

Отсюда вытекает также, что *всякая скалярная матрица перестановочна с любой матрицей A*. Очень важно, что скалярные матрицы являются единственными, обладающими этим свойством:

*Если некоторая матрица C = (c<sub>ij</sub>) n-го порядка перестановочна с любой матрицей этого же порядка, то матрица C скалярна.*

В самом деле, положим  $i \neq j$  и рассмотрим равные между собой, по условию, произведения  $CE_{ij}$  и  $E_{ij}C$  (см. выше определение матрицы  $E_{ij}$ ). Легко видеть, что все столбцы матрицы  $CE_{ij}$ , кроме  $j$ -го, состоят из нулей, а  $j$ -й столбец совпадает с  $i$ -м столбцом матрицы  $C$ ; в частности, на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $CE_{ij}$  стоит элемент  $c_{ii}$ . Аналогично все строки матрицы  $E_{ij}C$ , кроме  $i$ -й, состоят из нулей, а  $i$ -я строка совпадает с  $j$ -й строкой матрицы  $C$ ; на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $E_{ij}C$  расположен элемент  $c_{jj}$ . Используя равенство  $CE_{ij} = E_{ij}C$ , мы получаем, что  $c_{ii} = c_{jj}$  (как элементы, стоящие в равных между собой матрицах на одинаковых местах), т. е. все элементы главной диагонали матрицы  $C$  равны между собой. С другой стороны, на пересечении  $j$ -й строки и  $j$ -го столбца матрица  $CE_{ij}$  стоит элемент  $c_{ji}$ ; но в матрице  $E_{ij}C$  на этом же месте стоит нуль (ввиду  $i \neq j$ ), и поэтому  $c_{ji} = 0$ , т. е. всякий элемент матрицы  $C$ , расположенный вне главной диагонали, равен нулю. Теорема доказана.

### § 16\*. Аксиоматическое построение теории определителей

Определитель  $n$ -го порядка является числом, однозначно определяемым данной квадратной матрицей  $n$ -го порядка. Определение этого понятия, приведенное в § 4, указывает правило, по которому определитель выражается через элементы заданной матрицы. Это конструктивное определение можно, однако, заменить аксиоматическим; можно, иными словами, среди свойств определителя, установленных в §§ 4 и 6, указать такие, что единственной функцией матрицы с действительными значениями, обладающей этими свойствами, будет ее определитель.

Простейшее определение такого рода состоит в использовании разложений определителя по строке. Рассматриваем квадратные матрицы любых порядков и предполагаем, что всякой такой матрице  $M$  поставлено в соответствие число  $d_M$ , причем выполняются следующие условия:

- 1) Если матрица  $M$  первого порядка, т. е. состоит из одного элемента  $a$ , то  $d_M = a$ .
- 2) Если первую строку матрицы  $n$ -го порядка  $M$  составляют элементы  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  и если через,  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , обозначена матрица  $(n-1)$ -го порядка, остающаяся после вычеркивания из  $M$  первой строки и  $i$ -го столбца, то

$$d_M = a_{11}d_{M_1} - a_{12}d_{M_2} + a_{13}d_{M_3} - \dots + (-1)^{n-1}a_{1n}d_{M_n}.$$

Тогда для всякой матрицы  $M$  число  $d_M$  равно определителю этой матрицы. Мы предоставляем читателю доказательство этого утверждения, проводящееся индукцией по  $n$  и использующее результаты § 6.

Много более интересны другие формы аксиоматического определения определителя, относящиеся к случаю лишь одного данного порядка  $n$  и имеющие в своей основе некоторые из установленных в § 4 простейших свойств определителя. Мы приступим сейчас к рассмотрению одного из таких определений.

Пусть всякой квадратной матрице  $M$   $n$ -го порядка поставлено в соответствие число  $d_M$ , причем выполняются следующие условия:

I. Если одна из строк матрицы  $M$  умножается на число  $k$ , то число  $d_M$  также умножается на  $k$ .

II. Число  $d_M$  не меняется, если к одной из строк матрицы  $M$  прибавляется другая строка этой матрицы.

III. Если  $E$ —единичная матрица, то  $d_E=1$ .

Докажем, что для любой матрицы  $M$  число  $d_M$  равно определителю этой матрицы.

Выведем сначала из условий I—III некоторые свойства числа  $d_M$ , аналогичные соответствующим свойствам определителя.

(1) Если одна из строк матрицы  $M$  состоит из нулей, то  $d_M=0$ .

В самом деле, умножая строку, состоящую из нулей, на число 0, мы не меняем матрицу, но, ввиду условия I, число  $d_M$  приобретает множитель 0. Поэтому

$$d_M = 0 \cdot d_M = 0.$$

(2) Число  $d_M$  не меняется, если к  $i$ -й строке матрицы  $M$  прибавляется ее  $j$ -я строка,  $j \neq i$ , умноженная на число  $k$ .

Если  $k=0$ , то все доказано. Если же  $k \neq 0$ , то умножаем  $j$ -ю строку на  $k$  и получаем матрицу  $M'$ , для которой, ввиду условия I,  $d_{M'} = kd_M$ . Затем к  $i$ -й строке матрицы  $M'$  прибавляем ее  $j$ -ю строку и получаем матрицу  $M''$ , причем, ввиду условия II,  $d_{M''} = d_{M'}$ . Наконец, умножаем  $j$ -ю строку матрицы  $M''$  на число  $k^{-1}$ . Мы приходим к матрице  $M'''$ , которая в действительности получена из  $M$  преобразованием, указанным в формулировке доказываемого свойства, причем

$$d_{M'''} = k^{-1}d_{M''} = k^{-1}d_{M'} = k^{-1} \cdot kd_M = d_M.$$

(3) Если строки матрицы  $M$  линейно зависимы, то  $d_M=0$ .

Действительно, если одна из строк, например  $i$ -я, будет линейной комбинацией других строк, то, применяя несколько раз преобразование (2), можно  $i$ -ю строку заменить строкой из нулей. Преобразование (2) не меняет числа  $d_M$ , а поэтому ввиду свойства (1)  $d_M=0$ .

(4) Если  $i$ -я строка матрицы  $M$  является суммой двух векторов  $\beta$  и  $\gamma$  и если матрицы  $M'$  и  $M''$  получены из матрицы  $M$  заменой ее  $i$ -й строки соответственно векторами  $\beta$  и  $\gamma$ , то

$$d_M = d_{M'} + d_{M''}.$$

В самом деле, пусть  $S$  будет система всех строк матрицы  $M$ , кроме  $i$ -й. Если в  $S$  существует линейная зависимость, то линейно зависимы строки каждой из матриц  $M$ ,  $M'$  и  $M''$ , а поэтому, по свойству (3),  $d_M^i = d_{M'}^i = d_{M''}^i = 0$ , откуда следует справедливость в этом случае доказываемого свойства. Если же система  $S$ , состоящая из  $n-1$  вектора, линейно независима, то, как показывают результаты § 9, ее можно дополнить некоторым вектором  $a$  до максимальной линейно независимой системы векторов  $n$ -мерного векторного пространства. Через эту систему можно линейно выразить векторы  $\beta$  и  $\gamma$ . Пусть вектор  $a$  входит в эти выражения с коэффициентами  $k$  и, соответственно,  $l$ ; в выражение для вектора  $\beta + \gamma$ , т. е. для  $i$ -й строки матрицы  $M$ , вектор  $a$  будет входить, следовательно, с коэффициентом  $k+l$ . Матрицы  $M$ ,  $M'$  и  $M''$  можно теперь преобразовать, вычитая из их  $i$ -х строк некоторые линейные комбинации других строк так, что их  $i$ -ми строками будут служить соответственно векторы  $(k+l)a$ ,  $ka$  и  $la$ . Поэтому, обозначая через  $M^0$  матрицу, получающуюся из матрицы  $M$  заменой ее  $i$ -й строки вектором  $a$ , и учитывая свойства (2) и I, мы приходим к равенствам:

$$d_M = (k+l)d_{M^0}, \quad d_{M'} = kd_{M^0}, \quad d_{M''} = ld_{M^0}.$$

Этим свойство (4) доказано.

(5) Если матрица  $\bar{M}$  получена из матрицы  $M$  транспозицией двух строк, то  $d_{\bar{M}} = -d_M$ .

Пусть, в самом деле, в матрице  $M$  нужно переставить строки с номерами  $i$  и  $j$ . Этого можно достичь цепочкой следующих преобразований: сначала к  $i$ -й строке матрицы  $M$  прибавляем ее  $j$ -ю строку и получаем матрицу  $M'$ , причем, по условию II,  $d_{M'} = d_M$ . Затем из  $j$ -й строки матрицы  $M'$  вычитаем ее  $i$ -ю строку и приходим к матрице  $M''$ , для которой, ввиду свойства (2), будет  $d_{M''} = d_M$ ;  $j$ -я строка матрицы  $M''$  будет отличаться знаком от  $i$ -й строки матрицы  $M$ . Прибавим теперь к  $i$ -й строке матрицы  $M''$  ее  $j$ -ю строку. Для матрицы  $M'''$ , которую мы получим этим преобразованием, будет, по условию II,  $d_{M'''} = d_M$ , причем  $i$ -я строка этой матрицы совпадет с  $j$ -й строкой матрицы  $M$ . Умножая, наконец,  $j$ -ю строку матрицы  $M'''$  на число  $-1$ , мы придем к искомой матрице  $\bar{M}$ . Поэтому, ввиду условия I,

$$d_{\bar{M}} = -d_{M'''} = -d_M.$$

(6) Если матрица  $M'$  получена из матрицы  $M$  перестановкой строк, причем  $i$ -й строкой матрицы  $M'$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , служит  $a_i$ -я строка матрицы  $M$ , то

$$d_{M'} = \pm d_M;$$

при этом знак плюс соответствует случаю, когда подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

четна, знак минус — случаю, когда она нечетна.

В самом деле, матрица  $M'$  может быть получена из матрицы  $M$  некоторым числом транспозиций двух строк, и поэтому можно воспользоваться свойством (5). Четность числа этих транспозиций определяет, как известно из § 3, четность указанной выше подстановки.

Рассмотрим теперь матрицы  $M = (a_{ij})$ ,  $N = (b_{ij})$  и их произведение  $Q = MN$  в смысле § 13. Найдем число  $d_Q$ . Мы знаем, что всякая  $i$ -я строка матрицы  $Q$  является суммой всех строк матрицы  $N$ , взятых соответственно с коэффициентами  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  (см., например, § 14). Заменим все строки матрицы  $Q$  их указанными линейными выражениями через строки матрицы  $N$  и воспользуемся несколько раз свойством (4). Мы получим, что число  $d_Q$  будет равно сумме чисел  $d_T$  для всевозможных матриц  $T$  следующего вида:  $i$ -я строка матрицы  $T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , равна  $a_i$ -й строке матрицы  $N$ , умноженной на число  $a_{ia_i}$ . При этом ввиду свойства (3) можно исключить из рассмотрения все матрицы  $T$ , для которых существуют такие индексы  $i$  и  $j$ ,  $i \neq j$ , что  $a_i = a_j$ ; остаются, иными словами, лишь такие матрицы  $T$ , для которых индексы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  составляют перестановку чисел  $1, 2, \dots, n$ . Ввиду свойств I и (6) число  $d_T$  для такой матрицы имеет вид

$$d_T = \pm a_{1a_1} a_{2a_2} \dots a_{na_n} d_N,$$

где знак определяется четностью подстановки из индексов. Отсюда мы приходим к выражению для числа  $d_Q$ : после вынесения за скобки из всех слагаемых вида  $d_T$  общего множителя  $d_N$  в скобках остается, очевидно, определитель  $|M|$  матрицы  $M$  в смысле конструктивного определения, данного в § 4, т. е.

$$d_Q = |M| \cdot d_N. \quad (*)$$

Если мы возьмем теперь в качестве матрицы  $N$  единичную матрицу  $E$ , то будет  $Q = M$  и, по свойству III,  $d_N = d_E = 1$ , т. е. для любой матрицы  $M$  имеет место равенство

$$d_M = |M|,$$

что и требовалось доказать. Одновременно еще раз, прим. без использования теоремы Лапласа, доказана

теорема об умножении определителей: для этого достаточно в равенстве (\*) заменить числа  $d_Q$  и  $d_N$  определителями соответствующих матриц.

Закончим эти аксиоматические рассмотрения доказательством независимости условий I—III, т. е. доказательством того, что ни одно из этих условий не является следствием двух других.

Для доказательства независимости условия III положим, что  $d_M = 0$  для всякой матрицы  $M$   $n$ -го порядка. Условия I и II будут, очевидно, выполняться, условие же III нарушается.

Для доказательства независимости условия II положим, что для всякой матрицы  $M$  число  $d_M$  равно произведению элементов, стоящих на главной диагонали этой матрицы. Условия I и III выполняются, а условие II уже не имеет места.

Наконец, для доказательства независимости условия I положим, что  $d_M = 1$  для всякой матрицы  $M$ . Условия II и III будут при этом выполняться, а условие I нарушается.

---