Если же отказаться от коммутативности умножения, то такое построение возможно в четырехмерном пространстве; получающаяся система чисел называется *системой кватернионов*. Аналогичное построение возможно и в восьмимерном пространстве — получается так называемая *система чисел Кэли*. Здесь приходится отказываться, впрочем, не только от коммутативности умножения, но и от его ассоциативности, заменяя последнее одним более слабым требованием.

§ 18. Дальнейшее изучение комплексных чисел

В соответствии с исторически сложившимися традициями мы будем называть комплексное число i *мнимой единицей*, а числа вида bi — *чисто мнимыми числами*, хотя существование этих чисел не вызывает у нас сомнений и мы можем указать те точки плоскости — точки оси ординат,— которыми эти числа изображаются. В записи комплексного числа α в виде $\alpha = a + bi$ число a называется *действительной частью* числа α, а bi — его *мнимой частью*. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами по способу, изложенному в § 17, будет называться *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс этой плоскости называется *действительной осью*, так как ее точки изображают действительные числа; соответственно ось ординат комплексной плоскости называется *мнимой осью*.

Сложение, умножение, вычитание и деление комплексных чисел, записанных в виде $a + bi$, производятся следующим образом, как вытекает из формул (2), (4), (3) и (6) предшествующего параграфа:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i;$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i;$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i;$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Мы можем сказать, что *при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части;* аналогичное правило имеет место и для вычитания. Словесные выражения для формул умножения и деления были бы слишком громоздкими, и мы их не даем. Последнюю из этих формул нет необходимости запоминать; следует лишь помнить, что ее можно вывести, умножая числитель и знаменатель заданной дроби на число, отличающееся от знаменателя лишь знаком при мнимой части.

Действительно,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Примеры.

1) $(2+5i)+(1-7i)=(2+1)+(5-7)i=3-2i$;

2) $(3-9i)-(7+i)=(3-7)+(-9-1)i=-4-10i$;

3) $(1+2i)(3-i)=[1\cdot 3-2\cdot(-1)]+[1\cdot(-1)+2\cdot 3]i=5+5i$;

4) $\dfrac{23+i}{3+i}=\dfrac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{70-20i}{10}=7-2i$.

Изображение комплексных чисел точками плоскости приводит к естественному желанию иметь геометрическое истолкование операций, определенных для комплексных чисел. Для сложения такое истолкование может быть получено без затруднений. Пусть даны числа $\alpha=a+bi$ и $\beta=c+di$. Соединяем соответствующие им точки (a, b) и (c, d) отрезками с началом координат и строим на этих отрезках, как на сторонах, параллелограмм (рис. 2). Четвертой вершиной этого параллелограмма будет, очевидно, точка

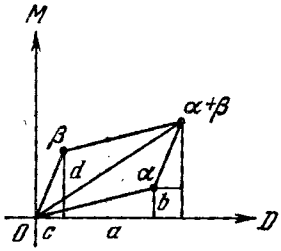

Рис. 2.

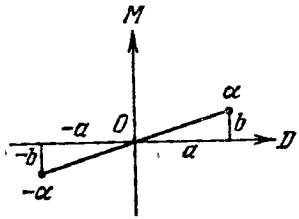

Рис. 3.

$(a+c, b+d)$. Таким образом, *сложение комплексных чисел геометрически выполняется по правилу параллелограмма, т. е. по правилу сложения векторов, выходящих из начала координат.*

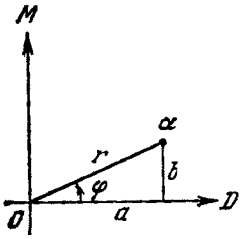

Рис. 4.

Далее, *число, противоположное числу* $\alpha=a+bi$, *будет точкой комплексной плоскости, симметричной с точкой* α *относительно начала координат* (рис. 3). Отсюда без труда может быть получено геометрическое истолкование вычитания.

Геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел станет ясным лишь после того, как мы введем для комплексных чисел новую запись, отличную от употреблявшейся нами до сих пор. Запись числа α в виде $\alpha=a+bi$ использует декартовы координаты точки, соответствующей этому числу. Положение точки на плоскости вполне определяется, однако, также заданием ее полярных координат: расстояния r от начала координат до точки и угла φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на эту точку (рис. 4).

Число r является неотрицательным действительным числом, причем оно равно нулю лишь для точки 0. Для α, лежащего на действительной оси, т. е. являющегося действительным числом, число r будет абсолютной величиной α, поэтому и для любого комплексного числа α его иногда называют *абсолютной величиной* числа α; чаще, впрочем, число r называют *модулем* числа α. Обозначается оно через $|\alpha|$.

Угол φ будет называться *аргументом* числа α и обозначаться $\arg\alpha$[1]). Угол φ может принимать любые действительные значения, как положительные, так и отрицательные, причем положительные углы должны отсчитываться против часовой стрелки, однако, если углы отличаются друг от друга на 2π или число, кратное 2π, то соответствующие им точки плоскости совпадают.

Таким образом аргумент комплексного числа α имеет бесконечно много значений, отличающихся друг от друга на целые кратные числа 2π; из равенства двух комплексных чисел, заданных их модулями и аргументами, можно лишь заключить, следовательно, что аргументы отличаются на целое кратное числа 2π, в то время как модули равны. Аргумент не определен лишь для числа 0; это число вполне определяется, однако, равенством $|0|=0$.

Аргумент комплексного числа является естественным обобщением знака действительного числа. В самом деле, аргумент положительного действительного числа равен 0, аргумент отрицательного действительного числа равен π; на действительной оси из начала координат выходят лишь два направления и их можно различать двумя символами $+$ и $-$, тогда как на комплексной плоскости направлений, выходящих из точки 0, бесконечно много и различаются они уже углом, составляемым ими с положительным направлением действительной оси.

Между декартовыми и полярными координатами точки существует следующая связь, справедливая при любом расположении точек на плоскости:

$$a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi. \tag{1}$$

Отсюда

$$r=+\sqrt{a^2+b^2}. \tag{2}$$

Применим формулы (1) к произвольному комплексному числу $\alpha=a+bi$:

$$\alpha=a+bi=r\cos\varphi+(r\sin\varphi)\,i,$$

или

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{3}$$

Обратно, пусть число $\alpha=a+bi$ допускает запись вида $\alpha=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$, где r_0 и φ_0 — некоторые действительные

[1]) Мы отказываемся, следовательно, от обычных названий полярных координат точки — полярный радиус и полярный угол.

числа; причем $r_0 \geqslant 0$. Тогда $r_0 \cos\varphi_0 = a$, $r_0 \sin\varphi_0 = b$, откуда $r_0 = +\sqrt{a^2+b^2}$, т. е., ввиду (2), $r_0 = |\alpha|$. Отсюда, используя (1), получаем: $\cos\varphi_0 = \cos\varphi$, $\sin\varphi_0 = \sin\varphi$, т. е. $\varphi_0 = \arg\alpha$. Таким образом, *всякое комплексное число α однозначным образом записывается в виде* (3), *где* $r = |\alpha|$, $\varphi = \arg\alpha$ (причем аргумент φ определен, конечно, лишь с точностью до слагаемых, кратных 2π). Эта запись числа α называется его *тригонометрической формой* и будет дальше весьма часто использоваться.

Числа

$$\alpha = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad \beta = \cos\frac{19}{3}\pi + i\sin\frac{19}{3}\pi$$

и

$$\gamma = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

заданы в тригонометрической форме; здесь $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 1$, $|\gamma| = \sqrt{3}$; $\arg\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\arg\beta = \frac{19}{3}\pi$, $\arg\gamma = -\frac{\pi}{7}$ $\left(\text{или } \arg\beta = \frac{\pi}{3},\ \arg\gamma = \frac{13}{7}\pi\right)$.

С другой стороны, комплексные числа

$$\alpha' = (-2)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right), \quad \beta' = 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$
$$\gamma' = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{3}{4}\pi\right), \quad \delta' = \sin\frac{3}{4}\pi + i\cos\frac{3}{4}\pi$$

даны не в тригонометрической форме, хотя их записи напоминают запись (3). В тригонометрической форме эти числа записываются так:

$$\alpha' = 2\left(\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi\right), \quad \beta' = 3\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right),$$
$$\delta' = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi.$$

Разыскание тригонометрической формы числа γ' наталкивается на трудность, почти всегда встречающуюся при переходе от обычной записи комплексного числа к тригонометрической и обратно: невозможно, кроме немногих случаев, по заданным числовым значениям синуса и косинуса найти точно угол, а для заданного угла написать точные значения его синуса и косинуса.

Пусть комплексные числа α и β заданы в тригонометрической форме: $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. Перемножим эти числа:

$$\alpha\beta = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]\cdot[r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] =$$
$$= rr'(\cos\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'),$$

или

$$\alpha\beta = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')]. \tag{4}$$

Мы получили запись произведения $\alpha\beta$ в тригонометрической форме, и поэтому $|\alpha\beta|=rr'$, или

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|, \tag{5}$$

т. е. *модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей;* далее, $\arg(\alpha\beta)=\varphi+\varphi'$ или

$$\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta, \tag{6}$$

т. е. *аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей*[1]). Эти правила распространяются, очевидно, на любое конечное число множителей. В применении к случаю действительных чисел формула (5) дает известное свойство абсолютных величин этих чисел, а (6) превращается, как легко проверить, в правило знаков при умножении действительных чисел.

Аналогичные правила имеют место и для частного. Действительно, пусть $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$, причем $\beta\neq 0$, т. е. $r'\neq 0$. Тогда

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'-i\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi'+\sin^2\varphi')}=$$
$$=\frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi'+i\sin\varphi\cos\varphi'-i\cos\varphi\sin\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'),$$

или

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')]. \tag{7}$$

Отсюда следует, что $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{r}{r'}$ или

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}, \tag{8}$$

т. е. *модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, деленному на модуль делителя;* далее, $\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=$ $=\varphi-\varphi'$, или

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta, \tag{9}$$

т. е. *аргумент частного двух комплексных чисел получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого.*

Геометрический смысл умножения и деления выясняется теперь без затруднений. Действительно, ввиду формул (5) и (6), мы получим точку, изображающую произведение числа α на число $\beta=$ $=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$, если вектор, идущий от 0 к α (рис. 5), повернем против часовой стрелки на угол $\varphi'=\arg\beta$, а затем

---

[1]) Подчеркнем, что равенство здесь понимается с точностью до слагаемого, кратного 2π.

растянем этот вектор в $r'=|\beta|$ раз (при $0\leqslant r'<1$ это будет, конечно, сжатием, а не растяжением). Далее, из (7) следует, что при $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0$ будет

$$\alpha^{-1}=r^{-1}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)], \tag{10}$$

т. е. $|\alpha^{-1}|=|\alpha|^{-1}$, $\arg(\alpha^{-1})=-\arg\alpha$. Таким образом, мы получим точку α^{-1}, если от точки α перейдем к точке α', лежащей на расстоянии r^{-1} от нуля на той же полупрямой, выходящей из нуля,

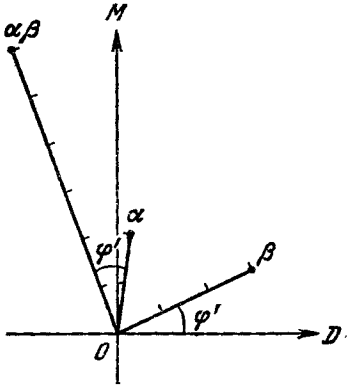

Рис. 5.

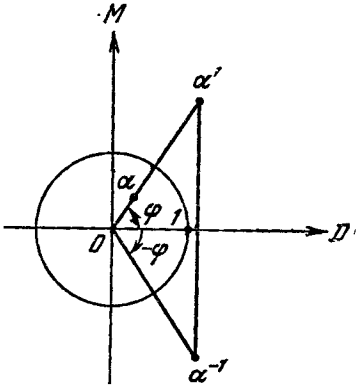

Рис. 6.

что и точка α (рис. 6)[1]), а затем перейдем к точке, симметричной с α' относительно действительной оси.

Сумму и разность комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, нельзя выразить формулами, подобными формулам (4) и (7). Для модуля суммы имеют место, однако, следующие важные неравенства:

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|, \tag{11}$$

т. е. *модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей слагаемых, но больше или равен разности этих модулей.* Неравенства (11) вытекают из известной теоремы элементарной геометрии о сторонах треугольника ввиду того, что $|\alpha+\beta|$ равен, как мы знаем, диагонали параллелограмма со сторонами $|\alpha|$ и $|\beta|$. Специального рассмотрения, которое мы предоставляем читателю, требует, впрочем, случай, когда точки α, β и 0 лежат

---

[1]) Тогда и только тогда $|\alpha'|=|\alpha|$, если $|\alpha|=1$, т. е. если точка α лежит на окружности *единичного круга*. Если α лежит внутри единичного круга, то α' будет вне его, и обратно, причем этим путем мы получаем, очевидно, взаимно однозначное соответствие между всеми точками комплексной плоскости, лежащими вне единичного круга, и всеми точками, лежащими внутри этого круга и отличными от нуля.

на одной прямой; лишь в этом случае в формулах (11) могут достигаться равенства.

Из (11), ввиду $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ и

$$|-\beta|=|\beta| \tag{12}$$

(это равенство следует хотя бы из геометрического толкования числа $-\beta$), вытекают также неравенства

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|, \tag{13}$$

т. е. для модуля разности имеют место такие же неравенства, как и для модуля суммы.

Неравенства (11) можно было бы получить также следующим путем. Пусть $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$ и пусть тригонометрическая форма числа $\alpha+\beta$ есть $\alpha+\beta=R(\cos\psi+i\sin\psi)$. Складывая отдельно действительные и отдельно мнимые части, получаем:

$$r\cos\varphi+r'\cos\varphi'=R\cos\psi,$$
$$r\sin\varphi+r'\sin\varphi'=R\sin\psi;$$

умножая обе части первого равенства на $\cos\psi$, обе части второго — на $\sin\psi$ и складывая, получаем:

$$r(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)+r'(\cos\varphi'\cos\psi+\sin\varphi'\sin\psi)=R(\cos^2\psi+\sin^2\psi),$$

т. е.

$$r\cos(\varphi-\psi)+r'\cos(\varphi'-\psi)=R.$$

Отсюда, так как косинус никогда не бывает больше единицы, следует неравенство $r+r'\geqslant R$, т. е. $|\alpha|+|\beta|\geqslant|\alpha+\beta|$. С другой стороны, $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=(\alpha+\beta)+(-\beta)$. Отсюда, по доказанному и в силу (12),

$$|\alpha|\leqslant|\alpha+\beta|+|-\beta|=|\alpha+\beta|+|\beta|,$$

откуда $|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|$.

Следует заметить, что для комплексных чисел понятия «больше» и «меньше» не могут быть разумно определены, так как эти числа, в отличие от действительных чисел, располагаются не на прямой линии, точки которой естественным образом упорядочены, а на плоскости. Поэтому сами комплексные числа (а не их модули) никогда нельзя соединять знаком неравенства.

Сопряженные числа. Пусть дано комплексное число $\alpha=a+bi$. Число $a-bi$, отличающееся от α лишь знаком при мнимой части, называется числом, *сопряженным с* α, и обозначается $\overline{\alpha}$.

Напомним, что при рассмотрении деления комплексных чисел мы прибегали к сопряженным числам, хотя и не вводили этого названия.

Числом, сопряженным с $\overline{\alpha}$, будет, очевидно, α, т. е. можно говорить о паре сопряженных чисел. Действительные числа, и только они, сопряжены сами себе.

Геометрически сопряженные числа являются точками, симметричными относительно действительной оси (рис. 7). Отсюда следуют равенства

$$|\bar{\alpha}|=|\alpha|, \quad \arg\bar{\alpha}=-\arg\alpha. \tag{14}$$

Сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами. В самом деле,

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\bar{\alpha}&=2a, \\ \alpha\bar{\alpha}&=a^2+b^2=|\alpha|^2. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Последнее равенство показывает, что число $\alpha\bar{\alpha}$ даже положительно при $\alpha\neq 0$. В § 24 будет получена теорема, показывающая, что доказанное сейчас свойство сопряженных чисел является для них характерным.

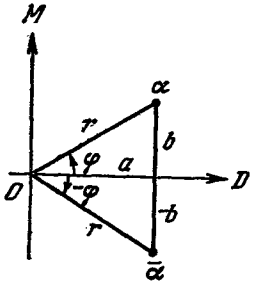

Рис. 7.

Равенство

$$(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)\,i$$

показывает, что *число, сопряженное с суммой двух чисел, равно сумме чисел, сопряженных со слагаемыми:*

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}. \tag{16}$$

Аналогично, из равенства

$$(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)\,i$$

вытекает, что *число, сопряженное с произведением, равно произведению чисел, сопряженных с сомножителями:*

$$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}. \tag{17}$$

Непосредственная проверка показывает также справедливость формул

$$\overline{\alpha-\beta}=\bar{\alpha}-\bar{\beta}, \tag{18}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}. \tag{19}$$

Докажем следующее утверждение: *если число α некоторым образом выражено через комплексные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ при помощи сложения, умножения, вычитания и деления, то, заменяя в этом выражении все числа β_k их сопряженными, мы получим число, сопряженное с α;* в частности, если число α действительное, то оно не меняется при замене всех комплексных чисел β_k их сопряженными.

Будем доказывать это утверждение индукцией по n, так как при $n=2$ оно вытекает из формул (16)—(19).

Пусть число α выражено через числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, не обязательно различные. В этом выражении указан определенный порядок,

в котором применяются операции сложения, умножения, вычитания и деления. Последним шагом будет применение одной из этих операций к числу γ_1, выраженному через числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и к числу γ_2, выраженному через числа $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n$. По индуктивному предположению замена чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ на сопряженные влечет за собой замену числа γ_1 на $\overline{\gamma_1}$, а замена чисел $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$ на сопряженные заменяет γ_2 на $\overline{\gamma_2}$. Однако по одной из формул (16)—(19) переход от γ_1 и γ_2 к $\overline{\gamma_1}$ и $\overline{\gamma_2}$ превращает число α в $\overline{\alpha}$.

§ 19. Извлечение корня из комплексных чисел

Переходим к вопросу о возведении комплексных чисел в степень и извлечении из них корня. Для возведения числа $\alpha = a + bi$ в целую положительную степень n достаточно применить к выражению $(a+bi)^n$ формулу бинома Ньютона (эта формула справедлива и для комплексных чисел, так как ее доказательство основано лишь на законе дистрибутивности), а затем воспользоваться равенствами $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, откуда вообще

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Если число α задано в тригонометрической форме, то при целом положительном n из формулы (4) предшествующего параграфа вытекает следующая формула, называемая *формулой Муавра*:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1}$$

т. е. *при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.* Формула (1) верна и для целых отрицательных показателей. Действительно, ввиду $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$, достаточно применить формулу Муавра к числу α^{-1}, тригонометрическую форму которого дает формула (10) предшествующего параграфа.

Примеры.

1) $i^{37} = i, \quad i^{122} = -1;$

2) $(2+5i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 5i + 3\cdot 2\cdot 5^2 i^2 + 5^3 i^3 =$
$= 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i;$

3) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 = (\sqrt{2})^4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4;$

4) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{-3} =$
$= 3^{-3}\left[\cos\left(-\frac{3}{5}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{5}\pi\right)\right] = \frac{1}{27}\left(\cos\frac{7}{5}\pi + i\sin\frac{7}{5}\pi\right).$