эти подсистемы эквивалентны между собой, т. е., будучи линейно независимыми, содержат по одному и тому же числу векторов.

Число векторов, входящих в любую максимальную линейно независимую подсистему данной системы векторов, называется *рангом* этой системы. Используя это понятие, выведем еще одно следствие из основной теоремы.

Пусть даны две системы n-мерных векторов:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{15}$$

и

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \tag{16}$$

не обязательно линейно независимые, причем ранг системы (15) *равен числу k, ранг системы* (16) — *числу l. Если первая система линейно выражается через вторую, то* $k \leqslant l$. *Если же эти системы эквивалентны, то* $k = l$.

В самом деле, пусть

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k} \tag{17}$$

и

$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_l} \tag{18}$$

будут, соответственно, любые максимальные линейно независимые подсистемы систем (15) и (16). Тогда системы (15) и (17) эквивалентны между собой, и это же верно для систем (16) и (18). Из того, что система (15) линейно выражается через систему (16), вытекает теперь, что система (17) также линейно выражается через систему (16), а поэтому и через эквивалентную ей систему (18), после чего остается, используя линейную независимость системы (17), применить основную теорему. Второе утверждение доказываемого следствия непосредственно вытекает из первого.

§ 10. Ранг матрицы

Если дана некоторая система n-мерных векторов, то возникает естественный вопрос, является ли эта система векторов линейно зависимой или нет. Нельзя рассчитывать на то, что в каждом конкретном случае решение этого вопроса будет получено без затруднений: при поверхностном рассмотрении системы векторов

$$\alpha = (2, -5, 1, -1), \quad \beta = (1, 3, 6, 5), \quad \gamma = (-1, 4, 1, 2)$$

трудно заметить в ней какие-либо линейные зависимости, хотя в действительности эти векторы связаны соотношением

$$7\alpha - 3\beta + 11\gamma = 0$$

Один метод для решения этого вопроса дает § 1; так как компоненты заданных векторов нам известны, то, считая неизвестными

коэффициенты искомой линейной зависимости, мы получаем систему линейных однородных уравнений, которую и решаем методом Гаусса. В настоящем параграфе будет указан другой подход к рассматриваемому вопросу; одновременно мы значительно приблизимся к нашей основной цели — решению произвольных систем линейных уравнений.

Пусть дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

содержащая s строк и n столбцов, причем числа s и n никак не связаны между собой. Столбцы этой матрицы, рассматриваемые как s-мерные векторы, могут, вообще говоря, быть линейно зависимыми. Ранг системы столбцов, т. е. максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A (точнее, число столбцов, входящих в любую максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов), называется *рангом* этой матрицы.

Понятно, что подобным же образом строки матрицы A можно рассматривать как n-мерные векторы. Оказывается, что ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов, т. е. равен рангу этой матрицы. Доказательство этого весьма неожиданного утверждения будет получено после того, как мы укажем еще одну форму определения ранга матрицы, дающую заодно способ его практического вычисления.

Обобщим сначала на случай прямоугольных матриц понятие минора. Выбираем в матрице A произвольные k строк и k столбцов, $k \leqslant \min(s, n)$. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют квадратную матрицу k-го порядка, определитель которой называется *минором k-го порядка* матрицы A. Дальше нас будут интересовать порядки тех миноров матрицы A, которые отличны от нуля, а именно наивысший среди этих порядков. При его разыскании полезно учитывать следующее замечание: *если все миноры k-го порядка матрицы A равны нулю, то равны нулю и все миноры более высоких порядков.* В самом деле, разлагая всякий минор порядка $k+j$, $k<k+j\leqslant \min(s, n)$, на основании теоремы Лапласа, по любым k строкам, мы представим этот минор в виде суммы миноров порядка k, умноженных на некоторые миноры порядка j, и этим докажем, что он равен нулю.

Докажем теперь следующую теорему о ранге матрицы:

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен рангу этой матрицы.

Доказательство. Пусть наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен r. Предположим,— что не нарушает

общности доказательства,— что минор r-го порядка D, стоящий в левом верхнем углу матрицы

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & D & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1,\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r,\,r+1} & \dots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,\,1} & \dots & a_{r+1,\,r} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{r+1,\,r+1} & \dots & a_{r+1,\,n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s,\,r+1} & \dots & a_{sn} \end{matrix} \end{pmatrix},$$

отличен от нуля, $D\neq 0$. Тогда первые r столбцов матрицы A будут между собой линейно независимыми: если бы между ними существовала линейная зависимость, то, так как при сложении векторов складываются соответствующие компоненты, между столбцами минора D существовала бы эта же линейная зависимость и поэтому минор D был бы равен нулю.

Докажем теперь, что всякий l-й столбец матрицы A, $r<l\leqslant n$, будет линейной комбинацией первых r столбцов. Берем любое i, $1\leqslant i\leqslant s$, и строим вспомогательный определитель $(r+1)$-го порядка

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix},$$

получающийся «окаймлением» минора D соответствующими элементами l-го столбца и i-й строки. При любом i определитель Δ_i равен нулю. Действительно, если $i>r$, то Δ_i будет минором $(r+1)$-го порядка нашей матрицы A и поэтому равен нулю ввиду выбора числа r. Если же $i\leqslant r$, то Δ_i уже не будет минором матрицы A, так как не может быть получен вычеркиванием из этой матрицы некоторых ее строк и столбцов; однако определитель Δ_i будет содержать теперь две равные строки и, следовательно, снова равен нулю.

Рассмотрим алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Δ_i. Алгебраическим дополнением для элемента a_{il} служит, очевидно, минор D. Если же $1\leqslant j\leqslant r$, то алгебраическим дополнением для элемента a_{ij} в Δ_i будет число

$$A_j=(-1)^{(r+1)+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,\,j-1} & a_{1,\,j+1} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{r,\,j-1} & a_{r,\,j+1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix};$$

оно не зависит от i и поэтому обозначено через A_j. Таким образом, разлагая определитель Δ_i по его последней строке и приравнивая это разложение нулю, так как $\Delta_i=0$, мы получим:

$$a_{i1}A_1+a_{i2}A_2+\dots+a_{ir}A_r+a_{il}D=0,$$

откуда, ввиду $D \neq 0$,

$$a_{il} = -\frac{A_1}{D} a_{i1} - \frac{A_2}{D} a_{i2} - \ldots - \frac{A_r}{D} a_{ir}.$$

Это равенство справедливо при всех i, $i = 1, 2, \ldots, s$, а так как его коэффициенты от i не зависят, то мы получаем, что весь l-й столбец матрицы A будет суммой ее первых r столбцов, взятых, соответственно, с коэффициентами $-\frac{A_1}{D}, -\frac{A_2}{D}, \ldots, -\frac{A_r}{D}$.

Таким образом, в системе столбцов матрицы A мы нашли максимальную линейно независимую подсистему, состоящую из r столбцов. Этим доказано, что ранг матрицы A равен r, т. е. доказана теорема о ранге.

Эта теорема дает метод для практического вычисления ранга матрицы, а поэтому и для решения вопроса о существовании линейной зависимости в данной системе векторов; составляя матрицу, для которой данные векторы служат столбцами, и вычисляя ранг этой матрицы, мы находим максимальное число линейно независимых векторов нашей системы.

Метод нахождения ранга матрицы, основанный на теореме о ранге, требует вычисления хотя и конечного, но, быть может, очень большого числа миноров этой матрицы. Следующее замечание позволяет, однако, внести в этот метод значительные упрощения. Если читатель просмотрит еще раз доказательство теоремы о ранге, то заметит, что мы не использовали при его проведении равенства нулю всех миноров $(r+1)$-го порядка матрицы A — в действительности употреблялись лишь те миноры $(r+1)$-го порядка, которые окаймляют данный не равный нулю минор r-го порядка D (т. е. содержат его целиком внутри себя), и поэтому из равенства нулю лишь этих миноров вытекает, что r есть максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A; последнее же влечет за собой равенство нулю вообще всех миноров $(r+1)$-го порядка этой матрицы. Мы приходим к следующему правилу вычисления ранга матрицы:

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам бо́льших порядков. Если уже найден минор k-го порядка D, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие минор D: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Примеры.

1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, равен нулю. Однако в матрице содержатся и отличные от нуля миноры второго порядка, например

$$d=\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Минор третьего порядка

$$d'=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix},$$

окаймляющий минор d, отличен от нуля, $d'=1$, однако оба минора четвертого порядка, окаймляющие минор d', равны нулю:

$$\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 4 & -7 & 4 & -4\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -7 & 4 & 5\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен трем.

2. Найти максимальную линейно независимую подсистему в системе векторов

$$\alpha_1=(2,\ -2,\ -4),\quad \alpha_2=(1,\ 9,\ 3),\quad \alpha_3=(-2,\ -4,\ 1),\quad \alpha_4=(3,\ 7,\ -1).$$

Составляем матрицу

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & 3\\ -2 & 9 & -4 & 7\\ -4 & 3 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

для которой данные векторы служат столбцами. Ранг этой матрицы равен двум: минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, но оба минора третьего порядка, его окаймляющие, равны нулю. Отсюда следует, что векторы α_1, α_2 составляют в заданной системе одну из максимальных линейно независимых подсистем.

В качестве следствия из теоремы о ранге матрицы докажем утверждение, уже высказанное ранее:

Максимальное число линейно независимых строк всякой матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов, т. е. равно рангу этой матрицы.

Для доказательства транспонируем матрицу, т. е. сделаем ее строки столбцами, сохраняя их нумерацию. При транспонировании максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы не может измениться, так как транспонирование не меняет определителя, а для всякого минора исходной матрицы минор, полученный из него транспонированием, содержится в новой матрице, и обратно. Отсюда следует, что ранг новой матрицы равен рангу исходной матрицы; он равен, вместе с тем, максимальному числу линейно независимых столбцов новой матрицы, т. е. максимальному числу линейно независимых строк исходной матрицы.

Пример. В § 8 уже было введено понятие линейной формы от n неизвестных и определено сложение линейных форм и их умножение на число. Это определение позволяет перенести на линейные формы понятие линейной зависимости со всеми его свойствами.

Пусть дана система линейных форм

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4, \\ f_2 &= 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4, \\ f_3 &= x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4, \\ f_4 &= 2x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned}$$

Нужно выделить в ней максимальную линейно независимую подсистему.

Составим матрицу из коэффициентов этих форм:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и найдем ее ранг. Минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, но, как легко проверить, все четыре минора третьего порядка, его окаймляющие, равны нулю. Отсюда следует, что первые две строки нашей матрицы линейно независимы, а третья и четвертая будут их линейными комбинациями. Система f_1, f_2 будет, следовательно, искомой подсистемой заданной системы линейных форм.

Укажем еще одно важное следствие из теоремы о ранге матрицы.

Определитель n-го порядка тогда и только тогда равен нулю, если между его строками существует линейная зависимость.

В одну сторону это утверждение уже доказано в § 4 (свойство 8). Пусть теперь нам дан определитель n-го порядка, равный нулю, т. е. дана, иными словами, квадратная матрица n-го порядка, единственный минор которой, имеющий максимальный порядок, равен нулю. Отсюда следует, что наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы меньше n, т. е. ранг меньше n, а поэтому, на основании доказанного выше, строки этой матрицы линейно зависимы.

Понятно, что в формулировке доказанного сейчас следствия можно вместо строк говорить о столбцах определителя.

Для вычисления ранга матрицы существует еще один метод, не связанный с теоремой о ранге и не требующий вычисления определителей. Он применим, впрочем, только в том случае, если мы хотим знать лишь самый ранг и не интересуемся тем, какие именно столбцы (или строки) составляют максимальную линейно независимую систему. Изложим этот метод.

Элементарными преобразованиями матрицы A называются следующие преобразования этой матрицы:

(a) перемена мест (транспозиция) двух строк или двух столбцов;

(b) умножение строки (или столбца) на произвольное отличное от нуля число;

(c) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Легко видеть, что *элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.* Действительно, если эти преобразования применяются, например, к столбцам матрицы, то система столбцов, рассматриваемых как векторы, заменяется эквивалентной системой. Докажем это лишь для преобразования (c), так как для (a) и (b) это очевидно. Пусть к i-му столбцу прибавляется j-й столбец, умноженный на число k. Если столбцами матрицы до преобразования служили векторы

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n, \tag{1}$$

то после преобразования столбцами матрицы будут векторы

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_i' = \alpha_i + k\alpha_j, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n. \tag{2}$$

Система (2) линейно выражается через систему (1), а равенство

$$\alpha_i = \alpha_i' - k\alpha_j$$

показывает, что система (1), в свою очередь, линейно выражается через (2). Эти системы, следовательно, эквивалентны, и поэтому их максимальные линейно независимые подсистемы состоят из одинакового числа векторов.

Таким образом, при вычислении ранга матрицы можно предварительно ее упростить при помощи некоторой комбинации элементарных преобразований.

Говорят, что матрица, содержащая s строк и n столбцов, имеет *диагональную форму*, если все ее элементы равны нулю, кроме элементов a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{rr}$ (где $0 \leqslant r \leqslant \min(s, n)$), равных единице. Ранг этой матрицы равен, очевидно, r.

Всякую матрицу можно элементарными преобразованиями привести к диагональной форме.

В самом деле, пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Если все ее элементы равны нулю, то она уже имеет диагональную форму. Если же в ней есть элементы, отличные от нуля, то транспозицией строк и столбцов можно добиться того, чтобы элемент a_{11} был отличен от нуля. Умножая затем первую строку на a_{11}^{-1}, мы превратим элемент a_{11} в единицу. Если мы вычтем теперь из j-го столбца, $j > 1$, первый столбец, умноженный на a_{1j}, то элемент a_{1j} будет заменен нулем. Делая это преобразование со всеми столбцами, начиная со второго, а также со всеми строками, мы придем к матрице вида

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}' & \ldots & a_{2n}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{s2}' & \ldots & a_{sn}' \end{pmatrix}.$$

Совершая такие же преобразования с матрицей, остающейся в правом нижнем углу, и т. д., мы после конечного числа шагов придем к диагональной матрице, имеющей тот же ранг, что и исходная матрица A.

Таким образом, *для нахождения ранга матрицы нужно элементарными преобразованиями привести эту матрицу к диагональной форме и подсчитать число единиц, стоящих в последней на главной диагонали.*

Пример. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставляя в этой матрице первый и второй столбец, а затем умножая первую строку на число $\frac{1}{2}$, мы придем к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к ее третьему столбцу удвоенный первый столбец, а затем прибавляя некоторое кратное новой первой строки к каждой из остальных строк, мы получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Умножая, наконец, вторую строку на -1, вычитая из третьего столбца утроенный второй столбец, а затем вычитая из третьей и пятой строк некоторые кратные новой второй строки, мы придем к искомой диагональной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен двум.

В гл. 13 мы еще раз встретимся с элементарными преобразованиями и диагональной формой матриц; это будут, впрочем, матрицы, элементами которых являются не числа, а многочлены.

§ 11. Системы линейных уравнений

Мы переходим к изучению произвольных систем линейных уравнений, причем уже не делаем предположения, что число уравнений системы равно числу неизвестных. Наши результаты будут, впрочем, применимы и к тому случаю (оставленному в § 7 без рассмотрения), когда число уравнений равно числу неизвестных, но определитель системы равен нулю.