Из предшествующей теоремы следует, что ранг матрицы C не выше ранга матрицы A. Умножая, однако, равенство (9) справа на Q^{-1}, мы придем к равенству

$$A = CQ^{-1},$$

а поэтому, снова на основании предшествующей теоремы, ранг A не выше ранга C. Сопоставление этих двух результатов доказывает совпадение рангов матриц A и C.

§ 15. Сложение матриц и умножение матрицы на число

Для квадратных матриц порядка n следующим образом определяется сложение:

Суммой $A+B$ двух квадратных матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ порядка n называется матрица $C=(c_{ij})$, всякий элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц A и B;

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ ^{1)}.$$

Определенное нами сложение матриц будет, очевидно, коммутативным и ассоциативным. Для него существует обратная операция — вычитание, причем разностью матриц A и B служит матрица, составленная из разностей соответственных элементов заданных матриц. Роль нуля играет при этом *нулевая матрица*, составленная сплошь из нулей; в дальнейшем эта матрица обозначается символом 0: нет серьезной опасности смешать нулевую матрицу с числом нуль.

Сложение квадратных матриц и их умножение, определенное в § 13, связаны законами дистрибутивности.

В самом деле, пусть даны три матрицы порядка n, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. Тогда для любых i и j имеет место очевидное равенство

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{is}+b_{is})\, c_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}c_{sj} + \sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sj}.$$

Однако левая часть этого равенства есть элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы $(A+B)C$, правая часть — элемент, стоящий на этом же месте в матрице $AC+BC$. Этим доказано равенство

$$(A+B)C = AC+BC.$$

Равенство $C(A+B)=CA+CB$ доказывается таким же путем — некоммутативность умножения матриц требует, понятно, доказательства этих обоих законов дистрибутивности.

---

[1]) Можно было бы, конечно, и произведение матриц определить столь же естественным способом, перемножая соответственные элементы. Такое умножение, однако, в отличие от того, которое определено в § 13, не нашло бы никаких серьезных применений.

Введем следующее определение умножения матриц на число.

Произведением kA квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ на число k называется матрица $A'=(a'_{ij})$, получающаяся умножением на k всех элементов матрицы A:

$$a'_{ij}=ka_{ij}.$$

С одним примером такого умножения матрицы на число мы уже встречались в предшествующем параграфе: если матрица A невырожденная, причем $|A|=d$, то ее обратная матрица A^{-1} и присоединенная матрица A^* связаны равенством

$$A^{-1}=d^{-1}A^*.$$

Как мы знаем, всякую квадратную матрицу порядка n можно рассматривать как n^2-мерный вектор, причем это соответствие между матрицами и векторами взаимно однозначное. Определенные сейчас сложение матриц и умножение матрицы на число превращаются при этом в сложение векторов и умножение вектора на число. Таким образом, *совокупность квадратных матриц порядка n можно рассматривать как n^2-мерное векторное пространство.*

Отсюда вытекает справедливость следующих равенств (здесь A, B — матрицы порядка n; k, l — числа, 1 — число единица):

$$k(A+B)=kA+kB, \tag{1}$$

$$(k+l)A=kA+lA, \tag{2}$$

$$k(lA)=(kl)A, \tag{3}$$

$$1\cdot A=A. \tag{4}$$

Свойства (1) и (2) связывают умножение матрицы на число со сложением матриц. Существует, вместе с тем, очень важная связь между умножением матрицы на число и перемножением самих матриц, а именно:

$$(kA)B=A(kB)=k(AB), \tag{5}$$

т. е. *если в произведении матриц один из множителей умножается на число k, то и все произведение будет умножаться на k.*

В самом деле, пусть даны матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ и число k. Тогда для любых i и j будет:

$$\sum_{s=1}^{n}(ka_{is})b_{sj}=k\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}.$$

Левая часть этого равенства есть, однако, элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы $(kA)B$, правая часть — элемент,

стоящий на этом же месте в матрице $k(AB)$. Этим доказано равенство

$$(kA)B = k(AB).$$

Равенство $A(kB) = k(AB)$ доказывается таким же путем.

Операция умножения матрицы на число позволяет ввести новый способ записи матриц. Обозначим через E_{ij} матрицу, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Полагая $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, мы получим n^2 таких матриц E_{ij}, которые связаны, как легко проверить, следующей таблицей умножения:

$$E_{is}E_{sj} = E_{ij}, \quad E_{is}E_{tj} = 0 \quad \text{при } s \neq t.$$

Матрица kE_{ij} отличается от матрицы E_{ij} лишь тем, что в ней на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число k. Учитывая это и используя определение сложения матриц, мы получаем следующую запись для произвольной квадратной матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}, \tag{6}$$

причем матрица A обладает, очевидно, лишь единственной записью вида (6).

Матрица kE, где E — единичная матрица, имеет, по определению умножения матрицы на число, следующий вид:

$$kE = \begin{pmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{pmatrix},$$

т. е. на главной диагонали стоит одно и то же число k, а все элементы вне этой диагонали равны нулю. Такие матрицы называются *скалярными*.

Определение сложения матриц приводит к равенству

$$kE + lE = (k + l)E. \tag{7}$$

С другой стороны, используя определение умножения матриц или же опираясь на равенство (5), получаем:

$$kE \cdot lE = (kl)E. \tag{8}$$

Умножение матрицы A на число k можно истолковать как умножение A на скалярную матрицу kE в смысле перемножения матриц. Действительно, по (5),

$$(kE)A = A(kE) = kA.$$

Отсюда вытекает также, что *всякая скалярная матрица перестановочна с любой матрицей* A. Очень важно, что скалярные матрицы являются единственными, обладающими этим свойством:

Если некоторая матрица $C=(c_{ij})$ *n-го порядка перестановочна с любой матрицей этого же порядка, то матрица C скалярна.*

В самом деле, положим $i \neq j$ и рассмотрим равные между собой, по условию, произведения CE_{ij} и $E_{ij}C$ (см. выше определение матрицы E_{ij}). Легко видеть, что все столбцы матрицы CE_{ij}, кроме j-го, состоят из нулей, а j-й столбец совпадает с i-м столбцом матрицы C; в частности, на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы CE_{ij} стоит элемент c_{ii}. Аналогично все строки матрицы $E_{ij}C$, кроме i-й, состоят из нулей, а i-я строка совпадает с j-й строкой матрицы C; на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $E_{ij}C$ расположен элемент c_{jj}. Используя равенство $CE_{ij}=E_{ij}C$, мы получаем, что $c_{ii}=c_{jj}$ (как элементы, стоящие в равных между собой матрицах на одинаковых местах), т. е. все элементы главной диагонали матрицы C равны между собой. С другой стороны, на пересечении j-й строки и j-го столбца матрица CE_{ij} стоит элемент c_{ji}; но в матрице $E_{ij}C$ на этом же месте стоит нуль (ввиду $i \neq j$), и поэтому $c_{ji}=0$, т. е. всякий элемент матрицы C, расположенный вне главной диагонали, равен нулю. Теорема доказана.

§ 16*. Аксиоматическое построение теории определителей

Определитель n-го порядка является числом, однозначно определяемым данной квадратной матрицей n-го порядка. Определение этого понятия, приведенное в § 4, указывает правило, по которому определитель выражается через элементы заданной матрицы. Это конструктивное определение можно, однако, заменить аксиоматическим; можно, иными словами, среди свойств определителя, установленных в §§ 4 и 6, указать такие, что единственной функцией матрицы с действительными значениями, обладающей этими свойствами, будет ее определитель.

Простейшее определение такого рода состоит в использовании разложений определителя по строке. Рассматриваем квадратные матрицы любых порядков и предполагаем, что всякой такой матрице M поставлено в соответствие число d_M, причем выполняются следующие условия:

1) Если матрица M первого порядка, т. е. состоит из одного элемента a, то $d_M=a$.

2) Если первую строку матрицы n-го порядка M составляют элементы $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ и если через, M_i $i=1, 2, \ldots, n$, обозначена матрица $(n-1)$-го порядка, остающаяся после вычеркивания из M первой строки и i-го столбца, то

$$d_M=a_{11}d_{M_1}-a_{12}d_{M_2}+a_{13}d_{M_3}-\ldots+(-1)^{n-1}a_{1n}d_{M_n}.$$