Минор M расположен уже в первых k строках нового определителя. Будем теперь последовательно переставлять столбцы определителя: j_1-й со всеми ему предшествующими, пока он не займет первого места, затем j_2-й, пока он не займет второго места, и т. д. Всего столбцы будут переставлены

$$(j_1+j_2+\ldots+j_k)-(1+2+\ldots+k)$$

раз.

После всех этих преобразований мы приходим к новому определителю d', в котором минор M занимает левый верхний угол. Так как мы переставляли каждый раз лишь соседние строки или столбцы, то взаимное расположение строк и столбцов, содержавших в определителе d минор M', остается без изменения, а поэтому дополнительным к минору M в определителе d' остается минор M', занимающий, однако, уже правый нижний угол. Как доказано выше, произведение MM' является суммой некоторого количества членов определителя d', взятых с теми же знаками, с какими они входят в d'. Однако определитель d' получен из определителя d путем

$$\begin{aligned}&[(i_1+i_2+\ldots+i_k)-(1+2+\ldots+k)]+\\&\qquad+[(j_1+j_2+\ldots+j_k)-(1+2+\ldots+k)]=\\&\qquad\qquad=s_M-2(1+2+\ldots+k)\end{aligned}$$

транспозиций строк и столбцов, поэтому, как мы знаем из предшествующего параграфа, члены определителя d' отличаются от соответственных членов определителя d лишь знаком $(-1)^{s_M}$ (четное число $2(1+2+\ldots+k)$ не будет, понятно, влиять на знак). Отсюда следует, что произведение $(-1)^{s_M}MM'$ состоит из некоторого количества членов определителя d, взятых с такими же знаками, какие они имеют в этом определителе. Теорема доказана.

Заметим, что если миноры M и M' взаимно дополнительны, то числа s_M и $s_{M'}$ имеют одинаковую четность. Действительно, номер всякой строки и всякого столбца входит слагаемым в одно и только одно из этих чисел, а поэтому сумма $s_M+s_{M'}$ равна общей сумме номеров всех строк и столбцов определителя, т. е. равна четному числу $2(1+2+\ldots+n)$.

§ 6. Вычисление определителей

Результаты предшествующего параграфа позволяют свести вычисление определителя n-го порядка на вычисление нескольких определителей $(n-1)$-го порядка. Введем сначала следующие обозначения: если a_{ij} — элемент определителя d, то через M_{ij} обозначим дополнительный минор или, короче, *минор этого элемента*, т. е. минор $(n-1)$-го порядка, получающийся после вычеркивания из определи-

теля i-й строки и j-го столбца. Далее, через A_{ij} обозначим алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, т. е.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Как доказано в предшествующем параграфе, произведение $a_{ij}A_{ij}$ является суммой нескольких членов определителя d, входящих в эту сумму с теми же знаками, с какими они входят в состав определителя d. Легко подсчитать число этих членов: оно равно числу членов в миноре M_{ij}, т. е. равно $(n-1)!$.

Выбираем теперь любую i-ю строку определителя d и берем произведение каждого элемента этой строки на его алгебраическое дополнение:

$$a_{i1}A_{i1},\ a_{i2}A_{i2},\ \ldots,\ a_{in}A_{in}. \tag{1}$$

Никакой член определителя d не может войти в состав двух разных из числа произведений (1): все члены определителя, входящие в произведение $a_{i1}A_{i1}$, содержат из i-й строки элемент a_{i1} и поэтому отличаются от членов, входящих в произведение $a_{i2}A_{i2}$, т. е. содержащих из i-й строки элемент a_{i2}, и т. д.

С другой стороны, общее число членов определителя d, входящих во все произведения (1), равно

$$(n-1)!\cdot n=n!,$$

т. е. этим исчерпываются вообще все члены определителя d. Мы доказали, таким образом, что имеет место следующее *разложение определителя d по i-й строке*:

$$d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}, \tag{2}$$

т. е. *определитель d равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки на их алгебраические дополнения.* Аналогичное разложение определителя можно получить и по любому его столбцу.

Заменяя в разложении (2) алгебраические дополнения соответствующими минорами со знаками плюс или минус, мы сведем вычисление определителя n-го порядка к вычислению нескольких определителей $(n-1)$-го порядка. Заметим, что если некоторые из элементов i-й строки равны нулю, то соответствующие им миноры не нужно будет, понятно, вычислять. Ввиду этого полезно предварительно так преобразовать определитель, используя свойство 9 (см. § 4), чтобы в одной из строк или в одном из столбцов достаточно много элементов оказалось замененными нулями. В действительности *свойство 9 позволяет в любой строке или любом столбце заменить нулями все элементы, кроме одного.* В самом деле, если $a_{ik}\neq 0$, то любой элемент i-й строки a_{ij}, $j\neq k$, будет заменен нулем после вычитания k-го столбца, умноженного

на $\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$, из j-го столбца. Таким образом, вычисление определителя n-го порядка можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка.

Примеры.

1. Вычислить определитель четвертого порядка

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Разложим его по третьей строке, используя наличие в ней одного нуля:

$$d=(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя полученные определители третьего порядка, получим:

$$d=2\cdot 16-40+48=40.$$

2. Вычислить определитель пятого порядка

$$d=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя ко второй строке утроенную пятую и вычитая из четвертой строки учетверенную пятую, получим:

$$d=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по третьему столбцу, содержащему лишь один не равный нулю элемент (с суммой индексов $5+3$, т. е. четной), получим

$$d=(-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем вновь полученный определитель, прибавляя к первой строке удвоенную вторую и вычитая из третьей строки утроенную вторую, а из четвертой — удвоенную вторую:

$$d=-\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix},$$

а затем разложим его по первому столбцу, причем заметим, что единственному не равному нулю элементу этого столбца соответствует нечетная сумма индексов, получим:

$$d=\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель третьего порядка, предварительно разложив его по третьей строке:

$$d=36\cdot\begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix}-(-33)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix}+(-24)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix}=$$

$$=36\cdot(-72)-(-33)\cdot(-104)+(-24)\cdot(-208)=-1032.$$

3. *Если все элементы определителя, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то этот определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.*

Для определителя второго порядка это утверждение очевидно. Мы будем поэтому доказывать его по индукции, т. е. предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка оно уже доказано, и рассмотрим определитель n-го порядка

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая его по первому столбцу, получим:

$$d=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Но к минору, стоящему в правой части, применимо предположение индукции, т. е. он равен произведению $a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$, а поэтому

$$d=a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

4. *Определителем Вандермонда* называется определитель

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что *при любом n определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей a_i-a_j, где $1\leqslant j<i\leqslant n$.* Действительно при $n=2$ будет

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1.$$

Пусть наше утверждение уже доказано для определителей Вандермонда $(n-1)$-го порядка. Преобразуем определитель d следующим образом: из n-й (последней) строки вычитаем $(n-1)$-ю, умноженную на a_1, затем из $(n-1)$-й вычитаем $(n-2)$-ю, также умноженную на a_1, и т. д., наконец, из второй строки вычитаем первую, умноженную на a_1. Мы получим:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \dots & a_n^2-a_1a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, мы придем к определителю $(n-1)$-го порядка; после вынесения из всех столбцов общих множителей за знак определителя он примет вид

$$d=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Последний множитель является определителем Вандермонда $(n-1)$-го порядка, т. е., по предположению, равен произведению всех разностей a_i-a_j для $2\leqslant j<i\leqslant n$. Можно написать, следовательно, употребляя символ $\prod$ для обозначения произведения, что

$$d=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

Таким же методом может быть доказано, что определитель

$$d'=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, т. е.

$$d' = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i - a_j).$$

Обобщая полученные выше разложения определителя по строке или столбцу, докажем следующую теорему, говорящую о *разложении определителя по нескольким строкам или столбцам.*

Теорема Лапласа. *Пусть в определителе d порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю d.*

Доказательство. Пусть в определителе d выбраны строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Мы знаем, что произведение любого минора k-го порядка M, расположенного в этих строках, на его алгебраическое дополнение состоит из некоторого количества членов определителя d, взятых с теми же знаками, с какими они входят в состав определителя. Теорема будет, следовательно, доказана, если мы покажем, что, заставляя M пробегать все миноры k-го порядка, расположенные в выбранных строках, мы получим все члены определителя, причем ни один из них не встретится дважды.

Пусть

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{3}$$

— произвольный член определителя d. Возьмем отдельно произведение тех элементов из этого члена, которые принадлежат к выбранным нами строкам с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Это будет произведение

$$a_{i_1\alpha_{i_1}} a_{i_2\alpha_{i_2}} \ldots a_{i_k\alpha_{i_k}}; \tag{4}$$

k множителей этого произведения стоят в k различных столбцах, а именно, в столбцах с номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$. Эти номера столбцов вполне определяются, следовательно, заданием члена (3). Если мы обозначим через M минор k-го порядка, стоящий на пересечении столбцов с этими номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ и выбранных ранее строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, то произведение (4) будет одним из членов минора M, а произведение всех элементов из члена (3), не вошедших в (4), — членом его дополнительного минора. Таким образом, всякий член определителя входит в произведение некоторого, притом вполне определенного, минора k-го порядка из выбранных строк на его дополнительный минор, причем является произведением вполне определенных членов этих двух миноров. Для того же, наконец, чтобы получить взятый нами член определителя с тем знаком, какой он имеет в определителе, остается, как мы знаем, заменить дополнительный минор алгебраическим дополнением. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Доказательство теоремы можно было бы вести и несколько иным путем. Именно, произведение любого минора k-го порядка M, расположенного в выбранных строках, на его алгебраическое дополнение состоит из $k!\,(n-k)!$ членов, так как минор k-го порядка M состоит из $k!$ членов, а его алгебраическое дополнение, отличаясь, возможно, лишь знаком от минора порядка $n-k$, содержит $(n-k)!$ членов. С другой стороны, число миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных нами строках, равно числу сочетаний из n по k, т. е. равно числу

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Перемножая, мы получаем, что сумма произведений всех миноров k-го порядка из выбранных строк на их алгебраические дополнения состоит из $n!$ слагаемых. Таково же, однако, и общее число членов определителя d. Теорема будет, следовательно, доказана, если мы покажем, что всякий член определителя d входит хотя бы один раз (а тогда и точно один раз) в рассматриваемую сумму произведений миноров на их алгебраические дополнения. Для этого читателю остается повторить (с некоторыми упрощениями) рассуждения, проведенные в предшествующем доказательстве.

Теорема Лапласа позволяет сводить вычисление определителя n-го порядка к вычислению нескольких определителей порядков k и $n-k$. Этих новых определителей окажется, вообще говоря, весьма много, и поэтому применять теорему Лапласа целесообразно лишь в том случае, если в определителе можно так выбрать k строк (или столбцов), что многие из миноров k-го порядка, расположенных в этих строках, будут равны нулю.

Примеры.

1. Пусть дан определитель, все элементы которого, стоящие в первых k строках и последних $n-k$ столбцах, равны нулю:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & 0 & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & & & \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда этот определитель равен произведению двух своих миноров:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства достаточно разложить определитель по первым k строкам.

2. Пусть дан определитель d порядка $2n$, в левом верхнем углу которого стоит минор n-го порядка, составленный целиком из нулей. Если миноры n-го порядка, стоящие в правом верхнем, левом нижнем и правом нижнем

углах определителя, будут обозначены соответственно через M, M' и M'', т. е. определитель можно символически записать в виде $d=\begin{vmatrix} 0 & M \\ M' & M'' \end{vmatrix}$, то $d=(-1)^n MM'$.

Для доказательства разложим определитель по первым n строкам и заметим, что

$$s_M=(1+2+\ldots+n)+[(n+1)+(n+2)\ldots+2n]=n+2n^2,$$

т. е. s_M и n имеют одинаковую четность.

3. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разлагая его по первому и третьему столбцам, содержащим удачно расположенные нули, мы получим:

$$d=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=(-8)\cdot(-20)-(-10)\cdot(-62)-7\cdot 87=-1069.$$

§ 7. Правило Крамера

Изложенная выше теория определителей n-го порядка позволяет показать, что эти определители, введенные лишь по аналогии с определителями второго и третьего порядков, подобно последним могут быть использованы для решения систем линейных уравнений. Сначала сделаем, впрочем, одно дополнительное замечание, связанное с разложениями определителей по строке или столбцу; это замечание будет в дальнейшем неоднократно использоваться.

Разложим определитель

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$