Из (4) и (5) вытекает, наконец, доказываемое равенство

$$|C| = |A| \cdot |B|.$$

Теорема об умножении определителей могла бы быть доказана и без использования теоремы Лапласа. Одно из таких доказательств читатель найдет в конце § 16.

## § 14. Обратная матрица

Квадратная матрица называется *вырожденной* (или *особенной*), если ее определитель равен нулю, и *невырожденной* (или *неособенной*) — в противоположном случае. Соответственно линейное преобразование неизвестных называется *вырожденным* или *невырожденным* в зависимости от того, будет ли равен нулю или отличен от нуля определитель из коэффициентов этого преобразования. Из теоремы, доказанной в конце предшествующего параграфа, вытекают следующие утверждения:

*Произведение матриц, хотя бы одна из которых вырожденная, будет вырожденной матрицей.*

*Произведение любых невырожденных матриц само будет невырожденной матрицей.*

Отсюда следует, ввиду связи, существующей между умножением матриц и последовательным выполнением линейных преобразований, такое утверждение: *результат последовательного выполнения нескольких линейных преобразований тогда и только тогда будет невырожденным преобразованием, если все заданные преобразования невырожденные.*

*Роль единицы в умножении матриц играет единичная матрица*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

причем она перестановочна с любой матрицей $A$ данного порядка,

$$AE = EA = A. \tag{1}$$

Доказываются эти равенства или непосредственным применением правила умножения матриц, или же на основании замечания, что единичная матрица соответствует *тождественному* линейному преобразованию неизвестных

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \quad y_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= \qquad y_n, \end{aligned}$$

выполнение которого до или после любого другого линейного преобразования, очевидно, не меняет этого последнего.

Заметим, что *матрица $E$ является единственной матрицей, удовлетворяющей условию* (1) *при любой матрице $A$*. Действительно, если бы существовала еще матрица $E'$ с этим же свойством, то мы имели бы

$$E'E=E', \quad E'E=E,$$

откуда $E'=E$.

Вопрос о существовании для данной матрицы $A$ *обратной матрицы* оказывается более сложным. Ввиду некоммутативности умножения матриц мы будем говорить сейчас о *правой* обратной матрице, т. е. о такой матрице $A^{-1}$, что произведение матрицы $A$ справа на эту матрицу дает единичную матрицу,

$$AA^{-1}=E. \tag{2}$$

Если матрица $A$ вырожденная, то, если бы матрица $A^{-1}$ существовала, произведение, стоящее в левой части равенства (2), было бы, как мы знаем, вырожденной матрицей, в то время как на самом деле матрица $E$, стоящая в правой части этого равенства, является невырожденной, так как ее определитель равен единице. Таким образом, вырожденная матрица не может иметь правой обратной матрицы. Такие же соображения показывают, что она не имеет и левой обратной и поэтому *для вырожденной матрицы обратная матрица вообще не существует*.

Переходя к случаю невырожденной матрицы, введем сначала следующее вспомогательное понятие. Пусть дана матрица $n$-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы $A$, причем алгебраическое дополнение к элементу $a_{ij}$ стоит на пересечении $j$-й строки и $i$-го столбца, называется *присоединенной* (или *взаимной*) матрицей к матрице $A$.

Найдем произведения $AA^*$ и $A^*A$. Используя известную из § 6 формулу разложения определителя по строке или столбцу, а также теорему из § 7 о сумме произведений элементов любой строки

(столбца) определителя на алгебраические дополнения к соответственным элементам другой строки (столбца), и обозначая через $d$ определитель матрицы $A$,

$$d = |A|,$$

мы получим следующие равенства:

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Отсюда вытекает, что *если матрица $A$ невырожденная, то ее присоединенная матрица $A^*$ также будет невырожденной, причем определитель $d^*$ матрицы $A^*$ равен $(n-1)$-й степени определителя $d$ матрицы $A$.*

В самом деле, переходя от равенств (3) к равенству между определителями, мы получим

$$dd^* = d^n,$$

откуда ввиду $d \neq 0$

$$d^* = d^{n-1}\text{[1]}.$$

Теперь легко доказать существование обратной матрицы для всякой невырожденной матрицы $A$ и найти ее вид. Заметим сначала, что если мы рассмотрим произведение двух матриц $AB$ и все элементы одного из множителей, например $B$, разделим на одно и то же число $d$, то все элементы произведения $AB$ также разделятся на это же число: для доказательства нужно лишь вспомнить определение умножения матриц. Таким образом, если

$$d = |A| \neq 0,$$

то из равенств (3) вытекает, что *обратной матрицей для $A$ будет служить матрица, получающаяся из присоединенной матрицы $A^*$ делением всех ее элементов на число $d$:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Можно было бы доказать, что если матрица $A$ вырожденная, то и ее присоединенная матрица $A^*$ также вырожденная, причем имеет ранг, не превосходящий числа 1.

Действительно, из (3) вытекают равенства

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \tag{4}$$

Еще раз подчеркнем, что в $i$-й строке матрицы $A^{-1}$ стоят алгебраические дополнения к элементам $i$-го столбца определителя $|A|$, деленные на $d=|A|$.

Легко доказать, что *матрица $A^{-1}$ является единственной матрицей, удовлетворяющей условию* (4) *для данной невырожденной матрицы $A$*. Действительно, если матрица $C$ такова, что

$$AC=CA=E,$$

то

$$CAA^{-1}=C(AA^{-1})=CE=C,$$
$$CAA^{-1}=(CA)A^{-1}=EA^{-1}=A^{-1},$$

откуда $C=A^{-1}$.

Из (4) и теоремы об умножении определителей вытекает, что *определитель матрицы $A^{-1}$ равен $\frac{1}{|A|}$, так что эта матрица также будет невырожденной; обратной для нее служит матрица $A$.*

Если теперь даны квадратные матрицы $n$-го порядка $A$ и $B$, из которых $A$ — невырожденная, а $B$ — произвольная, то мы можем выполнить *правое и левое деления $B$ на $A$*, т. е. решить матричные уравнения

$$AX=B, \quad YA=B. \tag{5}$$

Для этого, ввиду ассоциативности умножения матриц, достаточно положить

$$X=A^{-1}B, \quad Y=BA^{-1},$$

причем эти решения уравнений (5) будут, ввиду некоммутативности умножения матриц, в общем случае различными.

Примеры. 1) Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель $|A|=5$, поэтому обратная матрица $A^{-1}$ существует, причем

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2) Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Матрица $A$ невырожденная, причем

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix},$$

поэтому решениями уравнений $AX=B$, $YA=B$ будут служить матрицы

$$X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 11\\ 13 & -13\end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-31 & 23\\ -11 & 9\end{pmatrix}.$$

**Умножение прямоугольных матриц.** Хотя умножение матриц определено в предшествующем параграфе лишь для квадратных матриц одинакового порядка, но его можно распространить и на случай прямоугольных матриц $A$ и $B$, если только можно применить формулу (3) предшествующего параграфа, т. е. если всякая строка матрицы $A$ содержит столько же элементов, сколько их во всяком столбце матрицы $B$. Иными словами, *можно говорить о произведении прямоугольных матриц $A$ и $B$ в том случае, если число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$, причем число строк матрицы $AB$ равно числу строк матрицы $A$, число же столбцов матрицы $AB$ равно числу столбцов матрицы $B$.*

Примеры.

1) $$\begin{pmatrix}5 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 15 & -5\\ 11 & 10 & 10\end{pmatrix}.$$

2) $$\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 14\\ -16\end{pmatrix}.$$

3) $$(5\ \ 1\ \ 0\ \ -3)\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=(11\ \ -1).$$

Умножение прямоугольных матриц можно связать с последовательным выполнением линейных преобразований неизвестных, если только в определении последних отказаться от предположения, что число неизвестных сохраняется при линейном преобразовании.

Легко проверить также, дословно повторяя доказательство, данное выше для случая квадратных матриц, что *закон ассоциа-*

*тивности остается справедливым и для умножения прямоугольных матриц.*

Мы воспользуемся сейчас умножением прямоугольных матриц и свойствами обратной матрицы для нового вывода правила Крамера, не требующего тех громоздких вычислений, какие проводились в § 7. Пусть дана система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{array}\right\} \tag{6}$$

причем определитель этой системы отличен от нуля. Обозначим через $A$ матрицу из коэффициентов системы (6); эта матрица невырожденная, так как, по предположению, $d=|A|\neq 0$. Обозначим далее через $X$ столбец из неизвестных, через $B$ — столбец из свободных членов системы (6), т. е.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Произведение $AX$ имеет смысл, так как число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матриц $X$, причем это произведение будет столбцом, составленным из левых частей уравнений системы (6). Таким образом, систему (6) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$AX=B. \tag{7}$$

Умножая обе части уравнения (7) слева на матрицу $A^{-1}$, существование которой вытекает из невырожденности квадратной матрицы $A$, мы получим:

$$X=A^{-1}B. \tag{8}$$

Произведение, стоящее справа, будет матрицей из одного столбца; ее $j$-й элемент равен сумме произведений элементов $j$-й строки матрицы $A^{-1}$ на соответственные элементы матрицы $B$, т. е. равен числу

$$\frac{A_{1j}}{d}b_1+\frac{A_{2j}}{d}b_2+\ldots+\frac{A_{nj}}{d}b_n=\frac{1}{d}(A_{1j}b_1+A_{2j}b_2+\ldots+A_{nj}b_n).$$

Скобка, стоящая справа, является, однако, разложением по $j$-му столбцу определителя $d_j$, получающегося заменой $j$-го столбца определителя $d$ столбцом $B$. Таким образом, формулы (8) равносильны

формулам (3) из § 7, выражающим решение системы (6), получающееся по правилу Крамера.

Остается показать, что полученные значения неизвестных действительно составляют решение системы (6). Для этого достаточно выражение (8) подставить в матричное уравнение (7), что, очевидно, приводит к тождеству $B=B$.

**Ранг произведения матриц.** Теорема об умножении определителей не приводит в случае вырожденных матриц ни к какому высказыванию сверх того, что их произведение также будет вырожденным, хотя вырожденные квадратные матрицы можно еще различать по их рангам. Заметим, что не существует вполне определенной зависимости между рангами сомножителей и рангом произведения, как показывают следующие примеры:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

в обоих случаях перемножаются матрицы ранга 1, однако в одном случае произведение имеет ранг 1, в другом — ранг 0. Справедлива, притом не только для квадратных, но и для прямоугольных матриц, лишь следующая теорема.

*Ранг произведения матриц не выше ранга каждого из сомножителей.*

Достаточно доказать эту теорему для случая двух множителей. Пусть даны матрицы $A$ и $B$, для которых произведение $AB$ имеет смысл; обозначим $AB=C$. Рассмотрим формулу (3) § 13, дающую выражение элементов матрицы $C$. Беря эту формулу для данного $k$ и всех возможных $i$ ($i=1, 2, \ldots$), мы получаем, что $k$-й столбец матрицы $C$ является суммой всех столбцов матрицы $A$, взятых с некоторыми коэффициентами (а именно с коэффициентами $b_{1k}, b_{2k}, \ldots$). Этим доказано, что система столбцов матрицы $C$ линейно выражается через систему столбцов матрицы $A$, а поэтому, как показано в § 9, ранг первой системы меньше или равен рангу второй системы; иными словами, ранг матрицы $C$ не больше ранга матрицы $A$. Так как, с другой стороны, из той же формулы (3) § 13 при данном $i$ и всех $k$ вытекает, что всякая $i$-я строка матрицы $C$ является линейной комбинацией строк матрицы $B$, то аналогичными рассуждениями мы получим, что ранг $C$ не выше ранга $B$.

Более точный результат имеет место для случая, когда один из множителей является невырожденной квадратной матрицей:

*Ранг произведения произвольной матрицы $A$ справа или слева на невырожденную квадратную матрицу $Q$ равен рангу матрицы $A$.*

Пусть, например,

$$AQ=C. \tag{9}$$

Из предшествующей теоремы следует, что ранг матрицы $C$ не выше ранга матрицы $A$. Умножая, однако, равенство (9) справа на $Q^{-1}$, мы придем к равенству

$$A = CQ^{-1},$$

а поэтому, снова на основании предшествующей теоремы, ранг $A$ не выше ранга $C$. Сопоставление этих двух результатов доказывает совпадение рангов матриц $A$ и $C$.

## § 15. Сложение матриц и умножение матрицы на число

Для квадратных матриц порядка $n$ следующим образом определяется сложение:

*Суммой $A+B$ двух квадратных матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ порядка $n$* называется матрица $C=(c_{ij})$, всякий элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц $A$ и $B$;

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ ^{1)}.$$

Определенное нами сложение матриц будет, очевидно, коммутативным и ассоциативным. Для него существует обратная операция — вычитание, причем разностью матриц $A$ и $B$ служит матрица, составленная из разностей соответственных элементов заданных матриц. Роль нуля играет при этом *нулевая матрица*, составленная сплошь из нулей; в дальнейшем эта матрица обозначается символом 0: нет серьезной опасности смешать нулевую матрицу с числом нуль.

*Сложение квадратных матриц и их умножение, определенное в § 13, связаны законами дистрибутивности.*

В самом деле, пусть даны три матрицы порядка $n$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. Тогда для любых $i$ и $j$ имеет место очевидное равенство

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{is}+b_{is})\, c_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj} + \sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}.$$

Однако левая часть этого равенства есть элемент, стоящий в $i$-й строке и $j$-м столбце матрицы $(A+B)C$, правая часть — элемент, стоящий на этом же месте в матрице $AC+BC$. Этим доказано равенство

$$(A+B)C = AC+BC.$$

Равенство $C(A+B)=CA+CB$ доказывается таким же путем — некоммутативность умножения матриц требует, понятно, доказательства этих обоих законов дистрибутивности.

---

[1]) Можно было бы, конечно, и произведение матриц определить столь же естественным способом, перемножая соответственные элементы. Такое умножение, однако, в отличие от того, которое определено в § 13, не нашло бы никаких серьезных применений.