ГЛАВА ТРЕТЬЯ

АЛГЕБРА МАТРИЦ

§ 13. Умножение матриц

В предшествующих главах понятие матрицы было использовано в качестве существенного вспомогательного орудия при изучении систем линейных уравнений. Многочисленные другие применения этого понятия сделали его предметом большой самостоятельной теории, во многих своих частях выходящей за пределы нашего курса. Мы займемся сейчас основами этой теории, начинающимися с того, что в множестве всех квадратных матриц данного порядка своеобразным, но вполне мотивированным способом определяются две алгебраические операции — сложение и умножение. Мы начнем с определения умножения матриц; сложение матриц будет введено в § 15.

Из курса аналитической геометрии известно, что при повороте осей прямоугольной системы координат на плоскости на угол α координаты точки преобразуются по следующим формулам:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

где x, y — старые координаты точки, x', y' — ее новые координаты; таким образом, x и y выражаются через x' и y' линейно с некоторыми числовыми коэффициентами. Во многих других случаях также приходится встречаться с заменой неизвестных (или переменных), при которой старые неизвестные линейно выражаются через новые; такую замену неизвестных называют обычно их линейным преобразованием (или линейной подстановкой). Мы приходим, следовательно, к такому определению:

Линейным преобразованием неизвестных называется такой переход от системы n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к системе n неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, при котором старые неизвестные выражаются через новые линейно с некоторыми числовыми коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Линейное преобразование (1) вполне определяется своей матрицей из коэффициентов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

так как два линейных преобразования с одной и той же матрицей могут отличаться друг от друга лишь буквами, принятыми для обозначения неизвестных; мы будем считать, однако, что выбор этих обозначений целиком находится в нашем распоряжении. Обратно, задавая произвольную матрицу n-го порядка, мы сейчас же можем написать линейное преобразование, для которого эта матрица служит матрицей коэффициентов. Таким образом, между линейными преобразованиями n неизвестных и квадратными матрицами n-го порядка существует взаимно однозначное соответствие, а поэтому всякому понятию, связанному с линейными преобразованиями, и всякому свойству этих преобразований должно соответствовать аналогичное понятие или свойство, относящееся к матрицам.

Рассмотрим вопрос о последовательном выполнении двух линейных преобразований. Пусть вслед за линейным преобразованием (1) выполнено линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1+b_{12}z_2+\dots+b_{1n}z_n, \\ y_2 &= b_{21}z_1+b_{22}z_2+\dots+b_{2n}z_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= b_{n1}z_1+b_{n2}z_2+\dots+b_{nn}z_n, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

переводящее систему неизвестных $y_1, y_2, \dots, y_n$ в систему $z_1, z_2, \dots, z_n$; матрицу этого преобразования обозначим через B. Подставляя в (1) выражения для $y_1, y_2, \dots, y_n$ из (2), мы придем к линейным выражениям для неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ через неизвестные $z_1, z_2, \dots, z_n$. Таким образом, *результат последовательного выполнения двух линейных преобразований неизвестных снова будет линейным преобразованием.*

Пример. Результатом последовательного выполнения линейных преобразований

$$x_1=3y_1-y_2, \qquad y_1=z_1+z_2,$$
$$x_2=y_1+5y_2, \qquad y_2=4z_1+2z_2$$

будет линейное преобразование

$$x_1=3(z_1+z_2)-(4z_1+2z_2)=-z_1+z_2,$$
$$x_2=(z_1+z_2)+5(4z_1+2z_2)=21z_1+11z_2.$$

Обозначим через C матрицу линейного преобразования, являющегося результатом последовательного выполнения преобразований (1) и (2), и найдем закон, по которому ее элементы c_{ik}, $i, k=1, 2, \dots, n$,

выражаются через элементы матриц A и B. Коротко записывая преобразования (1) и (2) в виде

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i=1, 2, \ldots, n; \quad y_j=\sum_{k=1}^{n} b_{jk} z_k, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

мы получим

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} z_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) z_k, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, коэффициент при z_k в выражении для x_i, т. е. элемент c_{ik} матрицы C, имеет вид

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}=a_{i1} b_{1k}+a_{i2} b_{2k}+\ldots+a_{in} b_{nk}; \tag{3}$$

элемент матрицы C, стоящий в i-й строке и k-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B.

Формула (3), дающая выражение элементов матрицы C через элементы матриц A и B, позволяет при заданных матрицах A и B сразу написать матрицу C, минуя рассмотрение линейных преобразований, соответствующих матрицам A и B. Этим путем всякой паре квадратных матриц n-го порядка ставится в соответствие однозначно определенная третья матрица. Можно сказать, что мы определили в множестве всех квадратных матриц n-го порядка алгебраическую операцию; она называется *умножением матриц*, а матрица C — *произведением* матрицы A на матрицу B:

$$C=AB.$$

Еще раз сформулируем связь между линейными преобразованиями и умножением матриц:

Линейное преобразование неизвестных, полученное в результате последовательного выполнения двух линейных преобразований с матрицами A и B, имеет своей матрицей коэффициентов матрицу AB.

Примеры.

1) $$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1+9\cdot(-2) & 4\cdot(-3)+9\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1+3\cdot(-2) & (-1)\cdot(-3)+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

3) $$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 16 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Найти результат последовательного выполнения линейных преобразований

$$\begin{aligned} x_1 &= 5y_1 - y_2 + 3y_3, \\ x_2 &= y_1 - 2y_2, \\ x_3 &= \phantom{5y_1 -{}} 7y_2 - y_3 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y_1 &= 2z_1 \phantom{{}-5z_2} + z_3, \\ y_2 &= \phantom{2z_1 -{}} z_2 - 5z_3, \\ y_3 &= \phantom{2z_1 -{}} 2z_2. \end{aligned}$$

Перемножая матрицы, получим:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & -35 \end{pmatrix},$$

поэтому искомое линейное преобразование имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10z_1 + 5z_2 + 10z_3, \\ x_2 &= 2z_1 - 2z_2 + 11z_3, \\ x_3 &= \phantom{10z_1 +{}} 5z_2 - 35z_3. \end{aligned}$$

Возьмем один из рассмотренных сейчас примеров умножения матриц, например 2), и найдем произведение тех же матриц, но взятых в обратном порядке:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что произведение матриц зависит от порядка множителей, т. е. *умножение матриц некоммутативно*. Этого, впрочем, следовало ожидать, уже хотя бы потому, что в определение матрицы C, данное выше при помощи формулы (3), матрицы A и B входят неравноправным образом: в A берутся строки, в B — столбцы.

Примеры неперестановочных матриц n-го порядка, т. е. матриц, произведение которых меняется при перестановке сомножителей, можно указать для всех n, начиная с $n=2$ (матрицы второго порядка в примере 1) неперестановочны). С другой стороны, две данные матрицы случайно могут оказаться перестановочными, как показывает следующий пример:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц ассоциативно; можно говорить, следовательно, об однозначно определенном произведении любого конечного числа матриц n-го порядка, взятых (ввиду некоммутативности умножения) в определенном порядке.

Доказательство. Пусть даны три произвольные матрицы n-го порядка A, B и C. Запишем их следующим сокращенным способом, указывающим общий вид их элементов: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. Введем, далее, следующие обозначения:

$$AB=U=(u_{ij}), \qquad BC=V=(v_{ij}),$$
$$(AB)\,C=S=(s_{ij}), \qquad A\,(BC)=T=(t_{ij}).$$

Нам нужно доказать справедливость равенства $(AB)\,C=A\,(BC)$, т. е. $S=T$. Однако

$$u_{il}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}, \quad v_{kj}=\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj},$$

и поэтому, ввиду равенств $S=UC$, $T=AV$,

$$s_{ij}=\sum_{l=1}^{n} u_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$
$$t_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

т. е. $s_{ij}=t_{ij}$ при $i, j=1, 2, \ldots, n$.

Дальнейшее изучение свойств умножения матриц требует привлечения их определителей, причем мы условимся для краткости обозначать определитель матрицы A через $|A|$. Если читатель в каждом из рассмотренных выше примеров подсчитает определители перемножаемых матриц и сравнит произведение этих определителей с определителем произведения заданных матриц, то обнаружит весьма любопытную закономерность, выражаемую следующей очень важной теоремой об умножении определителей:

Определитель произведения нескольких матриц n-го порядка равен произведению определителей этих матриц.

Достаточно доказать эту теорему для случая двух матриц. Пусть даны матрицы n-го порядка $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ и пусть $AB=C=(c_{ij})$. Построим следующий вспомогательный определитель Δ порядка $2n$: в его левом верхнем углу поставим матрицу A, в правом нижнем — матрицу B, весь правый верхний угол займем нулями и, наконец, по главной диагонали левого нижнего угла поставим число -1, заняв все остальные места также нулями. Определитель Δ имеет, следовательно, такой вид:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Применение к определителю Δ теоремы Лапласа — разложение по первым n срокам — приводит к следующему равенству:

$$\Delta = |A| \cdot |B|. \tag{4}$$

Попытаемся, с другой стороны, так преобразовать определитель Δ, не меняя его значения, чтобы все элементы b_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, оказались замененными нулями. Для этой цели к $(n+1)$-му столбцу определителя Δ прибавим его первый столбец, умноженный на b_{11}, второй, умноженный на b_{21}, и т. д., наконец n-й столбец, умноженный на b_{n1}. Затем к $(n+2)$-му столбцу определителя Δ прибавим первый столбец, умноженный на b_{12}, второй, умноженный на b_{22}, и т. д. Вообще, к $(n+j)$-му столбцу определителя Δ, где $j = 1, 2, \ldots, n$, мы прибавим сумму первых n столбцов, взятых, соответственно, с коэффициентами $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$.

Легко видеть, что эти преобразования, не меняющие определителя, на самом деле приводят к замене всех элементов b_{ij} нулями. Одновременно вместо нулей, стоявших в правом верхнем углу определителя, появятся следующие числа: на пересечении i-й строки и $(n+j)$-го столбца определителя, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, будет стоять теперь число $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, равное, ввиду (3), элементу c_{ij} матрицы $C = AB$. Правый верхний угол определителя занимает теперь, следовательно, матрица C:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Применим еще раз теорему Лапласа, разлагая определитель по последним n столбцам. Дополнительный минор для минора $|C|$ равен $(-1)^n$, а так как минор $|C|$ расположен в строках с номерами $1, 2, \ldots, n$ и в столбцах с номерами $n+1, n+2, \ldots, 2n$, причем

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) + (n+2) + \ldots + 2n = 2n^2 + n,$$

то

$$\Delta = (-1)^{2n^2+n}(-1)^n |C| = (-1)^{2(n^2+n)} |C|$$

или, ввиду четности числа $2(n^2+n)$,

$$\Delta = |C|. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает, наконец, доказываемое равенство

$$|C| = |A| \cdot |B|.$$

Теорема об умножении определителей могла бы быть доказана и без использования теоремы Лапласа. Одно из таких доказательств читатель найдет в конце § 16.

§ 14. Обратная матрица

Квадратная матрица называется *вырожденной* (или *особенной*), если ее определитель равен нулю, и *невырожденной* (или *неособенной*) — в противоположном случае. Соответственно линейное преобразование неизвестных называется *вырожденным* или *невырожденным* в зависимости от того, будет ли равен нулю или отличен от нуля определитель из коэффициентов этого преобразования. Из теоремы, доказанной в конце предшествующего параграфа, вытекают следующие утверждения:

Произведение матриц, хотя бы одна из которых вырожденная, будет вырожденной матрицей.

Произведение любых невырожденных матриц само будет невырожденной матрицей.

Отсюда следует, ввиду связи, существующей между умножением матриц и последовательным выполнением линейных преобразований, такое утверждение: *результат последовательного выполнения нескольких линейных преобразований тогда и только тогда будет невырожденным преобразованием, если все заданные преобразования невырожденные.*

Роль единицы в умножении матриц играет единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

причем она перестановочна с любой матрицей A данного порядка,

$$AE = EA = A. \tag{1}$$

Доказываются эти равенства или непосредственным применением правила умножения матриц, или же на основании замечания, что единичная матрица соответствует *тождественному* линейному преобразованию неизвестных

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \quad y_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= \qquad y_n, \end{aligned}$$