

в котором применяются операции сложения, умножения, вычитания и деления. Последним шагом будет применение одной из этих операций к числу γ_1 , выраженному через числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, где $1 \leq k \leq n-1$, и к числу γ_2 , выраженному через числа $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$. По индуктивному предположению замена чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ на сопряженные влечет за собой замену числа γ_1 на $\bar{\gamma}_1$, а замена чисел $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ на сопряженные заменяет γ_2 на $\bar{\gamma}_2$. Однако по одной из формул (16) — (19) переход от γ_1 и γ_2 к $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ превращает число α в $\bar{\alpha}$.

§ 19. Извлечение корня из комплексных чисел

Переходим к вопросу о возведении комплексных чисел в степень и извлечении из них корня. Для возведения числа $\alpha = a + bi$ в целую положительную степень n достаточно применить к выражению $(a + bi)^n$ формулу бинома Ньютона (эта формула справедлива и для комплексных чисел, так как ее доказательство основано лишь на законе дистрибутивности), а затем воспользоваться равенствами $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, откуда вообще

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Если число α задано в тригонометрической форме, то при целом положительном n из формулы (4) предшествующего параграфа вытекает следующая формула, называемая *формулой Муавра*:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (1)$$

т. е. при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. Формула (1) верна и для целых отрицательных показателей. Действительно, ввиду $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$, достаточно применить формулу Муавра к числу α^{-1} , тригонометрическую форму которого дает формула (10) предшествующего параграфа.

Примеры.

$$1) i^{37} = i, \quad i^{122} = -1;$$

$$2) (2+5i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 5i + 3 \cdot 2 \cdot 5^2 i^2 + 5^3 i^3 = \\ = 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i;$$

$$3) \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^4 = (\sqrt{2})^4 (\cos \pi + i \sin \pi) = -4;$$

$$4) \left[3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \right]^{-3} = \\ = 3^{-3} \left[\cos \left(-\frac{3}{5}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{5}\pi \right) \right] = \frac{1}{27} \left(\cos \frac{7}{5}\pi + i \sin \frac{7}{5}\pi \right).$$

Частный случай формулы Муавра, а именно равенство

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

позволяет легко получить формулы для синуса и косинуса кратного угла. Действительно, раскрывая левую часть этого равенства по формуле бинома и приравнивая отдельно действительные и мнимые части обеих частей равенства, мы получим:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2}\varphi \cdot \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4}\varphi \cdot \sin^4 \varphi - \dots,$$

$$\begin{aligned} \sin n\varphi = & \binom{n}{1} \cos^{n-1}\varphi \cdot \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3}\varphi \cdot \sin^3 \varphi + \\ & + \binom{n}{5} \cos^{n-5}\varphi \cdot \sin^5 \varphi - \dots; \end{aligned}$$

здесь $\binom{n}{k}$ есть обычное обозначение биномиального коэффициента:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

При $n=2$ мы приходим к известным формулам

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi,$$

а при $n=3$ — к формулам

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Извлечение корня из комплексных чисел представляет уже много больше трудностей. Начнем с извлечения квадратного корня из числа $\alpha = a + bi$. Мы не знаем пока, существует ли такое комплексное число, квадрат которого равен α . Предположим, что такое число $u + vi$ существует, т. е., употребляя обычную символику, можно написать

$$\sqrt{a + bi} = u + vi.$$

Из равенства

$$(u + vi)^2 = a + bi$$

следует

$$\left. \begin{array}{l} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Возводя в квадрат обе части каждого из равенств (2), а затем складывая их, получаем:

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = a^2 + b^2,$$

откуда

$$u^2 + v^2 = + \sqrt{a^2 + b^2};$$

положительный знак взят потому, что числа u и v действительные, и поэтому левая часть равенства положительная. Из этого равенства и из первого из равенств (2) получаем:

$$u^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$v^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Мы приходим, извлекая квадратные корни, к двум значениям для u , отличающимся друг от друга знаком, а также к двум значениям для v . Все эти значения будут действительными, так как квадратные корни будут извлекаться при любых a и b из положительных чисел. Полученные значения для u и v нельзя комбинировать между собой произвольным образом, так как, ввиду второго из равенств (2), знак произведения uv должен совпадать со знаком b . Это дает две возможные комбинации значений u и v , т. е. два числа вида $u+vi$, которые могут служить значениями квадратного корня из числа α ; эти числа отличаются друг от друга знаком. Элементарная, хотя и громоздкая, проверка (возведением полученных чисел в квадрат, отдельно для случая $b > 0$ и для случая $b < 0$) показывает, что найденные нами числа действительно являются значениями квадратного корня из числа α . Таким образом, *извлечение квадратного корня из комплексного числа всегда возможно и дает два значения, отличающиеся друг от друга знаком*,

В частности, теперь делается возможным извлечение квадратного корня и из отрицательного действительного числа, причем значения этого корня будут чисто мнимыми. В самом деле, если $a < 0$ и $b = 0$, то $\sqrt{a^2 + b^2} = -a$, так как этот корень должен быть положительным, а тогда $u^2 = \frac{1}{2}(a - a) = 0$, т. е. $u = 0$, откуда $\sqrt{-a} = \pm vi$.

Пример. Пусть $\alpha = 21 - 20i$. Тогда $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{441 + 400} = 29$. Поэтому $u^2 = \frac{1}{2}(21 + 29) = 25$, $v^2 = \frac{1}{2}(-21 + 29) = 4$, откуда $u = \pm 5$, $v = \pm 2$. Знаки u и v должны быть различными ввиду отрицательности b , поэтому

$$\sqrt{21 - 20i} = \pm(5 - 2i).$$

Попытки извлечения из комплексных чисел, заданных в виде $a + bi$, корней более высокой степени, чем вторая, встречаются с непреодолимыми затруднениями. Так, если бы мы захотели таким же методом, как выше, извлечь из числа $a + bi$ кубический корень, то должны были бы решить некоторое вспомогательное кубическое уравнение, чего мы пока не умеем и что в свою очередь требует, как мы узнаем в § 38, извлечения кубического корня из комплексного числа. С другой стороны, тригонометрическая форма весьма хорошо

приспособлена для извлечения корней любой степени и, пользуясь ею, мы сейчас полностью исчерпаем этот вопрос.

Пусть нужно извлечь корень n -й степени из числа $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Предположим, что это сделать можно и что в результате получается число $\rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, т. е.

$$[\rho (\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Тогда, по формуле Муавра, $\rho^n = r$, т. е. $\rho = \sqrt[n]{r}$, где в правой части стоит однозначно определенное положительное значение корня n -й степени из положительного действительного числа r . С другой стороны, аргумент левой части равенства (3) есть $n\theta$. Нельзя утверждать, однако, что $n\theta$ равно φ , так как эти углы могут в действительности отличаться на слагаемое, являющееся некоторым целым кратным числа 2π . Поэтому $n\theta = \varphi + 2k\pi$, где k — целое число, откуда

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Обратно, если мы берем число $\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$, то при любом целом k , положительном или отрицательном, n -я степень этого числа равна α . Таким образом,

$$\sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (4)$$

Давая k различные значения, мы не всегда будем получать различные значения искомого корня. Действительно, при

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

мы получим n значений корня, которые все будут различными, так как увеличение k на единицу влечет за собой увеличение аргумента на $\frac{2\pi}{n}$. Пусть теперь k произвольно. Если $k = nq + r$, $0 \leq r \leq n-1$, то

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(nq+r)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

т. е. значение аргумента при нашем k отличается от значения аргумента при $k=r$ на число, кратное 2π ; мы получаем, следовательно, такое же значение корня, как при значении k , равном r , т. е. входящем в систему (5).

Таким образом, извлечение корня n -й степени из комплексного числа α всегда возможно и дает n различных значений. Все значения корня n -й степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|\alpha|}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей.

В частности, корень n -й степени из действительного числа a также имеет n различных значений; действительных среди этих значений будет два, одно или ни одного в зависимости от знака a и четности n .

Примеры.

$$1) \beta = \sqrt[3]{2 \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} \right);$$

$$k=0: \beta_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$k=1: \beta_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi \right);$$

$$k=2: \beta_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{19}{12}\pi + i \sin \frac{19}{12}\pi \right).$$

$$2) \beta = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3};$$

$$\beta_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \beta_1 = \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi = -\beta_0.$$

$$3) \beta = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right);$$

$$\beta_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i \sqrt{3};$$

$$\beta_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2;$$

$$\beta_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i \sqrt{3}.$$

Корни из единицы. Особенno важен случай извлечения корня n -й степени из числа 1. Этот корень имеет n значений, причем, ввиду равенства $1 = \cos 0 + i \sin 0$ и формулы (4), все эти значения или, как мы будем говорить, все *корни n -й степени из единицы*, даются формулой

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

Действительные значения корня n -й степени из единицы получаются из формулы (6) при значениях $k=0$ и $\frac{n}{2}$, если n четно, и при $k=0$, если n нечетно. На комплексной плоскости корни n -й степени из единицы расположены на окружности единичного круга и делят ее на n равных дуг; одной из точек деления служит число 1. Отсюда следует, что те из корней n -й степени из единицы, которые не являются действительными, расположены симметрично относительно действительной оси, т. е. попарно сопряжены.

Квадратный корень из единицы имеет два значения: 1 и —1, корень четвертой степени из единицы—четыре значения: 1, —1, i и $-i$. Для дальнейшего полезно запомнить значения *кубического корня из единицы*. Это будут, ввиду (6), числа $\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$, где $k=0, 1, 2$, т. е., кроме самой единицы, также сопряженные между собою числа

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \epsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Все значения корня n -й степени из комплексного числа α можно получить умножением одного из этих значений на все корни n -й степени из единицы. Действительно, пусть β будет одно из значений корня n -й степени из числа α , т. е. $\beta^n = \alpha$, а ϵ —произвольное значение корня n -й степени из единицы, т. е. $\epsilon^n = 1$. Тогда $(\beta\epsilon)^n = \beta^n\epsilon^n = \alpha$, т. е. $\beta\epsilon$ также будет одним из значений для $\sqrt[n]{\alpha}$. Умножая β на каждый из корней n -й степени из единицы, мы получаем n различных значений корня n -й степени из числа α , т. е. все значения этого корня.

Примеры. 1) Одно из значений кубического корня из -8 есть -2 . Два других будут, ввиду (7), числа $-2\epsilon_1 = 1 - i\sqrt{3}$ и $-2\epsilon_2 = 1 + i\sqrt{3}$ (см. выше пример 3)).

2) $\sqrt[4]{81}$ имеет четыре значения: 3, -3 , $3i$, $-3i$.

Произведение двух корней n -й степени из единицы само есть корень n -й степени из единицы. Действительно, если $\epsilon^n = 1$ и $\eta^n = 1$, то $(\epsilon\eta)^n = \epsilon^n\eta^n = 1$. Далее, число, обратное корню n -й степени из единицы, само есть такой же корень. В самом деле, пусть $\epsilon^n = 1$. Тогда из $\epsilon \cdot \epsilon^{-1} = 1$ следует $\epsilon^n \cdot (\epsilon^{-1})^n = 1$, т. е. $(\epsilon^{-1})^n = 1$. Вообще, всякая степень корня n -й степени из единицы есть также корень n -й степени из единицы.

Всякий корень k -й степени из единицы будет также корнем l -й степени из единицы для всякого l , кратного k . Отсюда следует, что если мы будем рассматривать всю совокупность корней n -й степени из единицы, то некоторые из этих корней уже будут корнями n' -й степени из единицы для некоторых n' , являющихся делителями числа n . Для всякого n существуют, однако, такие корни n -й степени из единицы, которые не являются корнями из единицы никакой меньшей степени. Такие корни называются *первообразными корнями n -й степени из единицы*. Их существование вытекает из формулы (6): если значение корня, соответствующее данному значению k , мы обозначим через ϵ_k (так что $\epsilon_0 = 1$), то на основании формулы Муавра (1)

$$\epsilon_1^k = \epsilon_k.$$

Никакая степень числа ϵ_1 , меньшая, чем n -я, не будет, следовательно, равна 1, т. е. $\epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ является первообразным корнем.

Корень n -й степени из единицы ϵ тогда и только тогда будет первообразным, если его степени ϵ^k , $k=0, 1, \dots, n-1$, различны, т. е. если они исчерпываются все корни n -й степени из единицы.

Действительно, если все указанные степени числа ϵ различны, то ϵ будет, очевидно, первообразным корнем n -й степени. Если же, например, $\epsilon^k = \epsilon^l$ при $0 \leq k < l \leq n-1$, то $\epsilon^{l-k} = 1$, т. е., ввиду неравенств $1 \leq l-k \leq n-1$, корень ϵ не будет первообразным.

Число ϵ_1 , найденное выше, в общем случае — не единственный первообразный корень n -й степени. Для разыскания всех этих корней служит следующая теорема.

Если ϵ есть первообразный корень n -й степени из единицы, то число ϵ^k тогда и только тогда будет первообразным корнем n -й степени, если k взаимно просто с n .

В самом деле, пусть d будет наибольшим общим делителем чисел k и n . Если $d > 1$ и $k = dk'$, $n = dn'$, то

$$(\epsilon^k)^{n'} = \epsilon^{kn'} = \epsilon^{k'n} = (\epsilon^n)^{k'} = 1,$$

т. е. корень ϵ^k оказался корнем n' -й степени из единицы.

Пусть, с другой стороны, $d = 1$ и пусть, вместе с тем, число ϵ^k оказывается корнем m -й степени из единицы, $1 \leq m < n$. Таким образом

$$(\epsilon^k)^m = \epsilon^{km} = 1.$$

Так как число ϵ — первообразный корень n -й степени из единицы, т. е. лишь его степени с показателями, кратными n , могут быть равными единице, то число km будет кратным n . Отсюда вытекает, однако, так как $1 \leq m < n$, что числа k и n не могут быть взаимно простыми в противоречие с предположением.

Таким образом, число первообразных корней n -й степени из единицы равно числу целых положительных чисел k , меньших n и взаимно простых с ним. Выражение для этого числа, обычно обозначаемого через $\varphi(n)$, можно найти в любом курсе теории чисел.

Если p — простое число, то первообразными корнями p -й степени из единицы будут все эти корни, кроме самой единицы. С другой стороны, среди корней четвертой степени из единицы первообразными будут i и $-i$, но не 1 и -1 .