обозначим через n_2 — степень, а через a_{20} — старший коэффициент многочлена $f_2(x)$, положим затем

$$f_2(x) - \frac{a_{20}}{b_0} x^{n_2 - s} g(x) = f_3(x), \tag{8_2}$$

и т. д.

Так как степени многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... убывают, $n > n_1 > n_2 > \ldots$, то мы дойдем после конечного числа шагов до такого многочлена $f_k(x)$,

$$f_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1} - s} g(x) = f_k(x), \tag{8_{k-1}}$$

степень которого n_k меньше s, после чего наш процесс останавливается. Складывая теперь равенства (8), (8_1), ..., (8_{k-1}), мы получим:

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1 - s} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1} - s}\right) g(x) = f_k(x),$$

т. е. многочлены

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1 - s} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1} - s},$$
$$r(x) = f_k(x)$$

действительно удовлетворяют равенству (6), причем степень $r(x)$ на самом деле меньше степени $g(x)$.

Заметим, что многочлен $q(x)$ называется *частным* от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ — *остатком* от этого деления.

Из рассмотрения алгоритма деления с остатком легко устанавливается, что если $f(x)$ и $g(x)$ *являются многочленами с действительными коэффициентами, то коэффициенты всех многочленов* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., *а поэтому и коэффициенты частного* $q(x)$ *и остатка* $r(x)$ *будут действительными.*

§ 21. Делители. Наибольший общий делитель

Пусть даны ненулевые многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ с комплексными коэффициентами. Если остаток от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ равен нулю, т. е., как говорят, $f(x)$ *делится* (или *нацело делится*) на $\varphi(x)$, то многочлен $\varphi(x)$ называется *делителем* многочлена $f(x)$.

Многочлен $\varphi(x)$ *тогда и только тогда будет делителем многочлена* $f(x)$, *если существует многочлен* $\psi(x)$, *удовлетворяющий равенству*

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x). \tag{1}$$

В самом деле, если $\varphi(x)$ является делителем для $f(x)$, то в качестве $\psi(x)$ следует взять частное от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$. Обратно, пусть многочлен $\psi(x)$, удовлетворяющий равенству (1), существует.

Из доказанной в предшествующем параграфе единственности многочленов $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющих равенству

$$f(x)=\varphi(x)\,q(x)+r(x)$$

и условию, что степень $r(x)$ меньше степени $\varphi(x)$, в нашем случае следует, что частное от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ равно $\psi(x)$, а остаток равен нулю.

Понятно, что если равенство (1) имеет место, то $\psi(x)$ также будет делителем для $f(x)$. Очевидно, далее, что степень $\varphi(x)$ не больше степени $f(x)$.

Заметим, что если многочлен $f(x)$ и его делитель $\varphi(x)$ имеют оба рациональные или действительные коэффициенты, то и многочлен $\psi(x)$ также будет иметь рациональные, или, соответственно, действительные коэффициенты, так как он разыскивается при помощи алгоритма деления. Конечно, многочлен с рациональными или действительными коэффициентами может обладать и такими делителями, не все коэффициенты которых рациональны или, соответственно, действительны. Это показывает, например, равенство

$$x^2+1=(x-i)(x+i).$$

Укажем некоторые основные свойства делимости многочленов, которые найдут в дальнейшем многочисленные применения.

I. *Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ будет делиться на $h(x)$.*

В самом деле, по условию $f(x)=g(x)\varphi(x)$ и $g(x)=h(x)\psi(x)$, а поэтому $f(x)=h(x)[\psi(x)\varphi(x)]$.

II. *Если $f(x)$ и $g(x)$ делятся на $\varphi(x)$, то их сумма и разность также делятся на $\varphi(x)$.*

Действительно, из равенств $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ и $g(x)=\varphi(x)\chi(x)$ вытекает $f(x)\pm g(x)=\varphi(x)[\psi(x)\pm\chi(x)]$.

III. *Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то произведение $f(x)$ на любой многочлен $g(x)$ также будет делиться на $\varphi(x)$.*

Действительно, если $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, то $f(x)g(x)=\varphi(x)[\psi(x)g(x)]$.

Из II и III вытекает следующее свойство:

IV. *Если каждый из многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ делится на $\varphi(x)$, то на $\varphi(x)$ будет делиться и многочлен*

$$f_1(x)\,g_1(x)+f_2(x)\,g_2(x)+\ \dots\ +f_k(x)\,g_k(x),$$

где $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_k(x)$ — произвольные многочлены.

V. *Всякий многочлен $f(x)$ делится на любой многочлен нулевой степени.*

Действительно, если $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n$, а c — произвольное число, не равное нулю, т. е. произвольный многочлен нулевой степени, то

$$f(x)=c\left(\frac{a_0}{c}x^n+\frac{a_1}{c}x^{n-1}+\ \dots\ +\frac{a_n}{c}\right).$$

VI. *Если $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, то $f(x)$ делится и на $c\varphi(x)$, где c — произвольное число, отличное от нуля.*

В самом деле, из равенства $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ следует равенство $f(x)=[c\varphi(x)]\cdot[c^{-1}\psi(x)]$.

VII. *Многочлены $cf(x)$, $c\neq 0$, и только они будут делителями многочлена $f(x)$, имеющими такую же степень, что и $f(x)$.*

Действительно, $f(x)=c^{-1}[cf(x)]$, т. е. $f(x)$ делится на $cf(x)$.

Если, с другой стороны, $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, причем степени $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают, то степень частного от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ должна быть равной нулю, т. е. $f(x)=d\varphi(x)$, $d\neq 0$, откуда $\varphi(x)=d^{-1}f(x)$.

Отсюда вытекает следующее свойство:

VIII. *Тогда и только тогда многочлены $f(x)$, $g(x)$ одновременно делятся друг на друга, если $g(x)=cf(x)$, $c\neq 0$.*

Наконец, из VIII и I вытекает свойство

IX. *Всякий делитель одного из двух многочленов $f(x)$, $cf(x)$, где $c\neq 0$, будет делителем и для другого многочлена.*

Наибольший общий делитель. Пусть даны произвольные многочлены $f(x)$ и $g(x)$. Многочлен $\varphi(x)$ будет называться *общим делителем* для $f(x)$ и $g(x)$, если он служит делителем для каждого из этих многочленов. Свойство V (см. выше) показывает, что к числу общих делителей многочленов $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат все многочлены нулевой степени. Если других общих делителей эти два многочлена не имеют, то они называются *взаимно простыми*.

В общем же случае многочлены $f(x)$ и $g(x)$ могут обладать делителями, зависящими от x, и мы хотим ввести понятие о *наибольшем* общем делителе этих многочленов.

Было бы неудобным принять такое определение, по которому наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ есть их общий делитель наибольшей степени. С одной стороны, мы не знаем пока, не будут ли $f(x)$ и $g(x)$ обладать многими различными общими делителями наибольшей степени, отличающимися друг от друга не только на множитель нулевой степени, т. е. не содержит ли это определение слишком большой неопределенности. С другой стороны, читатель уже встречался в элементарной арифметике с задачей разыскания наибольшего общего делителя целых чисел и знает, что наибольший общий делитель 6 целых чисел 12 и 18 не только является наибольшим среди общих делителей этих чисел, но даже делится на любой другой их общий делитель; действительно, другими общими делителями чисел 12 и 18 будут числа 1, 2, 3, —1, —2, —3, —6.

Мы примем поэтому для случая многочленов такое определение:

Наибольшим общим делителем отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется такой многочлен $d(x)$, который является их общим делителем и, вместе с тем, сам делится на любой другой общий делитель этих многочленов. Обозначается наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ символом $(f(x), g(x))$.

Это определение оставляет открытым вопрос, существует ли наибольший общий делитель для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Сейчас на этот вопрос будет дан положительный ответ. Одновременно будет дан метод для практического разыскания наибольшего общего делителя данных многочленов. Понятно, что мы не можем перенести сюда тот способ, каким обычно разыскивается наибольший общий делитель целых чисел, так как пока не имеем для многочленов ничего аналогичного разложению целого числа в произведение простых множителей. Для целых чисел существует, однако, и другой способ, называемый *алгоритмом последовательного деления* или *алгоритмом Евклида*; этот способ вполне применим и к многочленам.

Алгоритм Евклида для многочленов состоит в следующем. Пусть даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$. Делим $f(x)$ на $g(x)$ и получаем, вообще говоря, некоторый остаток $r_1(x)$. Делим затем $g(x)$ на $r_1(x)$ и получаем остаток $r_2(x)$, делим $r_1(x)$ на $r_2(x)$ и и т. д. Так как степени остатков все время понижаются, то в этой цепочке последовательных делений мы должны дойти до такого места, на котором деление совершится нацело и поэтому процесс остановится. *Тот остаток $r_k(x)$, на который нацело делится предыдущий остаток $r_{k-1}(x)$, и будет наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $g(x)$.*

Для доказательства запишем изложенное в предыдущем абзаце в виде следующей цепочки равенств:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\,q_1(x) + r_1(x),\\
g(x) &= r_1(x)\,q_2(x) + r_2(x),\\
r_1(x) &= r_2(x)\,q_3(x) + r_3(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{k-3}(x) &= r_{k-2}(x)\,q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x),\\
r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)\,q_k(x) + r_k(x),\\
r_{k-1}(x) &= r_k(x)\,q_{k+1}(x).
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Последнее равенство показывает, что $r_k(x)$ служит делителем для $r_{k-1}(x)$. Отсюда следует, что оба слагаемых правой части предпоследнего равенства делятся на $r_k(x)$, а поэтому $r_k(x)$ будет делителем и для $r_{k-2}(x)$. Далее, таким же путем, поднимаясь вверх, мы получим, что $r_k(x)$ является делителем и для $r_{k-3}(x)$, ..., $r_2(x)$, $r_1(x)$. Отсюда, ввиду второго равенства, будет следовать, что $r_k(x)$ служит делителем для $g(x)$, а поэтому, на основании первого равенства, — и для $f(x)$. Таким образом, $r_k(x)$ является общим делителем для $f(x)$ и $g(x)$.

Возьмем теперь произвольный общий делитель $\varphi(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Так как левая часть и первое слагаемое правой части первого из равенств (2) делятся на $\varphi(x)$, то $r_1(x)$ также будет делиться на $\varphi(x)$. Переходя ко второму и следующему равенствам,

мы таким же способом получим, что на $\varphi(x)$ делятся многочлены $r_2(x)$, $r_3(x)$, ... Наконец, если уже будет доказано, что $r_{k-2}(x)$ и $r_{k-1}(x)$ делятся на $\varphi(x)$, то из предпоследнего равенства мы получим, что $r_k(x)$ делится на $\varphi(x)$. Таким образом, $r_k(x)$ на самом деле будет наибольшим общим делителем для $f(x)$ и $g(x)$.

Мы доказали, следовательно, что любые два многочлена обладают наибольшим общим делителем, и получили способ для его вычисления. Этот способ показывает, что *если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют оба рациональные или действительные коэффициенты, то и коэффициенты их наибольшего общего делителя также будут рациональными или, соответственно, действительными,* хотя, конечно, у этих многочленов могут существовать и такие делители, не все коэффициенты которых рациональны (действительны). Так, многочлены с рациональными коэффициентами

$$f(x)=x^3-3x^2-2x+6, \quad g(x)=x^3+x^2-2x-2$$

имеют наибольшим общим делителем многочлен с рациональными коэффициентами x^2-2, хотя у них есть общий делитель $x-\sqrt{2}$, не все коэффициенты которого рациональны.

Если $d(x)$ есть наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то, как показывают свойства VIII и IX (см. выше), в качестве наибольшего общего делителя этих многочленов можно было бы выбрать также многочлен $cd(x)$, где c — произвольное число, отличное от нуля. Иными словами, *наибольший общий делитель двух многочленов определен лишь с точностью до множителя нулевой степени.* Ввиду этого можно условиться, что старший коэффициент наибольшего общего делителя двух многочленов будет всегда считаться равным единице. Используя это условие, можно сказать, что *два многочлена тогда и только тогда взаимно просты, если их наибольший общий делитель равен единице.* В самом деле, в качестве наибольшего общего делителя двух взаимно простых многочленов можно взять любое число, отличное от нуля, но, умножая его на обратный элемент, мы получим единицу.

Пример. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3, \quad g(x)=3x^3+10x^2+2x-3.$$

Применяя алгоритм Евклида к многочленам с целыми коэффициентами, мы можем, чтобы избежать дробных коэффициентов, умножить делимое или сократить делитель на любое не равное нулю число, причем не только начиная какое-либо из последовательных делений, но и в процессе самого этого деления. Это будет приводить, понятно, к искажению частного, но интересующие нас остатки будут приобретать лишь некоторый множитель нулевой степени, что, как мы знаем, при разыскании наибольшего общего делителя допускается.

Делим $f(x)$ на $g(x)$, предварительно умножив $f(x)$ на 3:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+9x^3-3x^2-12x-9 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\ \cline{2-2} 3x^4+10x^3+2x^2-3x & x+1 \\ \hline -x^3-5x^2-9x-9 & \end{array}$$

(умножаем на -3)

$$\begin{array}{r} 3x^3+15x^2+27x+27 \\ 3x^3+10x^2+2x-3 \\ \hline 5x^2+25x+30. \end{array}$$

Таким образом, первый остаток, после сокращения на 5, будет $r_1(x)=$ $=x^2+5x+6$. Делим на него многочлен $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+10x^2+2x-3 & x^2+5x+6 \\ \cline{2-2} 3x^3+15x^2+18x & 3x-5 \\ \hline -5x^2-16x-3 & \\ -5x^2-25x-30 & \\ \hline 9x+27. & \end{array}$$

Вторым остатком, после сокращения на 9, будет, следовательно, $r_2(x)=x+3$. Так как

$$r_1(x)=r_2(x)(x+2),$$

то $r_2(x)$ будет тем последним остатком, на который нацело делится предшествующий остаток. Он будет, таким образом, искомым наибольшим общим делителем:

$$(f(x),\ g(x))=x+3.$$

Используем алгоритм Евклида для доказательства следующей теоремы:

Если $d(x)$ есть наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то можно найти такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x). \tag{3}$$

Можно считать при этом, если степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ больше нуля, что степень $u(x)$ меньше степени $g(x)$, а степень $v(x)$ меньше степени $f(x)$.

Доказательство основано на равенствах (2). Если мы учтем, что $r_k(x)=d(x)$, и положим $u_1(x)=1$, $v_1(x)=-q_k(x)$, то предпоследнее из равенств (2) даст:

$$d(x)=r_{k-2}(x)u_1(x)+r_{k-1}(x)v_1(x).$$

Подставляя сюда выражение $r_{k-1}(x)$ через $r_{k-3}(x)$ и $r_{k-2}(x)$ из предшествующего равенства (2), мы получим:

$$d(x)=r_{k-3}(x)u_2(x)+r_{k-2}(x)v_2(x),$$

где, очевидно, $u_2(x)=v_1(x)$, $v_2(x)=u_1(x)-v_1(x)q_{k-1}(x)$. Продолжая подниматься вверх по равенствам (2), мы придем, наконец, к доказываемому равенству (3).

Для доказательства второго утверждения теоремы предположим, что многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству (3), уже

найдены, но, например, степень $u(x)$ больше или равна степени $g(x)$. Делим $u(x)$ на $g(x)$:

$$u(x) = g(x)\,q(x) + r(x),$$

где степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$, и подставляем это выражение в (3). Мы получим равенство

$$f(x)\,r(x) + g(x)\,[v(x) + f(x)\,q(x)] = d(x).$$

Степень множителя, стоящего при $f(x)$, уже меньше степени $g(x)$. Степень многочлена, стоящего в квадратных скобках, будет в свою очередь меньше степени $f(x)$, так как в противном случае степень второго слагаемого левой части была бы не меньше степени произведения $g(x)f(x)$, а так как степень первого слагаемого меньше степени этого произведения, то вся левая часть имела бы степень, бо́льшую или равную степени $g(x)f(x)$, тогда как многочлен $d(x)$ заведомо имеет, при наших предположениях, меньшую степень.

Теорема доказана. Одновременно мы получаем, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют рациональные или действительные коэффициенты, то и многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству (3), можно подобрать так, что их коэффициенты будут рациональными или, соответственно, действительными.

Пример. Найдем многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству (3) при

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 10,\quad g(x) = x^3 + 6x^2 - 9x - 14.$$

Применим к этим многочленам алгоритм Евклида, причем теперь при выполнении делений уже нельзя допускать искажения частных, так как эти частные используются при разыскании многочленов $u(x)$ и $v(x)$. Мы получим такую систему равенств:

$$f(x) = g(x) + (-7x^2 + 12x + 4);$$

$$g(x) = (-7x^2 + 12x + 4)\left(-\frac{1}{7}x - \frac{54}{49}\right) + \frac{235}{49}(x-2);$$

$$-7x^2 + 12x + 4 = (x-2)(-7x-2).$$

Отсюда следует, что $(f(x), g(x)) = x - 2$ и что

$$u(x) = \frac{7}{235}x + \frac{54}{235},\quad v(x) = -\frac{7}{235}x - \frac{5}{235}.$$

Применяя доказанную сейчас теорему к взаимно простым многочленам, мы получаем такой результат:

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда взаимно просты, если можно найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству

$$f(x)\,u(x) + g(x)\,v(x) = 1. \tag{4}$$

Опираясь на этот результат, можно доказать несколько простых, но важных теорем о взаимно простых многочленах:

а) *Если многочлен $f(x)$ взаимно прост с каждым из многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то он взаимно прост и с их произведением.*

В самом деле, существуют, по (4), такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)\,u(x)+\varphi(x)\,v(x)=1.$$

Умножая это равенство на $\psi(x)$, получаем:

$$f(x)\,[u(x)\,\psi(x)]+[\varphi(x)\,\psi(x)]\,v(x)=\psi(x),$$

откуда следует, что всякий общий делитель $f(x)$ и $\varphi(x)\,\psi(x)$ был бы делителем и для $\psi(x)$; однако по условию $(f(x),\ \psi(x))=1$.

б) *Если произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ делится на $\varphi(x)$, но $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно просты, то $g(x)$ делится на $\varphi(x)$.*

В самом деле, умножая равенство

$$f(x)\,u(x)+\varphi(x)\,v(x)=1$$

на $g(x)$, мы получим:

$$[f(x)\,g(x)]\,u(x)+\varphi(x)\,[v(x)\,g(x)]=g(x).$$

Оба слагаемых левой части этого равенства делятся на $\varphi(x)$; на него делится, следовательно, и $g(x)$.

в) *Если многочлен $f(x)$ делится на каждый из многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые между собой взаимно просты, то $f(x)$ делится и на их произведение.*

Действительно, $f(x)=\varphi(x)\,\overline{\varphi}(x)$, так что произведение, стоящее справа, делится на $\psi(x)$. Поэтому, по б), $\overline{\varphi}(x)$ делится на $\psi(x)$, $\overline{\varphi}(x)=\psi(x)\,\overline{\psi}(x)$, откуда $f(x)=[\varphi(x)\,\psi(x)]\,\overline{\psi}(x)$.

Определение наибольшего общего делителя может быть распространено на случай любой конечной системы многочленов: *наибольшим общим делителем* многочленов $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_s(x)$ называется такой общий делитель этих многочленов, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов. Существование наибольшего общего делителя для любой конечной системы многочленов вытекает из следующей теоремы, дающей также способ его вычисления.

Наибольший общий делитель многочленов $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_s(x)$ равен наибольшему общему делителю многочлена $f_s(x)$ и наибольшего общего делителя многочленов $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_{s-1}(x)$.

В самом деле, при $s=2$ теорема очевидна. Мы примем поэтому, что для случая $s-1$ она справедлива, т. е., в частности, уже доказано существование наибольшего общего делителя $d(x)$ многочленов $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_{s-1}(x)$. Обозначим через $\overline{d}(x)$ наибольший общий делитель многочленов $d(x)$ и $f_s(x)$. Он будет, очевидно, общим делителем для всех заданных многочленов. С другой стороны, всякий другой общий делитель этих многочленов будет делителем также и для $d(x)$, а поэтому и для $\overline{d}(x)$.

В частности, система многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ называется *взаимно простой*, если общими делителями этих многочленов являются лишь многочлены нулевой степени, т. е. если их наибольший общий делитель равен 1. Если $s > 2$, то попарно эти многочлены могут и не быть взаимно простыми. Так, система многочленов

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15, \quad g(x) = x^2 - x - 20,$$
$$h(x) = x^3 + x^2 - 12x$$

взаимно проста, хотя

$$(f(x),\ g(x)) = x - 5,\ (f(x),\ h(x)) = x - 3,\ (g(x),\ h(x)) = x + 4.$$

Читатель без труда получит обобщение доказанных выше теорем а) — в) о взаимно простых многочленах на случай любого конечного числа многочленов.

§ 22. Корни многочленов

Мы уже встречались в § 20 со значениями многочлена, когда говорили о теоретико-функциональной точке зрения на понятие многочлена. Напомним определение.

Если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

есть некоторый многочлен, а c — некоторое число, то число

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_n,$$

полученное заменой в выражении (1) для $f(x)$ неизвестного x числом c и последующим выполнением всех указанных операций, называется *значением многочлена* $f(x)$ *при* $x = c$. Понятно, что если $f(x) = g(x)$ в смысле алгебраического равенства многочленов, определенного в § 20, то $f(c) = g(c)$ при любом c.

Легко видеть также, что если

$$\varphi(x) = f(x) + g(x),\ \psi(x) = f(x)\,g(x),$$

то

$$\varphi(c) = f(c) + g(c),\ \psi(c) = f(c)\,g(c).$$

Иными словами, сложение и умножение многочленов, определенные в § 20, превращаются при теоретико-функциональной точке зрения на многочлены в сложение и умножение функций, понимаемые в смысле сложения или умножения соответственных значений этих функций.

Если $f(c) = 0$, т. е. многочлен $f(x)$ обращается в нуль при подстановке в него числа c вместо неизвестного, то c называется *корнем* многочлена $f(x)$ (или уравнения $f(x) = 0$). Сейчас будет показано, что это понятие целиком относится к той теории делимости многочленов, которая была предметом изучения в предшествующем параграфе.