ГЛАВА ПЕРВАЯ

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

## § 1. Метод последовательного исключения неизвестных

Мы начинаем курс высшей алгебры с изучения систем уравнений первой степени с несколькими неизвестными или, как обычно говорят, *систем линейных уравнений*[1]).

Теория систем линейных уравнений кладет начало большому и важному отделу алгебры — линейной алгебре, — к которому относится большая часть глав нашей книги, в частности ее первые три главы. Коэффициенты уравнений, рассматриваемых в этих трех главах, значения неизвестных и вообще все числа, с которыми мы будем встречаться, следует считать действительными. Впрочем, все содержание этих глав дословно переносится и на случай произвольных комплексных чисел, уже известных читателю из курса средней школы.

В отличие от элементарной алгебры мы будем изучать системы с произвольным числом уравнений и неизвестных, причем иногда число уравнений системы не будет даже предполагаться совпадающим с числом неизвестных. Пусть нам дана система из $s$ линейных уравнений с $n$ неизвестными. Условимся употреблять следующую символику: неизвестные мы будем обозначать буквой $x$ с индексами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; уравнения будем считать перенумерованными — первое, второе, ..., $s$-е; коэффициент из $i$-го уравнения при неизвестном $x_j$ обозначим через $a_{ij}$[2]); наконец, свободный член $i$-го уравнения обозначим через $b_i$.

---

[1]) Это название связано с тем, что в аналитической геометрии уравнение первой степени с двумя неизвестными определяет прямую линию на плоскости.

[2]) Мы употребляем, следовательно, два индекса, из которых первый указывает на номер уравнения, второй — на номер неизвестного. Для сокращения письма эти индексы не разделяются запятой; не следует, однако, в случае $a_{11}$ вместо «а один один» читать «а одиннадцать», в случае $a_{34}$ вместо «а три четыре» читать «а тридцать четыре».

Наша система запишется теперь в следующем общем виде:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Коэффициенты при неизвестных составляют прямоугольную таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1}a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

называемую *матрицей* из $s$ *строк* и $n$ *столбцов*; числа $a_{ij}$ называются *элементами* матрицы[1]). Если $s = n$ (т. е. число строк равно числу столбцов), то матрица называется *квадратной матрицей порядка* $n$. Диагональ этой матрицы, идущая от левого верхнего к первому нижнему углу (т. е. составленная из элементов $a_{11}$, $a_{22}$, ... ..., $a_{nn}$), называется *главной диагональю*. Квадратная матрица порядка $n$ будет называться *единичной матрицей порядка* $n$, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а все элементы вне этой диагонали равны нулю.

*Решением* системы линейных уравнений (1) называется такая система $n$ чисел $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$, что каждое из уравнений (1) обращается в тождество после замены в нем неизвестных $x_i$ соответствующими числами $k_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$[2]).

Система линейных уравнений может не иметь ни одного решения и тогда она называется *несовместной*. Такова, например, система

$$x_1 + 5x_2 = 1,$$
$$x_1 + 5x_2 = 7;$$

левые части этих уравнений совпадают, но правые различны, и поэтому никакая система значений неизвестных не может удовлетворить обоим уравнениям сразу.

Если же система линейных уравнений обладает решениями, то она называется *совместной*. Совместная система называется *определенной*, если она обладает одним-единственным решением — лишь такие системы допускаются к рассмотрению в элементарной алгебре, —

---

[1]) Таким образом, если матрицу (2) рассматривать вне связи с системой (1), то первый индекс элемента $a_{ij}$ указывает на номер строки, второй — на номер столбца, на пересечении которых этот элемент стоит.

[2]) Подчеркиваем, что числа $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ составляют одно решение системы, а не $n$ решений.

и ***неопределенной***, если решений больше чем одно; как мы узнаем позже, их будет в этом случае даже бесконечно много. Так, система

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2&=7,\\ x_1+x_2&=4 \end{aligned}\right\}$$

определенна: она имеет решение $x_1=1$, $x_2=3$ и, как легко проверяется методом исключения неизвестного, это решение будет единственным. С другой стороны, система

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-x_2&=1,\\ 6x_1-2x_2&=2 \end{aligned}\right\}$$

неопределенна, так как имеет бесконечно много решений вида

$$x_1=k, \qquad x_2=3k-1, \tag{3}$$

где число $k$ произвольно, причем решениями, получающимися по формулам (3), исчерпываются все решения нашей системы.

Задача теории систем линейных уравнений состоит в разработке методов, позволяющих узнать, совместна ли данная система уравнений или нет, в случае совместности установить число решений, а также указать способ найти все эти решения.

Мы начнем с метода, наиболее удобного для практического разыскания решений систем с числовыми коэффициентами, а именно ***метода последовательного исключения неизвестных*** или ***метода Гаусса.***

Вначале одно предварительное замечание. Нам придется делать дальше такие преобразования системы линейных уравнений: обе части одного из уравнений системы, умноженные на одно и то же число, вычитать из соответствующих частей некоторого другого уравнения системы. Пусть для определенности мы обе части первого уравнения системы (1), умноженные на число $c$, вычитаем из соответствующих частей второго уравнения. Мы получим новую систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1,\\ a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\ \dots\ +a'_{2n}x_n=b'_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\ \dots\ +a_{3n}x_n=b_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ \dots\ +a_{sn}x_n=b_s, \end{array}\right\} \tag{4}$$

где

$$a'_{2j}=a_{2j}-ca_{1j} \quad \text{при} \quad j=1,\ 2,\ \dots,\ n, \quad b'_2=b_2-cb_1.$$

*Системы уравнений* (1) *и* (4) *эквивалентны, т. е. они или обе несовместны, или же обе совместны и обладают одними и теми же решениями.* В самом деле, пусть $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ будет

произвольное решение системы (1). Эти числа удовлетворяют, очевидно, всем уравнениям системы (4), кроме второго. Они удовлетворяют, однако, и второму уравнению системы (4) — достаточно вспомнить, как это уравнение выражается через второе и первое уравнения системы (1). Обратно, всякое решение системы (4) будет удовлетворять и системе (1). Действительно, второе уравнение системы (1) получается вычитанием из обеих частей второго уравнения системы (4) соответствующих частей первого уравнения этой системы, умноженных на число $-c$.

Понятно, что *если к системе* (1) *будут несколько раз применены преобразования рассмотренного типа, то вновь полученная система уравнений останется эквивалентной исходной системе* (1).

Может случиться, что после выполнения таких преобразований в нашей системе появится уравнение, все коэффициенты левой части которого равны нулю. Если и свободный член этого уравнения равен нулю, то уравнение удовлетворяется при любых значениях неизвестных, и поэтому, *отбрасывая это уравнение, мы придем к системе уравнений, эквивалентной исходной системе.* Если же свободный член рассматриваемого уравнения отличен от нуля, то это уравнение не может удовлетворяться ни при каких значениях неизвестных, а поэтому *полученная нами система уравнений, равно как и эквивалентная ей исходная система, будут несовместными.*

Перейдем теперь к изложению метода Гаусса.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений (1). Положим, для определенности, что коэффициент $a_{11} \neq 0$, хотя на самом деле он может, конечно, оказаться равным нулю, и мы должны будем начать с какого-либо другого, отличного от нуля, коэффициента из первого уравнения системы.

Преобразуем теперь систему (1), исключая неизвестное $x_1$ из всех уравнений, кроме первого. Для этого обе части первого уравнения умножим на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем из соответствующих частей второго уравнения, затем обе части первого уравнения, умноженные на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения, и т. д.

Мы придем этим путем к новой системе из $s$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{s2}x_2 + a'_{s3}x_3 + \ldots + a'_{sn}x_n &= b'_s. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Нам нет необходимости явно записывать выражения новых коэффициентов $a'_{ij}$ и новых свободных членов $b'_i$ через коэффициенты и свободные члены исходной системы (1).

Как мы знаем, система уравнений (5) эквивалентна системе (1). Будем преобразовывать теперь систему (5). При этом первое уравнение мы не будем больше трогать совсем и подлежащей преобразованиям будем считать лишь часть системы (5), состоящую из всех уравнений, кроме первого. При этом мы считаем, конечно, что среди этих уравнений нет таких, все коэффициенты левых частей которых равны нулю,— такие уравнения мы выбросили бы, если бы и их свободные члены были равны нулю, а в противном случае мы уже доказали бы несовместность нашей системы. Таким образом, среди коэффициентов $a'_{ij}$ есть отличные от нуля; для определенности примем, что $a'_{22} \neq 0$. Преобразуем теперь систему (5), вычитая из обеих частей третьего и каждого из следующих уравнений обе части второго уравнения, умноженные соответственно на числа

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \ldots, \frac{a'_{s2}}{a'_{22}}.$$

Этим будет исключено неизвестное $x_2$ из всех уравнений, кроме первого и второго, и мы придем к следующей системе уравнений, эквивалентной системе (5), а поэтому и системе (1):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{t3}x_3 + \ldots + a''_{tn}x_n &= b''_t. \end{aligned}\right\}$$

Наша система содержит теперь $t$ уравнений, $t \leqslant s$, так как некоторые уравнения оказались, возможно, отброшенными. Понятно, что число уравнений системы могло уменьшиться уже после исключения неизвестного $x_1$. В дальнейшем подлежит преобразованиям лишь часть полученной системы, содержащая все уравнения, кроме двух первых.

Когда остановится этот процесс последовательного исключения неизвестных?

Если мы придем к такой системе, одно из уравнений которой имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты левой части равны нулю, то, как мы знаем, наша исходная система несовместна.

В противном случае мы получим следующую систему уравнений, эквивалентную системе (1):

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,\,k-1}x_{k-1}+a_{1k}x_k+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2,k-1}x_{k-1}+a'_{2k}x_k+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a^{(k-2)}_{k-1,\,k-1}x_{k-1}+a^{(k-2)}_{k-1,\,k}x_k+\ldots+a^{(k-2)}_{k-1,\,n}x_n=b^{(k-2)}_{k-1},\\ a^{(k-1)}_{kk}x_k+\ldots+a^{(k-1)}_{kn}x_n=b^{(k-1)}_k. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Здесь $a_{11}\neq 0$, $a'_{22}\neq 0$, ..., $a^{(k-2)}_{k-1,\,k-1}\neq 0$, $a^{(k-1)}_{kk}\neq 0$. Отметим также, что $k\leqslant s$ и, очевидно, $k\leqslant n$.

*В этом случае система* (1) *совместная. Она будет определенной при* $k=n$ *и неопределенной при* $k<n$.

Действительно, если $k=n$, то система (6) имеет вид

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n=b_1,\\ a'_{22}x_2+\ \ldots\ +a'_{2n}x_n=b'_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a^{(n-1)}_{nn}x_n=b^{(n-1)}_n. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Из последнего уравнения мы получаем вполне определенное значение для неизвестного $x_n$. Подставляя его в предпоследнее уравнение, мы найдем однозначно определенное значение для неизвестного $x_{n-1}$. Продолжая так далее, мы найдем, что система (7), а поэтому и система (1), обладают единственным решением, т. е. совместны и определенны.

Если же $k<n$, то для «свободных» неизвестных $x_{k+1}$, ..., $x_n$ мы возьмем произвольные числовые значения, после чего, двигаясь по системе (6) снизу вверх, мы, как и выше, найдем для неизвестных $x_k$, $x_{k-1}$, ..., $x_2$, $x_1$ вполне определенные значения. Так как значения для свободных неизвестных можно выбрать бесконечным числом различных способов, то наша система (6) и, следовательно, система (1) будут совместными, но неопределенными. Легко проверить, что указанным здесь методом (при всевозможных выборах значений для свободных неизвестных) будут найдены все решения системы (1).

В первый момент кажется возможным еще один вид, к которому может приводиться система линейных уравнений методом Гаусса, а именно вид, получающийся приписыванием к системе (7) еще нескольких уравнений, содержащих лишь неизвестное $x_n$. В действительности, однако, в этом случае преобразования просто не доведены до конца: так как $a^{(n-1)}_{nn}\neq 0$, то из всех уравнений, начиная с $(n+1)$-го, неизвестное $x_n$ может быть исключено.

Следует заметить, что «треугольная» форма системы уравнений (7) или «трапецоидальная» форма системы уравнений (6) (при $k<n$)

получилась ввиду предположения, что коэффициенты $a_{11}$, $a'_{22}$ и т. д. отличны от нуля. В общем случае та система уравнений, к которой мы придем после доведения до конца процесса исключения неизвестных, приобретет треугольную или трапецоидальную форму лишь после надлежащего изменения нумерации неизвестных.

Суммируя все изложенное выше, мы получаем, что *метод Гаусса применим к любой системе линейных уравнений. При этом система будет несовместной, если в процессе преобразований мы получим уравнение, в котором коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля; если же мы такого уравнения не встретим, то система будет совместной. Совместная система уравнений будет определенной, если она приводится к треугольному виду* (7), *и неопределенной, если приводится к трапецоидальному виду* (6) *при* $k < n$.

Применим сказанное к случаю системы линейных *однородных* уравнений, т. е. уравнений, свободные члены которых равны нулю. Такая система всегда совместна, так как обладает *нулевым решением* (0, 0, ..., 0). Пусть в рассматриваемой системе число уравнений меньше числа неизвестных. Тогда наша система не может приводиться к треугольному виду, так как в процессе преобразований по методу Гаусса число уравнений системы может уменьшаться, но не может увеличиваться; она приводится, следовательно, к трапецоидальному виду, т. е. неопределенна.

Иными словами, *если в системе линейных однородных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то эта система обладает, помимо нулевого решения, также и ненулевыми решениями*, т. е. решениями, в которых значения некоторых (или даже всех) неизвестных отличны от нуля; *таких решений будет бесконечно много.*

При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса следует выписать матрицу из коэффициентов системы, присоединить к ней столбец из свободных членов, для удобства отделенный вертикальной чертой, и все преобразования выполнять над строками этой «расширенной» матрицы.

Примеры. 1. Решить систему.

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3&=-9,\\ x_1-x_2+3x_3&=2,\\ 3x_1-6x_2-x_3&=25. \end{aligned}\right\}$$

Подвергаем преобразованиям расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

Мы приходим, следовательно, к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3&=-9,\\ -3x_2-2x_3&=11,\\ -8x_3&=8,\end{aligned}\right\}$$

обладающей единственным решением

$$x_1=2,\quad x_2=-3,\quad x_3=-1.$$

Исходная система оказалась определенной.

2. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x_1-5x_2-8x_3+x_4&=3,\\ 3x_1+x_2-3x_3-5x_4&=1,\\ x_1-7x_3+2x_4&=-5,\\ 11x_2+20x_3-9x_4&=2.\end{aligned}\right\}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1\\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5\\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right).$$

Мы пришли к системе, содержащей уравнение $0=2$. Исходная система будет, следовательно, несовместной.

3. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 4x_1+x_2-3x_3-x_4&=0,\\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4&=0,\\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

Это система однородных уравнений, причем число уравнений меньше числа неизвестных; она должна быть поэтому неопределенной. Так как все свободные члены равны нулю, то мы будем подвергать преобразованиям лишь матрицу из коэффициентов системы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & -5\\ 1 & -2 & -2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13\\ 0 & 7 & 5 & -11\\ 1 & -2 & -2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 7 & 5 & -11\\ 1 & -2 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Мы пришли к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_2-2x_4&=0,\\ 7x_2+5x_3-11x_4&=0,\\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

В качестве свободного неизвестного можно принять любое из неизвестных $x_2$ и $x_4$. Пусть $x_4=\alpha$. Тогда из первого уравнения следует $x_2=\alpha$, после чего

из второго уравнения получаем $x_3=\frac{4}{5}\alpha$ и, наконец, из третьего уравнения $x_1=\frac{3}{5}\alpha$. Таким образом,

$$\frac{3}{5}\alpha,\ \alpha,\ \frac{4}{5}\alpha,\ \alpha$$

будет общий вид решений заданной системы уравнений.

## § 2. Определители второго и третьего порядков

Метод решения системы линейных уравнений, изложенный в предшествующем параграфе, весьма прост и требует выполнения однотипных вычислений, легко осуществляемых на счетных машинах. Его существенным недостатком является, однако, то, что он не дает возможности сформулировать условия совместности или определенности системы при помощи коэффициентов и свободных членов этой системы. С другой стороны, даже в случае определенной системы этот метод не позволяет найти формулы, выражающие решение системы через ее коэффициенты и свободные члены. Все это оказывается, однако, необходимым в разных теоретических вопросах, в частности, в геометрических исследованиях, а поэтому теорию систем линейных уравнений приходится развивать иными методами, более глубокими. Общий случай будет рассмотрен в следующей главе, а дальнейшее содержание настоящей главы посвящается случаю определенных систем, имеющих равное число уравнений и неизвестных, причем мы начнем с уже изучавшихся в элементарной алгебре систем с двумя и тремя неизвестными.

Пусть дана *система двух линейных уравнений с двумя неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

коэффициенты которой составляют квадратную матрицу второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Применяя к системе (1) метод уравнивания коэффициентов, мы получим:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

Предположим, что $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$. Тогда

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$