углах определителя, будут обозначены соответственно через M, M' и M'', т. е. определитель можно символически записать в виде $d=\begin{vmatrix} 0 & M \\ M' & M'' \end{vmatrix}$, то $d=(-1)^n MM'$.

Для доказательства разложим определитель по первым n строкам и заметим, что

$$s_M=(1+2+\ldots+n)+[(n+1)+(n+2)\ldots+2n]=n+2n^2,$$

т. е. s_M и n имеют одинаковую четность.

3. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разлагая его по первому и третьему столбцам, содержащим удачно расположенные нули, мы получим:

$$d=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=(-8)\cdot(-20)-(-10)\cdot(-62)-7\cdot 87=-1069.$$

§ 7. Правило Крамера

Изложенная выше теория определителей n-го порядка позволяет показать, что эти определители, введенные лишь по аналогии с определителями второго и третьего порядков, подобно последним могут быть использованы для решения систем линейных уравнений. Сначала сделаем, впрочем, одно дополнительное замечание, связанное с разложениями определителей по строке или столбцу; это замечание будет в дальнейшем неоднократно использоваться.

Разложим определитель

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по его j-му столбцу:

$$d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$$

а затем заменим в этом разложении элементы j-го столбца системой n произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Выражение

$$b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj},$$

которое мы получим, будет, очевидно, служить разложением по j-му столбцу для определителя

$$d' = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

получающегося из определителя d заменой его j-го столбца столбцом из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. В самом деле, замена j-го столбца определителя d не влияет на миноры элементов этого столбца, а поэтому и на их алгебраические дополнения.

Применим это к случаю, когда в качестве чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ берутся элементы k-го столбца определителя d при $k \neq j$. Определитель, который мы получим после такой замены, будет содержать два одинаковых столбца (j-й и k-й) и поэтому будет равен нулю. Равно нулю, следовательно, и разложение этого определителя по его j-му столбцу, т. е.

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} = 0 \text{ при } j \neq k.$$

Таким образом, *сумма произведений всех элементов некоторого столбца определителя на алгебраические дополнения соответственных элементов другого столбца равна нулю.* Такой же результат справедлив, конечно, и для строк определителя.

Переходим к рассмотрению систем линейных уравнений, причем ограничимся пока случаем систем, в которых число уравнений равно числу неизвестных, т. е. систем вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Дополнительно предположим, что определитель d из коэффициентов при неизвестных в этой системе, называемый кратко *определителем системы*, отличен от нуля. При этих предположениях мы докажем, что система (1) совместна и даже определенна.

В § 2, решая систему трех уравнений с тремя неизвестными, мы умножали каждое из уравнений на некоторый множитель, а затем складывали эти уравнения, после чего коэффициенты при двух неизвестных из трех оказывались равными нулю. Сейчас мы

легко обнаруживаем, что множители, которые нами употреблялись, были алгебраическими дополнениями в определителе системы к элементу, являющемуся коэффициентом при искомом неизвестном в данном уравнении. Этот же прием будет теперь использован для решения системы (1).

Предположим сначала, что система (1) совместна и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — одно из ее решений. Справедливы, следовательно, равенства

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Пусть j будет любым из чисел $1, 2, \ldots, n$. Умножим обе части первого из равенств (2) на A_{1j}, т. е. на алгебраическое дополнение элемента a_{1j} в определителе системы d; обе части второго равенства умножим на A_{2j} и т. д., наконец, обе части последнего — на A_{nj}. Складывая затем отдельно левые и отдельно правые части всех равенств, мы придем к следующему равенству:

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})\,\alpha_1 + \\ &\qquad + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj})\,\alpha_2 + \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})\,\alpha_j + \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})\,\alpha_n = \\ &\qquad\qquad = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}. \end{aligned}$$

Коэффициентом при α_j в этом равенстве служит d, коэффициенты при всех остальных α будут, ввиду сделанного выше замечания, равны нулю, а свободный член будет определителем, получающимся из определителя d после замены в нем j-го столбца столбцом из свободных членов системы (1). Если этот последний определитель мы обозначим, как и в § 2, через d_j, то наше равенство примет вид

$$d\alpha_j = d_j,$$

откуда, ввиду $d \neq 0$,

$$\alpha_j = \frac{d_j}{d}.$$

Этим доказано, что если система (1) совместна, то она обладает единственным решением

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{d}, \quad \alpha_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{d_n}{d}. \qquad (3)$$

Покажем теперь, что система чисел (3) на самом деле удовлетворяет системе уравнений (1), т. е. что система (1) совместна. При этом мы используем следующую общеупотребительную символику.

Всякая сумма вида $a_1+a_2+\ldots+a_n$ будет сокращенно обозначаться через $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Если же рассматривается сумма, слагаемые которой a_{ij} снабжены двумя индексами, причем $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$, то можно сначала взять суммы элементов с фиксированным первым индексом, т. е. суммы $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$, где $i=1, 2, \ldots, n$, а затем сложить все эти суммы. Мы получим тогда для суммы всех элементов a_{ij} запись

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

Можно было бы, однако, вначале складывать слагаемые a_{ij} с фиксированным вторым индексом, а затем уже складывать полученные суммы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

т. е. *в двойной сумме можно менять порядок суммирований.*

Подставим теперь в i-е уравнение системы (1) значения неизвестных (3). Так как левую часть i-го уравнения можно записать в виде $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ и так как $d_j=\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$, то мы получим:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\frac{d_j}{d}=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\right)=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right).$$

Относительно этих преобразований заметим, что число $\frac{1}{d}$ оказалось общим множителем во всех слагаемых и поэтому мы его вынесли за знак суммы; кроме того, после перемены порядка суммирований множитель b_k вынесен за знак внутренней суммы, так как от индекса внутреннего суммирования j он не зависит.

Мы знаем, что выражение $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}$ будет равно d при $k=i$ и равно 0 при всех других k. Таким образом, в нашей внешней сумме по k останется лишь одно слагаемое, а именно $b_i d$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\frac{d_j}{d}=\frac{1}{d}\cdot b_i d=b_i.$$

Этим доказано, что система чисел (3) действительно служит решением для системы уравнений (1).

Мы получили следующий важный результат:

Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, обладает решением, и притом только одним. Это решение получается по формулам (3), т. е. по *правилу Крамера*; формулировка этого правила такова же, как и в случае системы двух уравнений (см. § 2).

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-5x_3+x_4&=8,\\ x_1-3x_2\qquad-6x_4&=9,\\ 2x_2-x_3+2x_4&=-5,\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

Определитель этой системы отличен от нуля:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=27,$$

поэтому к системе применимо правило Крамера. Значения неизвестных будут иметь числителями определители

$$d_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81,\qquad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108,$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27,\qquad d_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27.$$

Таким образом,

$$x_1=3,\quad x_2=-4,\quad x_3=-1,\quad x_4=1$$

будет решением нашей системы, притом единственным.

Мы исключили из рассмотрения случай, когда определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными (1) равен нулю. Мы отнесем этот случай к гл. 2, где он найдет себе место в общей теории систем с любым числом уравнений и любым числом неизвестных.

Относительно систем n линейных уравнений с n неизвестными сделаем еще одно замечание. Пусть дана система n линейных однородных уравнений с n неизвестными (см. § 1):

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Все определители d_j, $j = 1, 2 \ldots, n$, содержат в этом случае столбец, составленный из нулей, и поэтому равны нулю. Таким образом, если определитель системы (4) отличен от нуля, т. е. если к этой системе применимо правило Крамера, то единственным решением системы (4) будет нулевое решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ \ldots, \ x_n = 0. \tag{5}$$

Отсюда вытекает такой результат:

Если система n линейных однородных уравнений с n неизвестными обладает решениями, отличными от нулевого, то определитель этой системы необходимо равен нулю.

В § 12 будет показано, что и обратно, если определитель такой системы действительно равен нулю, то, помимо нулевого решения, существование которого для всякой системы однородных уравнений очевидно, у нее будут существовать и другие решения.

Пример. При каких значениях k система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} kx_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{array}\right\}$$

может обладать ненулевыми решениями?

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$$

будет равен нулю лишь при $k = \pm 1$. Легко видеть, что при каждом из этих двух значений k заданная система действительно обладает решениями, отличными от нулевого.

Значение правила Крамера заключается главным образом в том, что в тех случаях, когда это правило применимо, оно дает явное выражение для решения системы через коэффициенты этой системы. Практическое использование правила Крамера связано, однако, с весьма громоздкими вычислениями: в случае системы n линейных уравнений с n неизвестными приходится вычислять $n+1$ определитель n-го порядка. Метод последовательного исключения неизвестных, изложенный нами в § 1, является в этом отношении много более удобным, так как вычисления, которых этот метод требует,

по существу равносильны тем, которые приходится выполнять при вычислении одного определителя n-го порядка.

В различных приложениях встречаются системы линейных уравнений, коэффициенты и свободные члены которых являются действительными числами, полученными в результате измерения некоторых физических величин, т. е. известными лишь приближенно, с некоторой точностью. Для решения таких систем изложенные выше методы оказываются иногда неудобными, так как они приводят к результату с плохой точностью, и вместо них разработаны различные итерационные методы, т. е. методы, позволяющие решать указанные системы уравнений при помощи последовательного приближения неизвестных. Изложение этих методов читатель найдет в книгах по теории приближенных вычислений.