ВВЕДЕНИЕ

Появление и бурное развитие общей алгебры, продолжающееся, непрерывно нарастая, уже около пятидесяти лет, представляет собою одну из самых ярких страниц математики двадцатого века. Желая дать некоторое представление о том, что такое общая алгебра и какие цели преследует настоящий курс, начнем с весьма схематичного исторического обзора.

На протяжении столетий алгебра была наукой об уравнениях. В девятнадцатом веке поняли, что вместо уравнений (и систем уравнений) можно говорить об их левых частях, т. е. о функциях специального вида (и о системах таких функций), а это привело к тому, что алгебра стала считаться частью математического анализа, частью теории функций. Даже не в очень удаленные от нас времена можно было встретить в некоторых книгах слова «алгебра или алгебраический анализ». Одновременно, однако, в недрах тогдашней алгебры и в связи с ее потребностями возникали некоторые новые теории, в математический анализ никак не укладывавшиеся. Именно, в связи с теорией Галуа возникла теория групп, медленно развивающаяся в девятнадцатом веке в виде теории конечных групп подстановок. Во второй половине девятнадцатого века стала разрабатываться примыкавшая к теории чисел теория полей, а именно — теория полей алгебраических чисел. В это же время в связи с появлением кватернионов начинают изучаться различные гиперкомплексные числовые системы, т. е., на современном языке, конечномерные линейные алгебры, причем с некоммутативным, а иногда и неассоциативным умножением.

Важным этапом был переход от девятнадцатого к двадцатому веку. Именно в это время было понято, что при изучении перечисленных выше математических объектов на самом деле изучаются свойства заданных в них алгебраических операций и что эти объекты следует определять аксиоматически, указывая исходные свойства операций и игнорируя природу элементов, над которыми операции производятся. Иными словами, появилось понятие изоморфизма. В результате в

первые два десятилетия нашего века теория конечных групп развивалась уже как абстрактная теория, было положено начало общей теории бесконечных групп, теории полей, а также теории коммутативно-ассоциативных колец.

Это была пока предыстория общей алгебры. Ее история начинается в двадцатые годы, когда впервые было понято, что именно изучение алгебраических операций, т. е. изучение таких образований, как группы, поля, кольца, линейные алгебры, является истинной задачей алгебры. В эти годы в центре внимания была теория колец, как ассоциативно-коммутативных, так и любых ассоциативных; в первом случае развитие шло от теории идеалов колец целых алгебраических чисел, во втором — от теории конечномерных линейных алгебр. Теория бесконечных групп стала разрабатываться как теория групп с операторами, в частности, абелевых групп с операторами, т. е. модулей, как стали говорить позже.

Появление в 1930 и 1931 гг. двухтомной «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена показало широким кругам математиков, что алгебра, одна из старейших ветвей математики, радикально перестроилась, что она стала наукой теоретико-множественной, аксиоматической. Эта новая наука долго так и называлась «современной алгеброй», хотя неудобства этого названия выявились довольно скоро, и сейчас с моей легкой руки утвердилось название «общая алгебра». Результаты этой перестройки можно назвать взрывом; это относится и к развитию самой алгебры, и к влиянию ее на всю математику. Если начать с последнего, то можно отметить хотя бы влияние общей алгебры на развитие топологии, в частности, ее роль в создании алгебраической топологии; многостороннее влияние на развитие функционального анализа; поглощение проективной геометрии; определяющую роль при возрождении алгебраической геометрии; стимулирование появления ряда новых разделов математической логики, а также многое другое.

Развитие самой общей алгебры шло исключительно бурно. Все перечисленные выше ветви алгебры продол-

жали глубоко и всесторонне разрабатываться и вместе с тем возникали новые направления, новые области. В тридцатых годах появилась топологическая алгебра и началась активная деятельность в теории структур, т. е. области, истоки которой можно найти в работах, относящихся еще к началу нашего века. В сороковых годах развилась теория неассоциативных колец и бесконечномерных неассоциативных линейных алгебр, теория полугрупп, истоки которой можно найти еще в двадцатых годах, теория упорядоченных алгебраических образований, идущая от относящихся к началу века исследований по основаниям геометрии. В пятидесятых годах утвердилась в качестве самостоятельной области теория квазигрупп и началось бурное развитие теории категорий.

Эти же годы явились годами начала систематического изучения универсальных алгебр, хотя основы их теории были заложены еще в тридцатые годы, а в математической логике они появились даже много раньше. Понятие универсальной алгебры долго вызывало у математиков настороженность — казалось, что понятие множества, в котором задана произвольная система произвольных алгебраических операций, произвольным образом между собою связанных, слишком широко и поэтому слишком бедно содержанием для того, чтобы стать объектом глубокой теории. Развитие теории за последние два десятилетия показало неосновательность этих опасений. Теория универсальных алгебр сейчас не только объединяет то немногое общее, с чего начинаются различные конкретные разделы общей алгебры, но и нашла собственную проблематику и сложилась как самостоятельная ветвь алгебры. При этом ее появление никак не отменяет более конкретных разделов общей алгебры, так же как появление теории колец не отменило теории полей, а появление теории полугрупп не ликвидировало теории групп.

Замечу, что существует более общее понятие, чем понятие универсальной алгебры, а именно — понятие модели. Теория моделей также развивается, не ликвидируя теории универсальных алгебр. Математики пока

не договорились, относится ли она к алгебре или же к математической логике.

Теория универсальных алгебр уже оказывает и, нужно ожидать, в ближайшие десятилетия будет оказывать все возрастающее влияние на развитие всей общей алгебры. Вообще, сейчас ученые всех специальностей занимаются прогнозами на конец нашего века, появляются даже книги о науке в 2000 году. Попытаемся и мы сформулировать некоторые прогнозы развития общей алгебры в ближайшие десятилетия.

Трудно ожидать, что те классические разделы, которые разрабатываются уже несколько десятилетий, так и будут оставаться основным источником новых идей общематематического значения. Более вероятно (и признаки этого уже наблюдаются), что они, продолжая привлекать многих исследователей, будут переходить в этап завершения. Главные интересы будут концентрироваться в них на решении давно поставленных проблем, а это всегда означает исчерпание области, хотя решать открытые проблемы необходимо, конечно, всегда. Вместе с тем с позиций теории универсальных алгебр оказывается, что те понятия, которые исторически оказались первыми объектами изучения и поэтому стали носителями наиболее разработанных теорий и чаще всего используются соседями,— неалгебраистам трудно применять те алгебраические теории, которые алгебраистами еще не созданы,— логически эту свою первоочередность, избранность уже утрачивают.

С другой стороны, между теорией универсальных алгебр и классическими разделами общей алгебры существует большое необработанное пространство. Исследования начались лишь в немногих местах, изолированные, иногда случайные, хотя среди этих мест есть такие, разработка которых безусловно необходима. Нужно ожидать, что именно в это «ничейное» пространство будут передвигаться в ближайшие десятилетия основные интересы общей алгебры.

В соответствии с общими тенденциями современной науки (например, физики) новые объекты изучения, новые теории будут появляться здесь не с перерывами в десятилетия, а все чаще и чаще. Остановить этот

процесс невозможно, пытаться это делать — неразумно. Можно лишь направлять этот процесс. Именно в такой аксиоматической науке, как общая алгебра, не нужно большого ума для того, чтобы создавать новые объекты изучения. Труднее их оправдать. Для этого мало указать примеры, даже важные, вводимых понятий. Понятие группы оправдывается не тем, что существуют симметрические группы на произвольных множествах, а тем, что симметрическими группами и их подгруппами с точностью до изоморфизма исчерпываются все группы. Понятие ассоциативного кольца оправдывается не тем, что существуют кольца линейных преобразований, а лишь тем, что кольцами эндоморфизмов абелевых групп и их подкольцами исчерпываются все ассоциативные кольца. Возможны и другие способы оправдания вводимых новых понятий, но они должны быть столь же убедительными.

В нашем курсе мы хотим дать, опираясь на основы теории универсальных алгебр, обзор основных типов алгебр, как классических, т. е. изучаемых уже давно, так и ожидающих еще детального изучения, но уже вполне хорошо оправданных. Мы не пытаемся ни в одном случае излагать теорию соответствующего класса алгебр и ограничиваемся, помимо результатов, необходимых для оправдания выбора этого класса как объекта самостоятельного изучения, лишь результатами, позволяющими рассматривать этот класс как многообразие алгебр. Этим определяется и своеобразный характер курса, разные разделы которого между собою почти не связаны.

В 1962 г. вышла из печати моя книга «Лекции по общей алгебре», позже появились ее переводы на английский, немецкий, французский, польский, чешский, японский и китайский языки. Настоящий курс не опирается на эту книгу и имеет с нею сравнительно немного перекрытий, хотя идейно к ней весьма близок. Надеюсь, что в будущем я смогу объединить материал этой книги и этого курса в одну новую книгу.

К сожалению, чтение курса было прервано задолго до его окончания. Хотя написано было больше, чем я успел прочесть, однако некоторые параграфы так и

остались ненаписанными. В частности, в курс должны были войти сведения о свободных алгебрах многообразий, теорема Биркгофа о многообразиях, вопрос об эквивалентности многообразий и т. д. Некоторые из этих вопросов уже изложены, впрочем, в имеющихся на русском языке книгах по теории универсальных алгебр *).

*) Обширный список имеющихся книг и обзоров по общей алгебре можно найти во втором издании книги А. Г. Куроша «Лекции по общей алгебре».— *Прим. ред.*