшей задачи, для которого она была сперва создана. Галуа выделил и общее понятие поля. Теория целых алгебраических чисел, с одной стороны, и многочленов — с другой, образующих частные случаи общего понятия кольца, привела Р. Дедекинда к выделению и этого важнейшего понятия новейшей математики. Алгебры, о которых мы только что говорили, развивались на первых порах независимо от общей теории колец, примерами которых они являются. Начиная с 70-х годов XIX в. влияние теоретико-групповых идей со все большей силой сказывается на развитии математики в целом, включая геометрию и анализ (Ф. Клейн, С. Ли и др.), а затем оно распространилось, как было упомянуто, и на теоретическую физику.

Несколько ранее, чем в геометрии и алгебре, важные сдвиги произошли и в области математического анализа. Мы касались этого вопроса несколько раз, особенно в седьмой главе, когда говорили о реформе оснований исчисления бесконечно малых, начатой Больцано и Коши и тотчас продолженной Абелем. Через постановку ряда «проблем существования» (интеграла, производной, суммы ряда и т. д.) эта реформа привела к разработке теории функций действительного переменного и в 70-е и 80-е годы к теории множеств Г. Кантора. И здесь имело место своеобразное переплетение чисто теоретических проблем, переходящих в труднейшие проблемы математической логики, с приложениями к естествознанию. Как и теория групп, теория множеств позволила рассмотреть и развить с новой точки зрения многие отделы математики, в том числе (уже в XX в.) теорию вероятностей, получившую благодаря этому не только новое обоснование, но и новые мощные методы исследования. Особо следует заметить, что в ходе изучения множеств функций обнаружились существенные свойства, аналогичные свойствам многомерных пространств, почему их назвали «функциональными пространствами». Возникший на рубеже XIX и XX вв. функциональный анализ оказался с самого начала тесно связанным с разнообразными отделами анализа, геометрии и алгебры, а в наше время служит основным аппаратом квантовой физики.

Наш беглый обзор нескольких направлений математической мысли XIX и отчасти XX в., весьма далекий от полноты, имеет целью показать, сколь глубокие изменения претерпели в течение этого времени фундаментальные понятия пространства и количества. Математика не перестала быть общим учением о пространственных формах и количественных отношениях действительного мира, как ее охарактеризовал почти сто лет назад в «Анти-Дюринге» (1877) Ф. Энгельс, но самые эти формы и отношения наполнились новым богатейшим содержанием. В Древней Греции математика впервые приобрела привычные нам со школьной скамьи черты точной дедуктивной науки и в форме зачатков уже содержала начала многих теорий, получивших развитие в Новое время (включая элементы аналитической и проективной геометрии и анализа). В средние века в математике решительное преобладание получили элементарные дисциплины, и она в главном являлась наукой о постоянных величинах и неизменных геометрических фигурах. В XVII—XVIII вв. в ходе научной революции на первое место выдвинулась математика переменных величин и геометрических преобразований. Наконец, уже в первой половине XIX столетия наша наука стала, если воспользоваться выражением Н. Бурбаки, системой или иерархией структур, восходящей от простого к сложному, от общего к частному. Здесь термин структура означает множество элементов, определяемое только заданием отношения или отношений между его элементами или подмножествами; «природа» элементов в соображение при этом не принимается [1]. При этом место единственного трехмерного евклидова пространства (с его частными случаями

---

[1] См. статью «Архитектура математики» в книге: *Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики. Перевод И. Г. Башмаковой под редакцией К. А. Рыбникова. М., 1963, стр. 245—259.

пространств двух, одного и нулевого измерений) заняли пространства различной геометрической структуры, место поля действительных (или комплексных) чисел — множества элементов с различными алгебраическими структурами; более того, потребовалось введение структур, имеющих уже мало сходства с пространством и числами в узком смысле слова. Понимание предмета математики как иерархии структур не вполне определенно. Зато такое понимание охватывает все известные структуры, как частные случаи, и вместе с тем оставляет открытой возможность дальнейшего присоединения новых математических структур. В конце концов, можно ли и нужно ли дать жесткое, раз навсегда застывшее определение науки, которая постоянно находится в состоянии живого развития и диалектического взаимодействия со всем комплексом других отраслей познания?