умноженной на некоторое число. Вообще, *определитель не меняется, если к одной из его строк прибавляется любая линейная комбинация других строк.*

Рассмотрим один пример. Определитель называется *кососимметрическим*, если его элементы, симметричные относительно главной диагонали, отличаются друг от друга лишь знаком, т. е. если при всех i и j будет $a_{ji}=-a_{ij}$; отсюда следует, что для всех i будет $a_{ii}=-a_{ii}=0$. Таким образом, определитель имеет вид

$$d=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Умножая каждую строку этого определителя на число -1, мы получим транспонированный определитель, т. е. снова равный d, откуда, ввиду свойства 5, следует:

$$(-1)^n d=d.$$

При нечетном n отсюда вытекает: $-d=d$, т. е. $d=0$. Таким образом, *всякий кососимметрический определитель нечетного порядка равен нулю.*

§ 5. Миноры и их алгебраические дополнения

Выше уже отмечалось, что было бы затруднительно вычислять определители n-го порядка, применяя непосредственно их определение, т. е. каждый раз выписывая все $n!$ членов, определяя их знаки и т. д. Существуют более простые методы вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков. С этой целью введем следующее понятие.

Пусть дан определитель d порядка n. Берем целое число k, удовлетворяющее условию $1\leqslant k\leqslant n-1$, и в определителе d выбираем произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, т. е. принадлежащие к одной из выбранных строк и к одному из выбранных столбцов, составляют, очевидно, матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется *минором k-го порядка* определителя d. Можно сказать также, что минор k-го порядка есть определитель, получающийся после вычеркивания в определителе d $n-k$ строк и $n-k$ столбцов. В частности, после вычеркивания в определителе одной строки и одного столбца мы получаем минор $(n-1)$-го порядка; с другой стороны, минорами первого порядка будут отдельные элементы определителя d.

Пусть в определителе d n-го порядка взят минор M k-го порядка. Если мы вычеркнем те строки и столбцы, на пересечении которых стоит этот минор, то останется минор M' $(n-k)$-го порядка, который называется *дополнительным минором* для минора M. Если мы вычеркнем, наоборот, те строки и столбцы, в которых расположены

элементы минора M', то останется, очевидно, минор M. Таким образом, можно говорить о паре взаимно дополнительных миноров определителя. В частности, элемент a_{ij} и минор $(n-1)$-го порядка, получающийся вычеркиванием в определителе i-й строки и j-го столбца, будут составлять пару взаимно дополнительных миноров.

Если минор k-го порядка M расположен в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и в столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, то назовем *алгебраическим дополнением* минора M его дополнительный минор M', взятый со знаком плюс или минус в зависимости от того, четна или нечетна сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор M, т. е. сумма

$$s_M = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k. \tag{1}$$

Иными словами, алгебраическим дополнением для минора M будет число $(-1)^{s_M} M'$.

Произведение любого минора M k-го порядка на его алгебраическое дополнение в определителе d является алгебраической суммой, слагаемые которой, получающиеся от умножения членов минора M на взятые со знаком $(-1)^{s_M}$ члены дополнительного минора M', будут некоторыми членами определителя d, причем их знаки в этой сумме совпадают с теми знаками, с какими они входят в состав определителя.

Доказательство этой теоремы мы начнём со случая, когда минор M расположен в левом верхнем углу определителя:

$$d = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1,\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & M & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k,\,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,\,1} & \ldots & a_{k+1,\,k} & a_{k+1,\,k+1} & \ldots & a_{k+1,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & M' & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & a_{n,\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right|,$$

т. е. в строках с номерами $1, 2, \ldots, k$ и в столбцах с такими же номерами. Тогда минор M' будет занимать правый нижний угол определителя. Число s_M в этом случае будет четным:

$$s_M = 1 + 2 + \ldots + k + 1 + 2 + \ldots + k = 2(1 + 2 + \ldots + k),$$

поэтому алгебраическим дополнением для M служит сам минор M'.

Берем произвольный член

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k\alpha_k} \tag{2}$$

минора M; его знак в M будет $(-1)^l$, если l есть число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Произвольный член

$$a_{k+1,\,\beta_{k+1}}\,a_{k+2,\,\beta_{k+2}}\ldots a_{n\beta_n} \tag{4}$$

минора M' имеет в этом миноре знак $(-1)^{l'}$, где l' есть число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Перемножая члены (2) и (4), мы получим произведение n элементов

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{k\alpha_k}a_{k+1,\,\beta_{k+1}}a_{k+2,\,\beta_{k+2}}\ldots a_{n\beta_n}, \tag{6}$$

расположенных в разных строках и разных столбцах определителя; оно будет, следовательно, членом определителя d. Знак члена (6) в произведении MM' будет произведением знаков членов (2) и (4), т. е. $(-1)^{l}\cdot(-1)^{l'}=(-1)^{l+l'}$. Такой же знак имеет, однако, член (6) и в определителе d. Действительно, нижняя строка подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix},$$

составленной из индексов этого члена, содержит лишь $l+l'$ инверсий, так как никакое α ни с одним из β не может составить инверсию: все α не больше k, все β не меньше $k+1$.

Этим доказан рассматриваемый нами частный случай теоремы. Переходим к рассмотрению общего случая, т. е. предположим, что минор M расположен в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и в столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, причем

$$i_1<i_2<\ldots<i_k, \quad j_1<j_2<\ldots<j_k.$$

Постараемся, переставляя строки и столбцы определителя, передвинуть минор M в левый верхний угол, причем так, чтобы дополнительный минор не изменился. Для этой цели переставим i_1-ю строку с (i_1-1)-й, затем с (i_1-2)-й и т. д., пока i_1-я строка не займет место первой строки; для этого мы должны будем переставить строки i_1-1 раз. Будем затем последовательно переставлять i_2-ю строку со строками, расположенными над нею, пока она не расположится непосредственно под i_1-й строкой, т. е. на месте, которое до начала всех преобразований занимала вторая строка; для этого, как легко проверить, мы должны будем переставить строки i_2-2 раза. Аналогичным образом i_3-ю строку мы передвинем на место третьей строки и т. д., пока i_k-я строка не окажется на месте k-й строки. Всего мы должны будем совершить

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)= \\ =(i_1+i_2+\ldots+i_k)-(1+2+\ldots+k)$$

транспозиций строк.

Минор M расположен уже в первых k строках нового определителя. Будем теперь последовательно переставлять столбцы определителя: j_1-й со всеми ему предшествующими, пока он не займет первого места, затем j_2-й, пока он не займет второго места, и т. д. Всего столбцы будут переставлены

$$(j_1+j_2+\ldots+j_k)-(1+2+\ldots+k)$$

раз.

После всех этих преобразований мы приходим к новому определителю d', в котором минор M занимает левый верхний угол. Так как мы переставляли каждый раз лишь соседние строки или столбцы, то взаимное расположение строк и столбцов, содержавших в определителе d минор M', остается без изменения, а поэтому дополнительным к минору M в определителе d' остается минор M', занимающий, однако, уже правый нижний угол. Как доказано выше, произведение MM' является суммой некоторого количества членов определителя d', взятых с теми же знаками, с какими они входят в d'. Однако определитель d' получен из определителя d путем

$$\begin{aligned}&[(i_1+i_2+\ldots+i_k)-(1+2+\ldots+k)]+\\&\qquad+[(j_1+j_2+\ldots+j_k)-(1+2+\ldots+k)]=\\&\qquad\qquad=s_M-2(1+2+\ldots+k)\end{aligned}$$

транспозиций строк и столбцов, поэтому, как мы знаем из предшествующего параграфа, члены определителя d' отличаются от соответственных членов определителя d лишь знаком $(-1)^{s_M}$ (четное число $2(1+2+\ldots+k)$ не будет, понятно, влиять на знак). Отсюда следует, что произведение $(-1)^{s_M}MM'$ состоит из некоторого количества членов определителя d, взятых с такими же знаками, какие они имеют в этом определителе. Теорема доказана.

Заметим, что если миноры M и M' взаимно дополнительны, то числа s_M и $s_{M'}$ имеют одинаковую четность. Действительно, номер всякой строки и всякого столбца входит слагаемым в одно и только одно из этих чисел, а поэтому сумма $s_M+s_{M'}$ равна общей сумме номеров всех строк и столбцов определителя, т. е. равна четному числу $2(1+2+\ldots+n)$.

§ 6. Вычисление определителей

Результаты предшествующего параграфа позволяют свести вычисление определителя n-го порядка на вычисление нескольких определителей $(n-1)$-го порядка. Введем сначала следующие обозначения: если a_{ij} — элемент определителя d, то через M_{ij} обозначим дополнительный минор или, короче, *минор этого элемента*, т. е. минор $(n-1)$-го порядка, получающийся после вычеркивания из определи-