ГЛАВА ВТОРАЯ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)

§ 8. *n*-мерное векторное пространство

Для построения общей теории систем линейных уравнений недостаточно того аппарата, который с таким успехом послужил нам при решении систем, допускающих применение правила Крамера. Помимо определителей и матриц, мы должны будем использовать одно новое понятие, представляющее, быть может, еще больший общематематический интерес, а именно понятие многомерного векторного пространства.

Сначала несколько предварительных замечаний. Из курса аналитической геометрии известно, что всякая точка плоскости определяется (при заданных осях координат) своими двумя координатами, т. е. упорядоченной системой двух действительных чисел; всякий вектор на плоскости определяется своими двумя компонентами, т. е. снова упорядоченной системой двух действительных чисел. Аналогично всякая точка трехмерного пространства определяется своими тремя координатами, всякий вектор в пространстве — тремя компонентами.

В геометрии, а также в механике и физике часто приходится, однако, изучать такие объекты, для задания которых недостаточно трех действительных чисел. Так, рассмотрим совокупность шаров в трехмерном пространстве. Для того чтобы шар был полностью определен, нужно задать координаты его центра и радиус, т. е. задать упорядоченную систему четырех действительных чисел, из которых, впрочем, последнее (радиус) может принимать лишь положительные значения. Рассмотрим, с другой стороны, различные положения твердого тела в пространстве. Положение тела будет вполне определено, если будут указаны координаты его центра тяжести (т. е. три действительных числа), направление некоторой фиксированной оси, проходящей через центр тяжести (два числа — два из трех направляющих косинусов), и, наконец, угол поворота вокруг этой оси. Таким образом, положение твердого тела в пространстве определяется упорядоченной системой из шести действительных чисел.

Эти примеры указывают на целесообразность рассмотрения совокупности всевозможных упорядоченных систем из n действительных чисел. Эта совокупность после введения в нее операций сложения и умножения на число (что будет сделано ниже по аналогии с соответствующими операциями над векторами трехмерного пространства, выраженными через компоненты) и носит название n-мерного векторного пространства. Таким образом, n-мерное пространство есть лишь алгебраическое образование, сохраняющее некоторые простейшие свойства совокупности векторов трехмерного пространства, выходящих из начала координат.

Упорядоченная система n чисел

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{1}$$

называется ***n-мерным вектором***. Числа a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, будут называться ***компонентами*** вектора α. Векторы α и

$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \tag{2}$$

будут считаться ***равными*** в том случае, если совпадают их компоненты, стоящие на одинаковых местах, т. е. если $a_i = b_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Для обозначения векторов будут употребляться дальше малые греческие буквы, в то время как малые латинские буквы будут использованы для обозначения чисел.

В качестве примеров векторов укажем следующие: 1) Векторы-отрезки, выходящие из начала координат на плоскости или в трехмерном пространстве, будут при фиксированной системе координат соответственно двух- и трехмерными векторами в смысле данного выше определения. 2) Коэффициенты всякого линейного уравнения с n неизвестными составляют n-мерный вектор. 3) Всякое решение любой системы линейных уравнений с n неизвестными будет n-мерным вектором. 4) Если дана матрица из s строк и n столбцов, то ее строки будут n-мерными векторами, столбцы — s-мерными векторами. 5) Сама матрица из s строк и n столбцов может рассматриваться как sn-мерный вектор: достаточно прочесть элементы матрицы подряд, строчку за строчкой; в частности, всякая квадратная матрица порядка n может рассматриваться как n^2-мерный вектор, причем, очевидно, всякий n^2-мерный вектор может быть получен этим путем из некоторой матрицы порядка n.

Суммой векторов (1) и (2) называется вектор

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n), \tag{3}$$

компоненты которого суть суммы соответствующих компонент слагаемых векторов. Сложение векторов коммутативно и ассоциативно ввиду коммутативности и ассоциативности сложения чисел.

Роль нуля играет ***нулевой вектор***

$$0 = (0, 0, \ldots, 0). \tag{4}$$

Действительно,

$$\alpha+0=(a_1+0,\ a_2+0,\ \ldots,\ a_n+0)=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=\alpha.$$

Для записи нулевого вектора мы употребляем тот же символ 0, как и для числа нуль; решение вопроса, говорится ли в данный момент о числе нуль или о нулевом векторе, никогда не представит затруднений; читатель должен помнить, однако, при изучении ближайших параграфов о возможности различных толкований символа 0.

Назовем *противоположным* вектору (1) вектор

$$-\alpha=(-a_1,\ -a_2,\ \ldots,\ -a_n). \tag{5}$$

Очевидно, что $\alpha+(-\alpha)=0$. Теперь легко видеть, что для сложения векторов существует обратная операция — вычитание: *разностью* векторов (1) и (2) будет вектор $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$, т. е.

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \ldots,\ a_n-b_n). \tag{6}$$

Сложение n-мерных векторов, определяемое формулой (3), возникло из геометрического сложения векторов на плоскости или в трехмерном пространстве, производимого по правилу параллелограмма. В геометрии используется также умножение вектора на действительное число (на «скаляр»): умножение вектора α на число k означает при $k>0$ растяжение α в k раз (т. е. сжатие при $k<1$), а при $k<0$ растяжение в $|k|$ раз и изменение направления на противоположное. Выражая это правило через компоненты вектора α и переходя к рассматриваемому нами общему случаю, мы получаем такое определение:

Произведением вектора (1) *на число* k называется вектор

$$k\alpha=\alpha k=(ka_1,\ ka_2,\ \ldots,\ ka_n), \tag{7}$$

компоненты которого равны произведению на k соответственных компонент вектора α.

Из этого определения вытекают следующие важные свойства, проверка которых предоставляется читателю:

$$k(\alpha\pm\beta)=k\alpha\pm k\beta; \tag{8}$$

$$(k\pm l)\alpha=k\alpha\pm l\alpha; \tag{9}$$

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha; \tag{10}$$

$$1\cdot\alpha=\alpha. \tag{11}$$

Столь же легко проверяются, но могут быть получены и как следствия из свойств (8)—(11), следующие свойства:

$$0\cdot\alpha=0; \tag{12}$$

$$(-1)\cdot\alpha=-\alpha; \tag{13}$$

$$k\cdot 0=0; \tag{14}$$

$$\text{если } k\alpha=0, \text{ то или } k=0, \text{ или } \alpha=0. \tag{15}$$

Совокупность всех n-мерных векторов с действительными компонентами, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, называется *n-мерным векторным пространством.*

Подчеркнем, что в определение n-мерного векторного пространства не входит никакое умножение вектора на вектор. Определить умножение векторов было бы легко — положить, например, что компоненты произведения векторов равны произведениям соответственных компонент сомножителей. Такое умножение не нашло бы у нас, однако, никаких серьезных приложений. Так, векторы-отрезки, выходящие из начала координат на плоскости или в трехмерном пространстве, составляют при фиксированной системе координат двумерное и, соответственно, трехмерное векторные пространства. Сложение векторов и умножение вектора на число имеют в этом примере, как уже отмечено выше, важный геометрический смысл, в то время как покомпонентному умножению векторов нельзя дать никакого разумного геометрического истолкования.

Рассмотрим еще один пример. Левая часть линейного уравнения от n неизвестных, т. е. выражение вида

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

называется *линейной формой* от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Линейная форма f вполне определяется, очевидно, вектором $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из своих коэффициентов; обратно, всякий n-мерный вектор однозначно определяет некоторую линейную форму. Сложение векторов и умножение вектора на число превращаются в соответствующие операции над линейными формами; эти операции широко использовались нами в § 1. Покомпонентное умножение векторов и в этом примере не имеет никакого смысла.

§ 9. Линейная зависимость векторов

Вектор β из n-мерного векторного пространства называется *пропорциональным* вектору α, если существует такое число k, что $\beta = k\alpha$ (см. формулу (7) предыдущего параграфа). В частности, нулевой вектор пропорционален любому вектору α ввиду равенства $0 = 0 \cdot \alpha$. Если же $\beta = k\alpha$ и $\beta \neq 0$, откуда $k \neq 0$, то $\alpha = k^{-1}\beta$, т. е. для ненулевых векторов пропорциональность обладает свойством симметричности.

Обобщением понятия пропорциональности векторов служит следующее понятие, с которым (для случая строк матрицы) мы уже встречались в § 4: вектор β называется *линейной комбинацией* векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, если существуют такие числа $l_1, l_2, \ldots, l_s$, что

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_s\alpha_s.$$

Таким образом, j-я компонента вектора β, $j = 1, 2, \ldots, n$, равна,