

В частности, система многочленов  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$  называется *взаимно простой*, если общими делителями этих многочленов являются лишь многочлены нулевой степени, т. е. если их наибольший общий делитель равен 1. Если  $s > 2$ , то попарно эти многочлены могут и не быть взаимно простыми. Так, система многочленов

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 7x^2 + 7x + 15, & g(x) &= x^2 - x - 20, \\h(x) &= x^3 + x^2 - 12x\end{aligned}$$

взаимно проста, хотя

$$(f(x), g(x)) = x - 5, \quad (f(x), h(x)) = x - 3, \quad (g(x), h(x)) = x + 4.$$

Читатель без труда получит обобщение доказанных выше теорем а) — в) о взаимно простых многочленах на случай любого конечного числа многочленов.

## § 22. Корни многочленов

Мы уже встречались в § 20 со значениями многочлена, когда говорили о теоретико-функциональной точке зрения на понятие многочлена. Напомним определение.

Если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (1)$$

есть некоторый многочлен, а  $c$  — некоторое число, то число

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_n,$$

полученное заменой в выражении (1) для  $f(x)$  неизвестного  $x$  числом  $c$  и последующим выполнением всех указанных операций, называется *значением многочлена  $f(x)$  при  $x = c$* . Понятно, что если  $f(x) = g(x)$  в смысле алгебраического равенства многочленов, определенного в § 20, то  $f(c) = g(c)$  при любом  $c$ .

Легко видеть также, что если

$$\varphi(x) = f(x) + g(x), \quad \psi(x) = f(x)g(x),$$

то

$$\varphi(c) = f(c) + g(c), \quad \psi(c) = f(c)g(c).$$

Иными словами, сложение и умножение многочленов, определенные в § 20, превращаются при теоретико-функциональной точке зрения на многочлены в сложение и умножение функций, понимаемые в смысле сложения или умножения соответственных значений этих функций.

Если  $f(c) = 0$ , т. е. многочлен  $f(x)$  обращается в нуль при подстановке в него числа  $c$  вместо неизвестного, то  $c$  называется *корнем многочлена  $f(x)$*  (или *уравнения  $f(x) = 0$* ). Сейчас будет показано, что это понятие целиком относится к той теории делимости многочленов, которая была предметом изучения в предшествующем параграфе.

Если мы будем делить многочлен  $f(x)$  на произвольный многочлен первой степени (или, как будем говорить дальше, на *линейный многочлен*), то остаток будет либо некоторым многочленом нулевой степени, либо нулем, т. е. во всяком случае некоторым числом  $r$ . Следующая теорема позволяет найти этот остаток, не выполняя самого деления, в случае, когда производится деление на многочлен вида  $x - c$ .

*Остаток от деления многочлена  $f(x)$  на линейный многочлен  $x - c$  равен значению  $f(c)$  многочлена  $f(x)$  при  $x = c$ .*

Действительно, пусть

$$f(x) = (x - c) q(x) + r.$$

Беря значения обеих частей этого равенства при  $x = c$ , мы получаем:

$$f(c) = (c - c) q(c) + r = r,$$

что доказывает теорему.

Отсюда вытекает такое исключительно важное следствие:

*Число  $c$  тогда и только тогда будет корнем многочлена  $f(x)$ , если  $f(x)$  делится на  $x - c$ .*

С другой стороны, если  $f(x)$  делится на некоторый многочлен первой степени  $ax + b$ , то делится, очевидно, и на многочлен  $x - \left(-\frac{b}{a}\right)$ , т. е. на многочлен вида  $x - c$ . Таким образом, *разыскание корней многочлена  $f(x)$  равносильно разысканию его линейных делителей*.

Ввиду сказанного выше представляет интерес следующий метод деления многочлена  $f(x)$  на линейный двучлен  $x - c$ , более простой, чем общий алгоритм деления многочленов. Этот метод называется методом Горнера. Пусть

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \quad (2)$$

и пусть

$$f(x) = (x - c) q(x) + r, \quad (3)$$

где

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в (3), получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1 - cb_0, \\ a_2 &= b_2 - cb_1, \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= b_{n-1} - cb_{n-2}, \\ a_n &= r - cb_{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $b_0 = a_0$ ,  $b_k = cb_{k-1} + a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , т. е. коэффициент  $b_k$  получается умножением преды-

дущего коэффициента  $b_{k-1}$  на  $c$  и прибавлением соответствующего коэффициента  $a_k$ ; наконец,  $r = cb_{n-1} + a_n$ , т. е. и остаток  $r$ , равный, как мы знаем,  $f(c)$ , получается по этому же закону. Таким образом, коэффициенты частного и остаток можно последовательно получать при помощи однотипных вычислений, которые располагаются в схему, как показывают следующие примеры:

1. Разделить  $f(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$  на  $x - 3$ .

Составим таблицу, в которой над чертой расположены коэффициенты многочлена  $f(x)$ , под чертой — соответствующие коэффициенты частного и остаток, последовательно вычисляемые, а слева сбоку — значение  $c$  в данном примере:

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 3 & | 2,3 \cdot 2 - 1 = 5,3 \cdot 5 - 3 = 12,3 \cdot 12 + 0 = 36,3 \cdot 36 + 1 = 109,3 \cdot 109 - 3 = 324. \end{array}$$

Таким образом, искомое частное будет

$$q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109,$$

а остаток  $r = f(3) = 324$ .

2. Разделить  $f(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + 4x - 9$  на  $x + 1$ .

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & -8 & 1 & 4 & -9 \\ -1 & | 1 & -9 & 10 & -6 & -3. \end{array}$$

Поэтому частное будет

$$q(x) = x^3 - 9x^2 + 10x - 6,$$

а остаток  $r = f(-1) = -3$ .

Эти примеры показывают, что метод Горнера может быть использован также для быстрого вычисления значения многочлена при данном значении неизвестного.

**Кратные корни.** Если  $c$  — корень многочлена  $f(x)$ , т. е.  $f(c) = 0$ , то  $f(x)$  делится, как мы знаем, на  $x - c$ . Может оказаться, что многочлен  $f(x)$  делится не только на первую степень линейного двучлена  $x - c$ , но и на более высокие его степени. Во всяком случае найдется такое натуральное число  $k$ , что  $f(x)$  нацело делится на  $(x - c)^k$ , но не делится на  $(x - c)^{k+1}$ . Поэтому

$$f(x) = (x - c)^k \varphi(x),$$

где многочлен  $\varphi(x)$  на  $x - c$  уже не делится, т. е. число  $c$  своим корнем не имеет. Число  $k$  называется *кратностью* корня  $c$  в многочлене  $f(x)$ , а сам корень  $c$  — *k-кратным корнем* этого многочлена. Если  $k = 1$ , то говорят, что корень  $c$  — *простой*.

Понятие кратного корня тесно связано с понятием производной от многочлена. Мы изучаем, однако, многочлены с любыми комплексными коэффициентами и поэтому не можем просто воспользоваться понятием производной, введенным в курсе математического анализа. То, что будет сказано ниже, следует рассматривать как

независимое от курса анализа определение производной многочлена.

Пусть дан многочлен  $n$ -й степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

с любыми комплексными коэффициентами. Его *производной* (или *первой производной*) называется многочлен  $(n-1)$ -й степени

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Производная от многочлена нулевой степени и от нуля считается равной нулю. Производная от первой производной называется *второй производной* от многочлена  $f(x)$  и обозначается через  $f''(x)$  и т. д. Очевидно, что

$$f^{(n)}(x) = n!a_0$$

и поэтому  $f^{(n+1)}(x) = 0$ , т. е.  $(n+1)$ -я производная от многочлена  $n$ -й степени равна нулю.

Мы не можем пользоваться в нашем случае многочленов с комплексными коэффициентами свойствами производной, доказанными в курсе анализа для многочленов с действительными коэффициентами, и должны, используя лишь данное выше определение производной, снова эти свойства доказать. Нас интересуют следующие свойства, являющиеся, как говорят, формулами дифференцирования для суммы и произведения:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (4)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \quad (5)$$

Эти формулы легко проверить, впрочем, непосредственным подсчетом, беря в качестве  $f(x)$  и  $g(x)$  два произвольных многочлена и применяя данное выше определение производной; эту проверку мы предоставим читателю.

Формула (5) без труда распространяется на случай произведения любого конечного числа множителей, а поэтому обычным способом может быть выведена формула и для производной от степени:

$$(f^k(x))' = kf^{k-1}(x)f'(x). \quad (6)$$

Нашей целью является доказательство следующей теоремы:

*Если число  $c$  является  $k$ -кратным корнем многочлена  $f(x)$ , то при  $k > 1$  оно будет  $(k-1)$ -кратным корнем первой производной этого многочлена; если же  $k = 1$ , то  $c$  не будет служить корнем для  $f'(x)$ .*

В самом деле, пусть

$$f(x) = (x - c)^k \varphi(x), \quad k \geq 1, \quad (7)$$

где  $\varphi(x)$  уже не делится на  $x - c$ . Дифференцируя равенство (7), получаем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - c)^k \varphi'(x) + k(x - c)^{k-1} \varphi(x) = \\ &= (x - c)^{k-1} [(x - c) \varphi'(x) + k\varphi(x)]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое суммы, стоящей в квадратных скобках, делится на  $x - c$ , а второе на  $x - c$  не делится; поэтому вся эта сумма на  $x - c$  не может делиться. Учитывая, что частное от деления  $f(x)$  на  $(x - c)^{k-1}$  определено однозначно, мы получаем, что  $(x - c)^{k-1}$  является наибольшей степенью двучлена  $x - c$ , на которую делится многочлен  $f'(x)$ , что и требовалось доказать.

Применяя эту теорему несколько раз, мы получаем, что *k-кратный корень многочлена  $f(x)$  будет  $(k-s)$ -кратным в s-й производной этого многочлена ( $k \geq s$ ) и впервые не будет служить корнем для k-й производной от  $f(x)$ .*

### § 23. Основная теорема

Занимаясь в предшествующем параграфе корнями многочленов, мы не ставили вопроса о том, всякий ли многочлен обладает корнями. Известно, что существуют многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие действительных корней;  $x^2 + 1$  — один из таких многочленов. Можно было бы ожидать, что существуют многочлены, не имеющие корней даже среди комплексных чисел, особенно если рассматриваются многочлены с любыми комплексными коэффициентами. Если бы это было так, то система комплексных чисел нуждалась бы в дальнейшем расширении. На самом деле, однако, справедлива следующая основная теорема алгебры комплексных чисел:

*Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.*

Эта теорема является одним из крупнейших достижений всей математики и находит применения в самых различных областях науки. На ней основана, в частности, вся дальнейшая теория многочленов с числовыми коэффициентами, и потому эту теорему называли раньше (а иногда называют и теперь) «основной теоремой высшей алгебры». В действительности, однако, основная теорема не является чисто алгебраической. Все ее доказательства, — а их, после Гаусса, впервые доказавшего эту теорему в самом конце XVIII века, было найдено весьма много, — принуждены в большей или меньшей мере использовать так называемые топологические свойства действительных и комплексных чисел, т. е. свойства, связанные с непрерывностью.

В доказательстве, которое будет сейчас проведено, многочлен  $f(x)$  с комплексными коэффициентами будет рассматриваться как