§ 10. НЕАССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА

Хотя требование ассоциативности умножения в кольце оказывается весьма естественным, как только что было показано, однако очень часто оно не выполняется. По этой причине *кольцом* называют сейчас неассоциативное (т. е. не обязательно ассоциативное) кольцо. Это алгебра, являющаяся абелевой группой по сложению и группоидом по умножению, причем эти операции связаны законами дистрибутивности. Слова «*аддитивная группа кольца*» и «*мультипликативный группоид кольца*» имеют понятный смысл.

Отметим, что для (неассоциативных) колец сохраняются (с их доказательствами) многие простейшие свойства ассоциативных колец, в частности, законы дистрибутивности для разности,

$$a(b-c) = ab - ac, \quad (b-c)a = ba - ca,$$

мультипликативное свойство нуля,

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

правило знаков при умножении,

$$(-a)b = a(-b) = -ab, \quad (-a)(-b) = ab.$$

Дословно так же, как в предыдущем параграфе, доказывается, что *всякий группоид G изоморфно вкладывается в мультипликативный группоид некоторого кольца* (а именно, строится *целочисленное группоидное кольцо* группоида G), а также что *всякое кольцо изоморфно вкладывается в кольцо с единицей.*

Понятие кольца без делителей нуля переносится на неассоциативный случай без всяких затруднений. Что же касается понятия тела, то при его перенесении на неассоциативный случай возникают различные возможности, причем пока нет установившейся терминологии. Мы будем говорить о *кольце с делением*, если для любых a и b, где $a \neq 0$, уравнения

$$ax = b, \quad ya = b$$

обладают в кольце решениями, не обязательно однозначно определенными. Кольцо с делением может обладать, следовательно, делителями нуля.

Кольцо, в котором указанные уравнения обладают однозначными решениями, назовем *квазителом*. Делителей нуля квазитело содержать не может и поэтому его отличные от нуля элементы составляют по умножению группоид, даже квазигруппу. Наконец, термин *тело* целесообразно применять к кольцу, мультипликативный группоид ненулевых элементов которого является лупой или, быть может, даже муфанговой лупой.

Можно доказать, что всякое (неассоциативное) кольцо без делителей нуля вкладывается в квазитело (Б. Нейман, Proc. London. Math. Soc. 1 (1951), 241—256). Отметим также, что всякий группоид с сокращениями (ср. § 9) вкладывается в квазигруппу (см., например, П. Кон, Универсальная алгебра, VII, 4).

Покажем некоторые случаи появления неассоциативных колец. Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо. Сохраним его аддитивную группу, а операцию умножения ab заменим *операцией коммутирования*

$$a \circ b = ab - ba. \tag{1}$$

Это новое умножение дистрибутивно относительно сложения; так, например,

$$a \circ (b + c) = a(b + c) - (b + c)a = ab + ac - ba - ca = \\ = (ab - ba) + (ac - ca) = a \circ b + a \circ c.$$

Обозначим полученное кольцо через $R^{(-)}$. Если кольцо R было и коммутативным, то $R^{(-)}$ будет просто кольцом с нулевым умножением. В общем же случае оно может оказаться неассоциативным. В нем выполняются, однако, следующие тождества, из которых второе называется *тождеством Якоби*:

$$x^2 = 0, \tag{2}$$

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0. \tag{3}$$

Проверим эти тождества:

$$a \circ a = aa - aa = 0;$$

$$(a\circ b)\circ c + (b\circ c)\circ a + (c\circ a)\circ b = (ab - ba)\,c - \\ - c\,(ab - ba) + (bc - cb)\,a - a\,(bc - cb) + \\ + (ca - ac)\,b - b\,(ca - ac) = 0.$$

Кольцо, удовлетворяющее тождествам (2) и (3), называется *лиевым*. Таким образом, *всякому ассоциативному кольцу R соответствует лиево кольцо $R^{(-)}$ с той же аддитивной группой и с умножением, определяемым равенством* (1). Как показал Лазар (C. r. Paris **234** (1952)), для всякого лиева кольца L можно указать такое ассоциативное кольцо R, что L изоморфно вкладывается в лиево кольцо $R^{(-)}$.

Для дальнейшего отметим, что лиево кольцо, соответствующее в указанном смысле кольцу эндоморфизмов абелевой группы G, мы будем называть *лиевым кольцом эндоморфизмов* этой абелевой группы.

Укажем еще один случай появления лиевых колец. Если R — произвольное (не обязательно ассоциативное) кольцо, то *дифференцированием* кольца R называется всякое преобразование δ множества R, являющееся эндоморфизмом аддитивной группы кольца R, т. е.

$$(a + b)\delta = a\delta + b\delta, \qquad a, b \in R,$$

и удовлетворяющее условию

$$(ab)\delta = (a\delta)b + a(b\delta), \qquad a, b \in R.$$

Примером дифференцирования любого кольца R служит нулевой эндоморфизм его аддитивной группы.

Дифференцирования произвольного кольца R составляют лиево кольцо, а именно подкольцо лиева кольца эндоморфизмов аддитивной группы кольца R.

В самом деле, если δ_1 и δ_2 — дифференцирования кольца R, то эндоморфизм аддитивной группы $\delta_1 + \delta_2$ также будет дифференцированием, так как для любых $a,\ b \in R$

$$(ab)(\delta_1 + \delta_2) = (ab)\delta_1 + (ab)\delta_2 = \\ = (a\delta_1)b + a(b\delta_1) + (a\delta_2)b + a(b\delta_2) = \\ = (a\delta_1 + a\delta_2)b + a(b\delta_1 + b\delta_2) = \\ = [a\,(\delta_1 + \delta_2)]\,b + a\,[b\,(\delta_1 + \delta_2)].$$

Нулевой эндоморфизм, как уже отмечено выше, является дифференцированием. Эндоморфизм $-\delta$, противоположный дифференцированию δ, сам будет дифференцированием, так как для $a, b \in R$

$$(ab)(-\delta) = -[(ab)\delta] = -[(a\delta)\, b + a\,(b\delta)] = \\ = [a(-\delta)]b + a\,[b(-\delta)].$$

Наконец, лиево произведение

$$\delta_1 \circ \delta_2 = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$$

дифференцирований δ_1 и δ_2 само будет дифференцированием, так как для $a, b \in R$

$$(ab)(\delta_1 \circ \delta_2) = (ab)(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1) = \\ = [(ab)\,\delta_1]\,\delta_2 - [(ab)\delta_2]\,\delta_1 = \\ = [(a\delta_1)b + a(b\delta_1)]\delta_2 - [(a\delta_2)b + a(b\delta_2)]\delta_1 = \\ = [(a\delta_1)b]\delta_2 + [a(b\delta_1)]\delta_2 - [(a\delta_2)b]\,\delta_1 - [a\,(b\delta_2)]\delta_1 = \\ = [(a\delta_1)\delta_2]b + (a\delta_1)(b\delta_2) + (a\delta_2)(b\delta_1) + a\,[(b\delta_1)\delta_2] - \\ - [(a\delta_2)\delta_1]b - (a\delta_2)(b\delta_1) - (a\delta_1)(b\delta_2) - a[(b\delta_2)\delta_1] = \\ = [a(\delta_1 \circ \delta_2)]\, b + a[b\,(\delta_1 \circ \delta_2)].$$

Заметим, что совокупность дифференцирований кольца R подкольцом (ассоциативного) кольца эндоморфизмов его аддитивной группы в общем случае не будет.

Другой класс неассоциативных колец мы получим следующим аналогичным путем. В произвольном ассоциативном кольце R сохраним аддитивную группу, а операцию умножения заменим *операцией симметрирования*

$$a \cdot b = ab + ba. \tag{4}$$

Это новое умножение дистрибутивно относительно сложения; например,

$$a \cdot (b + c) = a(b + c) + (b + c)a = ab + ac + ba + \\ + ca = (ab + ba) + (ac + ca) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Обозначим полученное кольцо через $R^{(+)}$. Покажем, что в нем выполняются следующие тождества:

$$x \cdot y = y \cdot x, \tag{5}$$

$$[(x \cdot x) \cdot y] \cdot x = (x \cdot x) \cdot (y \cdot x). \tag{6}$$

В самом деле, для любых $a, b \in R$

$$a \cdot b = ab + ba = ba + ab = b \cdot a,$$

$$[(a \cdot a) \cdot b] \cdot a = [(aa + aa)\, b + b(aa + aa)]\, a +$$
$$+ a\, [(aa + aa)b + b(aa + aa)] =$$
$$= aaba + aaba + baaa + baaa + aaab + aaab +$$
$$+ abaa + abaa = (aa + aa)(ba + ab) +$$
$$+ (ba + ab)\,(aa + aa) = (a \cdot a) \cdot (b \cdot a).$$

Кольца, удовлетворяющие тождествам (5) и (6), называются *йордановыми*. В общем случае они неассоциативны, хотя к их числу принадлежат, очевидно, все ассоциативно-коммутативные кольца. Мы получили, что *всякому ассоциативному кольцу R соответствует йорданово кольцо $R^{(+)}$ с той же аддитивной группой и с умножением, определяемым равенством* (4). Отметим, впрочем, что не всякое йорданово кольцо изоморфно вкладывается в кольцо $R^{(+)}$ для какого-либо ассоциативного кольца R.

Многообразия лиевых и йордановых колец стали уже наряду с многообразием ассоциативных колец носителями богатых и активно разрабатываемых теорий. Изучаются и многие другие классы неассоциативных колец, в частности, *коммутативные кольца*, удовлетворяющие тождеству (5), и *антикоммутативные кольца*, удовлетворяющие тождеству (2). Название последних объясняется тем, что в любом кольце R из тождества (2) вытекает тождество

$$xy = -yx. \tag{7}$$

Действительно, если $a, b \in R$, то, ввиду (2),

$$a^2 = b^2 = (a + b)^2 = 0,$$

откуда

$$0 = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = ab + ba.$$

Обратно, если аддитивная группа кольца R не содержит элементов второго порядка, то из (7) следует (2), так как для любого $a \in R$ будет ввиду (7) $a^2 = -a^2$,

т. е. $2a^2 = 0$, откуда, ввиду сделанного предположения, $a^2 = 0$.

Большой интерес представляют некоторые классы колец, являющихся обобщениями ассоциативных колец. Так как в тождестве ассоциативности участвуют три неизвестных, то всякое кольцо, в котором ассоциативны все подкольца, порожденные тремя элементами, само будет ассоциативным. Поэтому естественно возникает понятие *альтернативного кольца*, т. е. кольца, в котором ассоциативны подкольца, порожденные любыми двумя элементами. Существует теорема Артина, по которой кольцо тогда и только тогда альтернативно, когда в нем выполняются тождества

$$(xx)y = x(xy), \quad (yx)x = y(xx).$$

Альтернативные кольца составляют, следовательно, многообразие; это можно было бы усмотреть, впрочем, и из исходного определения.

Еще более широк класс *колец с ассоциативными степенями*, т. е. колец, в которых ассоциативны все подкольца, порожденные одним элементом. Весьма широк также класс *эластичных* колец, удовлетворяющих тождеству

$$(xy)x = x(yx).$$

К этому классу колец принадлежат, очевидно, все альтернативные (в частности, ассоциативные) кольца. К нему принадлежат и все коммутативные (в частности, йордановы) кольца, так как в этом случае

$$(ab)a = a(ab) = a(ba),$$

а также все антикоммутативные (в частности, лиевы) кольца, так как в этом случае, ввиду (7),

$$(ab)a = -a(ab) = -a(-ba) = a(ba).$$

Понятие кольца, как и понятие группы, может быть определено многими эквивалентными способами; иными словами, существует много различных многообразий алгебр, эквивалентных многообразию всех колец. Так, в произвольном кольце рассмотрим *присоединенное*

умножение, определяемое равенством

$$a*b = a + b - ab. \tag{8}$$

Так как отсюда

$$ab = a + b - a*b, \tag{9}$$

то понятие кольца может быть определено при помощи обычного сложения и присоединенного умножения. Законы дистрибутивности принимают теперь непривычный вид, а именно

$$(a + b)*c = a*c + b*c - c, \tag{10}$$
$$c*(a + b) = c*a + c*b - c.$$

Проверим хотя бы первый из них:

$$(a + b)*c = a + b + c - (a + b)\,c = a + b + c - ac - bc = (a + c - ac) + (b + c - bc) - c = a*c + b*c - c.$$

Обратно, из законов дистрибутивности (10) для присоединенного умножения сейчас же следуют, ввиду (9), законы дистрибутивности для обычного умножения.

Нуль кольца играет для присоединенного умножения роль единицы, так как, по (8),

$$a*0 = a + 0 - a\cdot 0 = a$$

и аналогично $0*a = a$.

Ассоциативные кольца имеют ассоциативное присоединенное умножение.

Действительно, если кольцо R ассоциативно, то

$$(a*b)*c = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)\,c = a + b + c - ab - ac - bc + abc = a + (b + c - bc) - a\,(b + c - bc) = a*(b*c).$$

Изучение колец с использованием присоединенного умножения открывает новые возможности для развития теории. Так, ассоциативные кольца, являющиеся группой по присоединенному умножению,— единицей этой группы будет, как мы знаем, нуль кольца,—

аналогичны телам, но уже составляют многообразие. Это *кольца, радикальные в смысле Джекобсона*; они играют в теории ассоциативных колец очень большую роль.

Кольцам без делителей нуля аналогичны *полурадикальные кольца*, т. е. ассоциативные кольца, по присоединенному умножению являющиеся полугруппой с сокращениями (см. § 9). Всякое подкольцо радикального кольца полурадикально, поэтому возникает вопрос о возможности вложения полурадикального кольца в радикальное. Оказывается (см. В. А. Андрунакиевич, Изв. АН СССР, сер. матем. **12** (1947) 129—178), что положение здесь в точности такое же, как в вопросе о вложении ассоциативных колец без делителей нуля в тела (см. § 9). Понятия радикального и полурадикального кольца могут быть перенесены и на неассоциативный случай, но, как показал О. И. Доманов, в этом случае теорема, аналогичная отмеченной выше в настоящем параграфе теореме Б. Неймана, уже не имеет места.

Отметим еще один способ определения кольца. Именно (см. Ю. И. Соркин, Успехи матем. наук **12** : 4 (1957)), это можно сделать при помощи одной тернарной операции. Рассмотрим в произвольном кольце R операцию

$$abc\omega = ac - bc + a - b. \tag{11}$$

Легко проверить, что через эту операцию можно записать все операции, входящие в обычную сигнатуру кольца:

$$aab\omega = 0, \quad 0a0\omega = -a, \quad ab0\omega = a - b,$$

$$a0b0\omega 0\omega = a + b, \quad a0b\omega a0\omega = ab.$$

Тождества, задающие кольцо как алгебру с операцией (11), получаются переписыванием тождеств, входящих в обычное определение кольца, но можно показать, что кольцо может быть также задано относительно этой операции одним единственным тождеством.