из второго уравнения получаем $x_3=\frac{4}{5}\alpha$ и, наконец, из третьего уравнения $x_1=\frac{3}{5}\alpha$. Таким образом,

$$\frac{3}{5}\alpha,\ \alpha,\ \frac{4}{5}\alpha,\ \alpha$$

будет общий вид решений заданной системы уравнений.

## § 2. Определители второго и третьего порядков

Метод решения системы линейных уравнений, изложенный в предшествующем параграфе, весьма прост и требует выполнения однотипных вычислений, легко осуществляемых на счетных машинах. Его существенным недостатком является, однако, то, что он не дает возможности сформулировать условия совместности или определенности системы при помощи коэффициентов и свободных членов этой системы. С другой стороны, даже в случае определенной системы этот метод не позволяет найти формулы, выражающие решение системы через ее коэффициенты и свободные члены. Все это оказывается, однако, необходимым в разных теоретических вопросах, в частности, в геометрических исследованиях, а поэтому теорию систем линейных уравнений приходится развивать иными методами, более глубокими. Общий случай будет рассмотрен в следующей главе, а дальнейшее содержание настоящей главы посвящается случаю определенных систем, имеющих равное число уравнений и неизвестных, причем мы начнем с уже изучавшихся в элементарной алгебре систем с двумя и тремя неизвестными.

Пусть дана *система двух линейных уравнений с двумя неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

коэффициенты которой составляют квадратную матрицу второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Применяя к системе (1) метод уравнивания коэффициентов, мы получим:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

Предположим, что $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$. Тогда

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

Легко проверить, подставляя полученные значения неизвестных в уравнения (1), что (3) служит решением для системы (1); вопрос о единственности этого решения будет рассматриваться в § 7.

Общий знаменатель значений неизвестных (3) очень просто выражается через элементы матрицы (2): он равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов второй диагонали. Это число называется *определителем* (или *детерминантом*) матрицы (2), причем, как говорят, *определителем второго порядка*, так как матрица (2) есть матрица второго порядка. Для обозначения определителя матрицы (2) употребляется следующий символ: выписывается матрица (2), но заключается вместо круглых скобок в прямые черточки; таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{4}$$

Примеры.

1) $$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 7\cdot 1 = 5;$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - (-2)\cdot 3 = 11.$$

Следует еще раз подчеркнуть, что в то время как матрица есть таблица из чисел, определитель есть число, вполне определенным образом связанное с квадратной матрицей. Заметим, что произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами* определителя второго порядка.

Числители выражений (3) имеют такой же вид, как и знаменатель, т. е. также являются определителями второго порядка: числитель выражения для $x_1$ является определителем матрицы, получающейся из матрицы (2) заменой ее первого столбца столбцом из свободных членов системы (1), числитель выражения для $x_2$ есть определитель матрицы, получающейся из матрицы (2) такой же заменой ее второго столбца. Формулы (3) теперь можно записать в следующем виде:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Словами это правило решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными (называемое *правилом Крамера*) формулируется следующим образом:

*Если определитель* (4) *из коэффициентов системы уравнений* (1) *отличен от нуля, то мы получим решение системы* (1), *беря в качестве значений для неизвестных дроби, общим знаменателем которых служит определитель* (4), *а числителем для неизвестного* $x_i$ $(i = 1, 2)$ *является определитель, получающийся заменой*

*в определителе* (4) *i-го столбца* (*т. е. столбца коэффициентов при искомом неизвестном*) *столбцом из свободных членов системы* (1)[1]).

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7, \\ x_1 - 3x_2 &= -2. \end{aligned}\right\}$$

Определитель из коэффициентов есть

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7;$$

он отличен от нуля, и поэтому к системе применимо правило Крамера. Числителями для неизвестных будут определители

$$d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11.$$

Таким образом, решением нашей системы служит следующая система чисел:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{19}{7}, \qquad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{11}{7}.$$

Введение определителей второго порядка не вносит существенных упрощений в решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными, и без этого не представляющее никаких трудностей. Аналогичные методы для случая *систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными* оказываются уже практически полезными. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

с матрицей из коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Если мы умножим обе части первого из уравнений (6) на число $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, обе части второго уравнения на $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, обе части третьего на $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$, а затем сложим все три уравнения, то, как легко проверить, коэффициенты при $x_2$ и $x_3$ окажутся

---

[1]) Мы в этой формулировке для краткости говорим о замене столбцов «в определителе». Подобным же образом и в будущем мы будем говорить, если это будет удобнее, о строках и столбцах определителя, о его элементах, диагоналях и т. д.

равными нулю, т. е. эти неизвестные одновременно исключаются, и мы получим равенство

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32})\,x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-$$
$$-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}. \qquad (8)$$

Коэффициент при $x_1$ в этом равенстве называется *определителем третьего порядка*, соответствующим матрице (7). Для его записи употребляется такая же символика, как и в случае определителей второго порядка; таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (9)$$

Хотя выражение определителя третьего порядка является достаточно громоздким, закон его составления из элементов матрицы (7) оказывается весьма простым. В самом деле, один из трех членов определителя, входящих в его выражение (9) со знаком плюс, будет произведением элементов главной диагонали, каждый из двух других — произведением элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла матрицы. Члены, входящие в (9) со знаком минус, строятся таким же образом, но относительно второй диагонали. Мы получаем способ вычисления определителей третьего порядка, приводящий (при наличии некоторой тренировки) весьма быстро к результату. На рис. 1

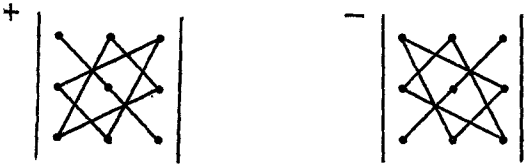


Рис. 1.

слева схематически указано правило вычисления положительных членов определителя третьего порядка, справа — правило вычисления его отрицательных членов.

Примеры.

1) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-$$
$$-2\cdot3\cdot2-1\cdot(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3=$$
$$=30+2-24-12+20-6=10.$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot3\cdot0+0\cdot2\cdot1+(-5)\cdot(-2)\cdot(-2)-$$
$$-(-5)\cdot3\cdot1-0\cdot(-2)\cdot0-1\cdot2\cdot(-2)=$$
$$=-20+15+4=-1.$$

Правая часть равенства (8) также будет определителем третьего порядка, а именно определителем матрицы, получающейся из матрицы (7) заменой ее первого столбца столбцом из свободных членов системы (6). Если мы обозначим определитель (9) буквой $d$, а определитель, получающийся заменой его $j$-го столбца ($j=1, 2, 3$) столбцом из свободных членов системы (6), символом $d_j$, то равенство (8) приобретет вид $dx_1=d_1$, откуда при $d\neq 0$ следует

$$x_1=\frac{d_1}{d}. \tag{10}$$

Таким же путем, умножая уравнения (6) соответственно на числа $a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$, мы получим для $x_2$ следующее выражение (снова при $d\neq 0$):

$$x_2=\frac{d_2}{d}. \tag{11}$$

Наконец, умножая эти уравнения соответственно на $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, мы придем к выражению для $x_3$:

$$x_3=\frac{d_3}{d}. \tag{12}$$

Подставляя выражения (10)—(12) в уравнения (6) (предполагается, понятно, что определители $d$ и все $d_j$ записаны в развернутом виде), мы получили бы после громоздких, но вполне доступных читателю вычислений, что все эти уравнения удовлетворяются, т. е. что числа (10)—(12) составляют решение системы (6). Таким образом, *если определитель из коэффициентов системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными отличен от нуля, то решение этой системы может быть найдено по правилу Крамера, формулируемому так же, как и в случае системы двух уравнений.* Другое доказательство этого утверждения (не опирающееся на опущенные нами вычисления), а также доказательство единственности решения (10)—(12) системы (6), притом для более общего случая, читатель найдет в § 7.

Пример. Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=0,\\ 3x_1+2x_2-5x_3&=1,\\ x_1+3x_2-2x_3&=4. \end{aligned}\right\}$$

Определитель из коэффициентов системы отличен от нуля:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28,$$

поэтому к системе применимо правило Крамера. Числителями для неизвестных будут определители

$$d_1=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix}=13,\quad d_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=47,$$

$$d_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=21,$$

т. е. решением системы служит система чисел

$$x_1=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

## § 3. Перестановки и подстановки

Для определения и изучения определителей порядка $n$ нам будут нужны некоторые понятия и факты, относящиеся к конечным множествам. Пусть дано некоторое конечное множество $M$, состоящее из $n$ элементов. Эти элементы могут быть перенумерованы при помощи первых $n$ натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$, и так как в интересующих нас вопросах индивидуальные свойства элементов множества $M$ не будут играть никакой роли, то мы просто примем, что элементами $M$ служат сами эти числа $1, 2, \ldots, n$.

Помимо употребляющегося нами расположения чисел $1, 2, \ldots, n$ в их нормальном порядке, их можно упорядочить и многими другими способами. Так, числа 1, 2, 3, 4 можно расположить также следующими способами: 3, 1, 2, 4 или 2, 4, 1, 3 и т. д. Всякое расположение чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором определенном порядке называется *перестановкой* из $n$ чисел (или из $n$ символов).

*Число различных перестановок из $n$ символов равно произведению* $1\cdot 2\ldots n$, обозначаемому $n!$ (читается: «эн-факториал»). Действительно, общий вид перестановки из $n$ символов есть $i_1, i_2, \ldots, i_n$, где каждое из $i_s$ есть одно из чисел $1, 2, \ldots, n$, причем ни одно из этих чисел не встречается дважды. В качестве $i_1$ можно взять любое из чисел $1, 2, \ldots, n$; это дает $n$ различных возможностей. Если, однако, $i_1$ уже выбрано, то в качестве $i_2$ можно взять лишь одно из оставшихся $n-1$ чисел, т. е. число различных способов выбрать символы $i_1$ и $i_2$ равно произведению $n(n-1)$ и т. д.

Таким образом, число перестановок из $n$ символов при $n=2$ равно $2!=2$ (перестановки 12 и 21; мы не будем в примерах, где $n\leqslant 9$, разделять переставляемые символы запятыми); при $n=3$ это число равно $3!=6$, при $n=4$ оно равно $4!=24$. Далее, с ростом $n$ число перестановок чрезвычайно быстро возрастает; так, при $n=5$ оно равно $5!=120$, а при $n=10$ — уже 3 628 800.

Если в некоторой перестановке мы поменяем местами какие-либо два символа (не обязательно стоящие рядом), а все остальные сим-