§ 18. КОНГРУЕНЦИИ

Применим сказанное выше к случаю $H = G$, т. е. рассмотрим соответствия $G\rho G$ алгебры G с самой собой (т. е., короче, *соответствия алгебры* G). Они составляют, как мы знаем, полную структуру, притом компактнопорожденную, так как это структура всех подалгебр декартова квадрата $G \times G$. Известна теорема Искандера (Изв. АН СССР, серия матем. 29 (1965), 1273—1282), по которой всякая компактнопорожденная полная структура изоморфна структуре всех соответствий некоторой алгебры; эта теорема обобщает, очевидно, отмеченную в предшествующем параграфе теорему Биркгофа — Фринка.

С другой стороны, произведение соответствий вида $G\rho G$ всегда определено и поэтому соответствия алгебры G составляют полугруппу по умножению; эта *полугруппа соответствий* обладает единицей $\varepsilon = \varepsilon_G$. Наконец, в множестве соответствий алгебры G существует инволюция, а именно переход к инверсному соответствию ρ^{-1}.

Совокупность соответствий алгебры G, рассматриваемых с их упорядоченностью, умножением и переходом к инверсному соответствию,— связи между этими отношениями и операциями указаны в предшествующем параграфе,— назовем *связкой соответствий* алгебры G.

Связка соответствий содержит в себе многое из того, что приходится использовать при изучении алгебры G. Так, *структура подалгебр алгебры G изоморфна подструктуре структуры ее соответствий, состоящей из всех таких соответствий* ρ, *что* $\rho \leqslant \varepsilon$. Именно, такими соответствиями будут тождественные автоморфизмы всевозможных подалгебр алгебры G и только они — последнее потому, что для соответствия ρ, удовлетворяющего условию $\rho \leqslant \varepsilon$, обе проекции совпадают, т. е. являются одной и той же подалгеброй. С другой стороны, эндоморфизмы алгебры G — это такие ее соответствия ρ, что $\rho\rho^{-1} \geqslant \varepsilon$, $\rho^{-1}\rho \leqslant \varepsilon$, а так как произведение гомоморфизмов совпадает, как мы знаем, с их произведением как соответствий, то *полугруппа эндоморфизмов алгебры G будет подполугруппой полугруппы ее соответствий.*

При изучении алгебр очень важную роль играет еще один тип соответствий. Именно, соответствие π алгебры G называется *конгруенцией*, если, как бинарное отношение, оно является отношением эквивалентности, т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно, иными словами, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\pi \geqslant \varepsilon, \quad \pi^{-1} = \pi, \quad \pi\pi \leqslant \pi. \tag{1}$$

Для конгруенции π будет даже

$$\pi\pi = \pi, \tag{2}$$

так как из $\pi \geqslant \varepsilon$ следует, по (1) из § 17, $\pi\pi \geqslant \pi$.

Если в алгебре G заданы конгруенции π_i, $i \in I$, то их пересечение в структуре соответствий само будет конгруенцией.

В самом деле, докажем справедливость условий (1) для конгруенции $\pi = \bigcap\limits_{i \in I} \pi_i$. Справедливость первого из этих условий очевидна, второе следует из равенства (4) предшествующего параграфа. Пусть, наконец, элементы a, $c \in G$ таковы, что $a(\pi\pi)c$. Тогда существует такой элемент $b \in G$, что $a\pi b$ и $b\pi c$, а поэтому для всех $i \in I$ будет $a\pi_i b$, $b\pi_i c$. Отсюда $a(\pi_i\pi_i)c$, т. е., так как для π_i выполняется последнее из условий (1), то $a\pi_i c$, $i \in I$, а поэтому $a\pi c$.

С другой стороны, о б ъ е д и н е н и е к о н г р у е н ц и й в с т р у к т у р е с о о т в е т с т в и й н е о б я з а н о б ы т ь к о н г р у е н ц и е й, как показывает следующий тривиальный пример. Рассмотрим множество M, в котором задана тождественная унарная операция

$$x\omega = x \text{ для всех } x \in M.$$

Всякая эквивалентность в множестве M будет конгруенцией полученной алгебры. Возьмем две конгруенции этой алгебры π_1 и π_2. Ввиду тождественности операции ω их объединение в структуре соответствий совпадает с их теоретико-множественным объединением как подмножеств множества $M \times M$. Последнее не обязано, однако, быть конгруенцией, так как может не удовлетворять условию транзитивности: если элементы

a, b, $c \in M$ таковы, что $a\pi_1 b$, $b\pi_2 c$, но a и c лежат в разных классах как по π_1, так и по π_2,— эта ситуация может быть реализована, если M содержит не менее трех элементов,— то a и c не находятся в отношении $\pi_1 \cup \pi_2$, хотя $a(\pi_1 \cup \pi_2)b$, $b(\pi_1 \cup \pi_2)c$.

Множество всех конгруенций произвольной алгебры G частично упорядочено как подмножество структуры соответствий, содержит единицу этой полной структуры, т. е. соответствие $G \times G$, и, наконец, замкнуто относительно пересечений. Оно само будет, следовательно, полной структурой. Эта *структура конгруенций* алгебры G не обязана быть, как мы знаем, подструктурой структуры соответствий.

Легко показать, что структура конгруенций всякой алгебры является компактнопорожденной. Отметим теорему Грецера — Шмидта, по которой всякая компактнопорожденная полная структура изоморфна структуре конгруенций некоторой алгебры (Acta Sci. Math. (Szeged) 24 (1963), 34—59).

Конгруенции данной алгебры не всегда составляют подполугруппу полугруппы ее соответствий, так как произведение двух конгруенций может не быть конгруенцией. Докажем следующую теорему:

Произведение $\pi_1\pi_2$ *двух конгруенций* π_1 *и* π_2 *алгебры* G *тогда и только тогда будет конгруенцией, если конгруенции* π_1 *и* π_2 *перестановочны, т. е.* $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$.

Действительно, если $\pi_1\pi_2$ является конгруенцией, то, используя свойства конгруенций (1), а также (3) из предшествующего параграфа, получаем:

$$\pi_1\pi_2 = (\pi_1\pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1}\pi_1^{-1} = \pi_2\pi_1.$$

Обратно, если $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$, то соответствие $\pi_1\pi_2$ обладает всеми свойствами (1), входящими в определение конгруенции. Именно, ввиду (1) из § 17,

$$\pi_1\pi_2 \geqslant \pi_1\varepsilon \geqslant \varepsilon\varepsilon = \varepsilon;$$

далее, ввиду (3) из § 17,

$$(\pi_1\pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1}\pi_1^{-1} = \pi_2\pi_1 = \pi_1\pi_2;$$

наконец, снова ввиду (1) из § 17,

$$(\pi_1\pi_2)(\pi_1\pi_2) = (\pi_1\pi_1)(\pi_2\pi_2) \leqslant \pi_1\pi_2.$$

Для некоторых классов алгебр, в том числе для групп, колец и вообще мультиоператорных групп, может быть доказана перестановочность всех их конгруенций. Структуры конгруенций алгебр, обладающих этим свойством, являются дедекиндовыми. Можно доказать даже несколько больше.

Полная структура называется *вполне дедекиндовой*, если для любых ее элементов a_i, b_i, $i \in I$, удовлетворяющих условию $a_i \geqslant b_j$ при $i \neq j$, имеет место равенство

$$(\bigcap_{i\in I} a_i) \cap (\bigcup_{i\in I} b_i) = \bigcup_{i\in I} (a_i \cap b_i). \tag{3}$$

Всякая вполне дедекиндова структура S является дедекиндовой.

В самом деле, пусть в S взяты элементы a, b, c, причем $a \geqslant b$. Положим

$$a_1 = a, \quad a_2 = a \cup c, \quad b_1 = c, \quad b_2 = b.$$

Тогда $a_1 \geqslant b_2$ по предположению и $a_2 \geqslant b_1$ по определению операции объединения. Поэтому должно выполняться равенство (3), т. е.

$$(a_1 \cap a_2) \cap (b_1 \cup b_2) = (a_1 \cap b_1) \cup (a_2 \cap b_2)$$

или

$$a \cap (c \cup b) = (a \cap c) \cup [(a \cup c) \cap b],$$

а так как $a \geqslant b$, то мы получаем равенство (2) из § 16. Дедекиндовость структуры S доказана.

Справедлива следующая теорема Двингера (Proc. Neder. Ac. **20** (1958), 70—76): Если в алгебре G конгруенции перестановочны, то структура конгруенций этой алгебры вполне дедекиндова.

Значение конгруенций для теории универсальных алгебр определяется, как известно, следующим.

Если π — конгруенция алгебры G сигнатуры Ω, то в множестве G/π непересекающихся классов, на которые разбивается G конгруенцией π, естественным

образом определяются все операции из Ω. Полученная *фактор-алгебра* G/π оказывается эпиморфным образом алгебры G при естественном эпиморфизме, сопоставляющем каждому элементу из G тот класс конгруенции π, к которому этот элемент принадлежит. Обратно, любой эпиморфизм φ: $G \to G'$ определяет в алгебре G конгруенцию π, классами которой служат полные прообразы элементов алгебры G', причем существует такой изоморфизм ψ алгебры G' на фактор-алгебру G/π, что произведение $\varphi\psi$ совпадает с естественным эпиморфизмом G на G/π.