ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 17. Система комплексных чисел

На протяжении курса элементарной алгебры несколько раз происходит обогащение запаса чисел. Школьник, приступающий к изучению алгебры, приносит из арифметики знакомство с положительными целыми и дробными числами. Алгебра начинается по существу с введения отрицательных чисел, т. е. с оформления первой среди важнейших числовых систем — системы *целых чисел*, состоящей из всех положительных и всех отрицательных целых чисел и нуля, и более широкой системы *рациональных чисел*, состоящей из всех целых чисел и всех дробных чисел, как положительных, так и отрицательных.

Дальнейшее расширение запаса чисел происходит тогда, когда в рассмотрение вводятся иррациональные числа. Система, состоящая из всех рациональных и всех иррациональных чисел, называется системой *действительных* (или *вещественных*) *чисел*. Строгое построение системы действительных чисел содержится обычно в университетском курсе математического анализа; для нас, однако, было достаточно в предшествующих главах и будет достаточно в дальнейшем того знакомства с действительными числами, каким обладает читатель, приступающий к изучению высшей алгебры.

Наконец, в самом конце курса элементарной алгебры система действительных чисел расширяется до системы *комплексных чисел*. Эта система чисел остается для читателя менее привычной, конечно, чем система действительных чисел, хотя на самом деле она обладает многими очень хорошими свойствами. В настоящей главе будет еще раз с необходимой полнотой изложена теория комплексных чисел.

Комплексные числа вводятся в связи со следующей задачей. Известно, что действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Простейшее из квадратных уравнений, не имеющих корней среди действительных чисел, есть

$$x^2+1=0; \tag{1}$$

только это уравнение будет нас сейчас интересовать. Задача, стоящая перед нами, такова: *нужно расширить систему действительных чисел до такой системы чисел, в которой уравнение* (1) *уже обладало бы корнем.*

В качестве материала, из которого будет строиться эта новая система чисел, мы возьмем точки плоскости. Напомним, что изображение действительных чисел точками прямой линии (основанное на том, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел, если при заданном начале координат и единице масштаба всякой точке прямой поставим в соответствие ее абсциссу) систематически используется во всех отделах математики и является столь привычным, что обычно мы не делаем различия между действительным числом и точкой, его изображающей.

Таким образом, *мы хотим определить систему чисел, изображающихся всеми точками плоскости.* До сих пор нам не приходилось складывать или перемножать точки плоскости, поэтому определение операций над точками мы имеем право выбирать, заботясь лишь о том, чтобы новая система чисел обладала всеми теми свойствами, ради которых мы ее создаем. Эти определения, особенно для произведения, покажутся в первый момент весьма искусственными. В гл. 10 будет показано, однако, что никакие другие определения операций, на первый взгляд даже более естественные, не привели бы нас к цели, т. е. к построению расширения системы действительных чисел, содержащего корень уравнения (1). Там же будет показано, что замена точек плоскости в этом построении любым другим материалом не привела бы к системе чисел, по своим алгебраическим свойствам отличающейся от той системы комплексных чисел, которая строится ниже.

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат. Условимся обозначать точки плоскости буквами α, β, γ, ... и записывать точку α с абсциссой a и ординатой b через (a, b), т. е., несколько отступая от того, что принято в аналитической геометрии, писать $\alpha=(a, b)$. Если даны точки $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$, то *суммой* этих точек мы будем называть точку с абсциссой $a+c$ и ординатой $b+d$, т. е.

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d); \tag{2}$$

произведением точек $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$ мы будем называть точку с абсциссой $ac-bd$ и ординатой $ad+bc$, т. е.

$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc). \tag{3}$$

Этим путем мы определили в множестве всех точек плоскости две алгебраические операции. Покажем, что *эти операции обладают всеми основными свойствами, какими обладают операции*

в системе действительных чисел или в системе рациональных чисел: они обе коммутативны и ассоциативны, связаны законом дистрибутивности и для них существуют обратные операции — вычитание и деление (кроме деления на нуль).

Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны (точнее, вытекают из соответствующих свойств сложения действительных чисел), так как при сложении точек плоскости мы отдельно складываем их абсциссы и отдельно ординаты. Коммутативность умножения основана на том, что в определение произведения точки α и β входят симметричным образом. Ассоциативность умножения доказывают следующие равенства:

$$[(a, b)(c, d)](e, f) = (ac - bd,\ ad + bc)(e, f) = \\ = (ace - bde - adf - bcf,\ acf - bdf + ade + bce),$$

$$(a, b)[(c, d)(e, f)] = (a, b)(ce - df,\ cf + de) = \\ = (ace - adf - bcf - bde,\ acf + ade + bce - bdf).$$

Закон дистрибутивности вытекает из равенств

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (a + c,\ b + d)(e, f) = \\ = (ae + ce - bf - df,\ af + cf + be + de),$$

$$(a, b)(e, f) + (c, d)(e, f) = (ae - bf,\ af + be) + (ce - df,\ cf + de) = \\ = (ae - bf + ce - df,\ af + be + cf + de).$$

Рассмотрим вопрос об обратных операциях. Если даны точки $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$, то их разностью будет такая точка (x, y), что

$$(c, d) + (x, y) = (a, b).$$

Отсюда, ввиду (2),

$$c + x = a, \quad d + y = b.$$

Таким образом, *разностью* точек $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ служит точка

$$\alpha - \beta = (a - c,\ b - d) \tag{4}$$

и эта разность однозначно определена. В частности, *нулем* будет служить начало координат (0, 0), а точкой, *противоположной* для точки $\alpha = (a, b)$, будет точка

$$-\alpha = (-a, -b). \tag{5}$$

Пусть, далее, даны точки $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$, причем точка β отлична от нуля, т. е. хотя бы одна из координат c, d не есть нуль и поэтому $c^2 + d^2 \neq 0$. Частным от деления α и β должна быть такая точка (x, y), что $(c, d)(x, y) = (a, b)$. Отсюда, ввиду (3),

$$cx - dy = a,$$
$$dx + cy = b.$$

Решая эту систему уравнений, мы получим:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Таким образом, при $\beta\neq 0$ *частное* $\frac{\alpha}{\beta}$ существует и однозначно определено:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right). \tag{6}$$

Полагая здесь $\beta=\alpha$, мы получим, что *единицей* при нашем умножении точек служит точка (1, 0), лежащая на оси абсцисс на расстоянии 1 вправо от начала координат. Полагая, далее, в (6), что $\alpha=1=(1, 0)$, мы получим, что при $\beta\neq 0$ точкой, *обратной* для β, будет:

$$\beta^{-1}=\left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2}\right). \tag{7}$$

Таким образом, мы построили систему чисел, изображаемых точками плоскости, причем операции над этими числами определяются по формулам (2) и (3). Эта система чисел называется *системой комплексных чисел.*

Покажем, что *система комплексных чисел является расширением системы действительных чисел.* Для этой цели рассмотрим точки, лежащие на оси абсцисс, т. е. точки вида $(a, 0)$; ставя в соответствие точке $(a, 0)$ действительное число a, мы получаем, очевидно, взаимно однозначное соответствие между рассматриваемым множеством точек и множеством всех действительных чисел. Применение к этим точкам формул (2) и (3) дает равенства

$$(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0),$$
$$(a, 0)\cdot(b, 0)=(ab, 0),$$

т. е. точки $(a, 0)$ складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие действительные числа. Таким образом, *множество точек, лежащих на оси абсцисс, рассматриваемое как часть системы комплексных чисел, по своим алгебраическим свойствам ничем не отличается от системы действительных чисел, обычным способом изображенной точками прямой линии.* Это позволяет нам не различать в будущем точку $(a, 0)$ и действительное число a, т. е. всегда полагать $(a, 0)=a$. В частности, нуль (0, 0) и единица (1, 0) системы комплексных чисел оказываются обычными действительными числами 0 и 1.

Нам нужно теперь показать, что *среди комплексных чисел содержится корень уравнения* (1), т. е. такое число, квадрат которого равен действительному числу —1. Это будет, например, точка (0, 1), т. е. точка, лежащая на оси ординат на расстоянии 1

вверх от начала координат. Действительно, применяя (3), получаем:

$$(0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Условимся обозначать эту точку буквой i, так что $i^2 = -1$.

Покажем, наконец, что *для построенных нами комплексных чисел может быть получена их обычная запись.* Для этого найдем сначала произведение действительного числа b на точку i:

$$bi = (b, 0)\cdot(0, 1) = (0, b);$$

это будет, следовательно, точка, лежащая на оси ординат и имеющая ординату b, причем все точки оси ординат представимы в виде таких произведений. Если теперь (a, b) — произвольная точка, то ввиду равенства

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

получаем:

$$(a, b) = a + bi,$$

т. е. мы действительно приходим к обычной записи комплексных чисел; произведение и сумму в выражении $a + bi$ следует понимать, конечно, в смысле операций, определенных в построенной нами системе комплексных чисел.

Теперь, когда комплексные числа нами уже построены, читатель без труда проверит, что *все содержание предшествующих глав книги* — и теория определителей, и теория систем линейных уравнений, и теория линейной зависимости векторов, и теория операций над матрицами — *без всяких ограничений переносится на тот случай, когда к рассмотрению допускаются любые комплексные числа, а не только числа действительные.*

В заключение заметим, что проведенное нами построение системы комплексных чисел подсказывает следующий вопрос: нельзя ли так определить сложение и умножение точек трехмерного пространства, чтобы совокупность этих точек стала системой чисел, содержащей в себе систему комплексных чисел или хотя бы систему действительных чисел? Этот вопрос выходит за рамки нашего курса, и мы лишь отметим, что ответ на него оказывается отрицательным.

С другой стороны, замечая, что сложение комплексных чисел, определенное выше, по существу совпадает со сложением векторов на плоскости, выходящих из начала координат (см. следующий параграф), естественно поставить такой вопрос: можно ли при некоторых n так определить умножение векторов в n-мерном действительном векторном пространстве, чтобы по отношению к этому умножению и обычному сложению векторов наше пространство оказалось числовой системой, содержащей в себе систему действительных чисел? Можно показать, что этого сделать нельзя, если требовать выполнения всех тех свойств операций, которые имеют место в системах рациональных, действительных и комплексных чисел.

Если же отказаться от коммутативности умножения, то такое построение возможно в четырехмерном пространстве; получающаяся система чисел называется *системой кватернионов*. Аналогичное построение возможно и в восьмимерном пространстве — получается так называемая *система чисел Кэли*. Здесь приходится отказываться, впрочем, не только от коммутативности умножения, но и от его ассоциативности, заменяя последнее одним более слабым требованием.

§ 18. Дальнейшее изучение комплексных чисел

В соответствии с исторически сложившимися традициями мы будем называть комплексное число i *мнимой единицей*, а числа вида bi — *чисто мнимыми числами*, хотя существование этих чисел не вызывает у нас сомнений и мы можем указать те точки плоскости — точки оси ординат,— которыми эти числа изображаются. В записи комплексного числа α в виде $\alpha = a + bi$ число a называется *действительной частью* числа α, а bi — его *мнимой частью*. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами по способу, изложенному в § 17, будет называться *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс этой плоскости называется *действительной осью*, так как ее точки изображают действительные числа; соответственно ось ординат комплексной плоскости называется *мнимой осью*.

Сложение, умножение, вычитание и деление комплексных чисел, записанных в виде $a + bi$, производятся следующим образом, как вытекает из формул (2), (4), (3) и (6) предшествующего параграфа:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i;$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i;$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i;$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Мы можем сказать, что *при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части;* аналогичное правило имеет место и для вычитания. Словесные выражения для формул умножения и деления были бы слишком громоздкими, и мы их не даем. Последнюю из этих формул нет необходимости запоминать; следует лишь помнить, что ее можно вывести, умножая числитель и знаменатель заданной дроби на число, отличающееся от знаменателя лишь знаком при мнимой части.

Действительно,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$