ГЛАВА ПЯТАЯ

МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ КОРНИ

§ 20. Операции над многочленами

Содержание первых двух глав книги, а именно — теория определителей и теория систем линейных уравнений, возникло в качестве непосредственного развития того направления в школьном курсе алгебры, которое, начинаясь от одного уравнения первой степени с одним неизвестным, вело к системам двух и трех уравнений первой степени с двумя и, соответственно, тремя неизвестными. Другое направление в элементарной алгебре, воспринимавшееся там как еще более значительное, состояло в переходе от уравнения первой степени с одним неизвестным к произвольному квадратному уравнению снова с одним неизвестным, а затем и к некоторым частным типам уравнений третьей и четвертой степени. Это направление вырастает в весьма большой и содержательный раздел высшей алгебры, посвященный изучению произвольных уравнений любой n-й степени с одним неизвестным. К этому разделу алгебры, исторически самому раннему, относятся как настоящая глава, так и некоторые из дальнейших глав книги.

Общий вид уравнения n-й степени (где n — некоторое целое положительное число) есть

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (1)$$

Коэффициенты a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n этого уравнения мы будем считать произвольными комплексными числами, причем *старший коэффициент* a_0 должен быть отличным от нуля.

Если написано уравнение (1), то всегда предполагается, что требуется его решить. Иными словами, требуется найти такие числовые значения для неизвестного x, которые удовлетворяют этому уравнению, т. е. после подстановки вместо неизвестного и выполнения всех указанных операций обращают левую часть уравнения (1) в нуль.

Целесообразно, однако, заменить задачу решения уравнения (1) более общей задачей изучения левой части этого уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (2)$$

называемой *многочленом* (или *полиномом*) *n-й степени от неизвестного x*. Мы выбираем первый из этих терминов; следует твердо помнить, что теперь многочленом называется лишь выражение вида (2), т. е. лишь сумма целых неотрицательных степеней неизвестного x, взятых с некоторыми числовыми коэффициентами, а не любая сумма одночленов, как это было в элементарной алгебре. В частности, мы не будем считать многочленами такие выражения, которые содержат неизвестное x с отрицательными или дробными показателями, например, $2x^2-\frac{1}{x}+3$, или $ax^{-3}+bx^{-2}+cx^{-1}+d+ex+fx^2$, или же $x^{\frac{1}{2}}+1$. Для сокращенной записи многочленов будут употребляться символы $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ и т. д.

Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ будут считаться *равными* (или *тождественно равными*), $f(x)=g(x)$, в том случае, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного. В частности, никакой многочлен, хотя бы один коэффициент которого отличен от нуля, не может быть равным нулю, и поэтому знак равенства, употребляемый в записи уравнения n-й степени (1), не имеет никакого отношения к определенному сейчас равенству многочленов. Знак $=$, связывающий многочлены, следует в дальнейшем всегда понимать в смысле тождественного равенства этих многочленов.

Таким образом, на многочлен n-й степени (2) следует смотреть как на некоторое формальное выражение, вполне определяемое набором своих коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$, где $a_0 \neq 0$. Точный смысл этих слов будет выяснен много позже, в гл. 10. Заметим, что, помимо записи многочлена в виде (2), т. е. по убывающим степеням неизвестного x, будут допускаться и другие его записи, получающиеся из (2) перестановкой слагаемых, например, запись, по возрастающим степеням неизвестного.

Конечно, на многочлен (2) можно было бы смотреть и с точки зрения математического анализа, т. е. считать его комплексной функцией комплексного переменного x. Следует учесть, однако, что две функции считаются равными в том случае, если равны их значения при всех значениях переменного x. Ясно, что два многочлена, равные в указанном выше формально-алгебраическом смысле, будут равны и как функции от x. Обратное будет доказано, однако, лишь в § 24. После этого алгебраическая и теоретико-функциональная точки зрения на понятие многочлена с числовыми коэффициентами на самом деле станут равносильными, пока же мы должны каждый раз указывать, какой именно смысл придается понятию многочлена. В настоящем и двух следующих параграфах мы будем смотреть на многочлен как на формально-алгебраическое выражение.

Существуют, понятно, многочлены n-й степени для любого натурального числа n. Рассматривая всевозможные такие многочлены,

мы, помимо многочленов первой степени, квадратных, кубичных и т. д., встретимся и с *многочленами нулевой степени*, т. е. с отличными от нуля комплексными числами. Число нуль также будет считаться многочленом; это будет единственный многочлен, степень которого не определена.

Сейчас мы определим для многочленов с комплексными коэффициентами операции сложения и умножения. Эти операции будут введены по образцу операций над многочленами с действительными коэффициентами, известных читателю из курса элементарной алгебры.

Если даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с комплексными коэффициентами, записанные для удобства по возрастающим степеням x:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ \ldots\ +a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n, \quad a_n\neq 0,$$
$$g(x)=b_0+b_1x+\ \ldots\ +b_{s-1}x^{s-1}+b_sx^s, \quad b_s\neq 0,$$

и если, например, $n\geqslant s$, то их *суммой* называется многочлен

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n,$$

коэффициенты которого получаются сложением коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стоящих при одинаковых степенях неизвестного, т. е.

$$c_i=a_i+b_i, \qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{3}$$

причем при $n>s$ коэффициенты $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$ следует считать равными нулю. Степень суммы будет равна n, если n больше s, но при $n=s$ она может случайно оказаться меньше n, а именно в случае $b_n=-a_n$.

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен

$$f(x)\cdot g(x)=d_0+d_1x+\ldots+d_{n+s-1}x^{n+s-1}+d_{n+s}x^{n+s},$$

коэффициенты которого определяются следующим образом:

$$d_i=\sum_{k+l=i} a_kb_l, \quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n+s-1,\ n+s, \tag{4}$$

т. е. коэффициент d_i есть результат перемножения таких коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, сумма индексов которых равна i, и сложения всех таких произведений; в частности, $d_0=a_0b_0$, $d_1=a_0b_1+a_1b_0$, $\ldots$, $d_{n+s}=a_nb_s$. Из последнего равенства вытекает неравенство $d_{n+s}\neq 0$ и поэтому *степень произведения двух многочленов равна сумме степеней этих многочленов.*

Отсюда следует, что *произведение многочленов, отличных от нуля, никогда не будет равным нулю.*

Какими свойствами обладают введенные нами операции для многочленов? Коммутативность и ассоциативность сложения немедленно вытекают из справедливости этих свойств для сложения чисел, так как складываются коэффициенты при каждой степени неизвестного отдельно. Вычитание оказывается выполни-

мым: роль нуля играет число нуль, включенное нами в число многочленов, а противоположным для записанного выше многочлена $f(x)$ будет многочлен

$$-f(x) = -a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1}x^{n-1} - a_n x^n.$$

Коммутативность умножения вытекает из коммутативности умножения чисел и того факта, что в определении произведения многочленов коэффициенты обоих множителей $f(x)$ и $g(x)$ используются совершенно равноправным образом. Ассоциативность умножения доказывается следующим образом: если, помимо записанных выше многочленов $f(x)$ и $g(x)$, дан еще многочлен

$$h(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{t-1}x^{t-1} + c_t x^t, \quad c_t \neq 0,$$

то коэффициентом при x^i, $i = 0, 1, \ldots, n+s+t$ в произведении $[f(x)g(x)]h(x)$ будет служить число

$$\sum_{j+m=i}\left(\sum_{k+l=j} a_k b_l\right) c_m = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m,$$

а в произведении $f(x)[g(x)h(x)]$ — равное ему число

$$\sum_{k+j=i} a_k \left(\sum_{l+m=j} b_l c_m\right) = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m.$$

Наконец, справедливость закона дистрибутивности вытекает из равенства

$$\sum_{k+l=i} (a_k + b_k) c_l = \sum_{k+l=i} a_k c_l + \sum_{k+l=i} b_k c_l,$$

так как левая часть этого равенства является коэффициентом при x^i в многочлене $[f(x)+g(x)]h(x)$, а правая часть — коэффициентом при той же степени неизвестного в многочлене $f(x)h(x)+g(x)h(x)$.

Заметим, что роль единицы при умножении многочленов играет число 1, рассматриваемое как многочлен нулевой степени. С другой стороны, *многочлен $f(x)$ тогда и только тогда обладает обратным многочленом $f^{-1}(x)$,*

$$f(x)f^{-1}(x) = 1, \tag{5}$$

если $f(x)$ является многочленом нулевой степени. Действительно, если $f(x)$ является отличным от нуля числом a, то обратным многочленом служит для него число a^{-1}. Если же $f(x)$ имеет степень $n \geqslant 1$, то степень левой части равенства (5), если бы многочлен $f^{-1}(x)$ существовал, была бы не меньше n, в то время как справа стоит многочлен нулевой степени.

Отсюда вытекает, что *для умножения многочленов обратная операция — деление — не существует.* В этом отношении система всех многочленов с комплексными коэффициентами напоминает систему всех целых чисел. Эта аналогия проявляется и в том, что для

многочленов, как и для целых чисел, существует алгоритм деления с остатком. Этот алгоритм для случая многочленов с действительными коэффициентами известен читателю еще из элементарной алгебры. Так как, однако, мы рассматриваем теперь случай многочленов с комплексными коэффициентами, следует еще раз дать все относящиеся сюда формулировки и привести доказательства.

Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что

$$f(x)=g(x)\,q(x)+r(x), \tag{6}$$

причем степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$ или же $r(x)=0$. Многочлены $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющие этому условию, определяются однозначно.

Докажем сперва вторую половину теоремы. Пусть существуют еще многочлены $\overline{q}(x)$ и $\overline{r}(x)$, также удовлетворяющие равенству

$$f(x)=g(x)\,\overline{q}(x)+\overline{r}(x), \tag{7}$$

причем степень $\overline{r}(x)$ снова меньше степени $g(x)$ [1]). Приравнивая друг другу правые части равенств (6) и (7), получим:

$$g(x)\,[q(x)-\overline{q}(x)]=\overline{r}(x)-r(x).$$

Степень правой части этого равенства меньше степени $g(x)$, степень же левой части была бы при $q(x)-\overline{q}(x)\neq 0$ больше или равна степени $g(x)$. Поэтому должно быть $q(x)-\overline{q}(x)=0$, т. е. $q(x)=\overline{q}(x)$, а тогда и $r(x)=\overline{r}(x)$, что и требовалось доказать.

Переходим к доказательству первой половины теоремы. Пусть многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют соответственно степени n и s. Если $n<s$, то можно положить $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$. Если же $n\geqslant s$, то воспользуемся тем же методом, каким в элементарной алгебре производилось деление многочленов с действительными коэффициентами, расположенных по убывающим степеням неизвестного. Пусть

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-1}x+a_n, \qquad a_0\neq 0,$$
$$g(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ \ldots\ +b_{s-1}x+b_s, \qquad b_0\neq 0.$$

Полагая

$$f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}g(x)=f_1(x), \tag{8}$$

мы получим многочлен, степень которого меньше n. Обозначим эту степень через n_1, а старший коэффициент многочлена $f_1(x)$ — через a_{10}. Положим, далее, если все еще $n_1\geqslant s$,

$$f_1(x)-\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}g(x)=f_2(x), \tag{8_1}$$

---

[1]) Или же $\overline{r}(x)=0$. В дальнейшем этот случай не будет оговариваться.

обозначим через n_2 — степень, а через a_{20} — старший коэффициент многочлена $f_2(x)$, положим затем

$$f_2(x) - \frac{a_{20}}{b_0} x^{n_2 - s} g(x) = f_3(x), \tag{8_2}$$

и т. д.

Так как степени многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... убывают, $n > n_1 > n_2 > \ldots$, то мы дойдем после конечного числа шагов до такого многочлена $f_k(x)$,

$$f_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1} - s} g(x) = f_k(x), \tag{8_{k-1}}$$

степень которого n_k меньше s, после чего наш процесс останавливается. Складывая теперь равенства (8), (8_1), ..., (8_{k-1}), мы получим:

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1 - s} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1} - s}\right) g(x) = f_k(x),$$

т. е. многочлены

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1 - s} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1} - s},$$
$$r(x) = f_k(x)$$

действительно удовлетворяют равенству (6), причем степень $r(x)$ на самом деле меньше степени $g(x)$.

Заметим, что многочлен $q(x)$ называется *частным* от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ — *остатком* от этого деления.

Из рассмотрения алгоритма деления с остатком легко устанавливается, что если $f(x)$ и $g(x)$ *являются многочленами с действительными коэффициентами, то коэффициенты всех многочленов* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., *а поэтому и коэффициенты частного* $q(x)$ *и остатка* $r(x)$ *будут действительными.*

§ 21. Делители. Наибольший общий делитель

Пусть даны ненулевые многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ с комплексными коэффициентами. Если остаток от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ равен нулю, т. е., как говорят, $f(x)$ *делится* (или *нацело делится*) на $\varphi(x)$, то многочлен $\varphi(x)$ называется *делителем* многочлена $f(x)$.

Многочлен $\varphi(x)$ *тогда и только тогда будет делителем многочлена* $f(x)$, *если существует многочлен* $\psi(x)$, *удовлетворяющий равенству*

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x). \tag{1}$$

В самом деле, если $\varphi(x)$ является делителем для $f(x)$, то в качестве $\psi(x)$ следует взять частное от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$. Обратно, пусть многочлен $\psi(x)$, удовлетворяющий равенству (1), существует.