

где $\varphi(x)$ уже не делится на $x - c$. Дифференцируя равенство (7), получаем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - c)^k \varphi'(x) + k(x - c)^{k-1} \varphi(x) = \\ &= (x - c)^{k-1} [(x - c) \varphi'(x) + k\varphi(x)]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое суммы, стоящей в квадратных скобках, делится на $x - c$, а второе на $x - c$ не делится; поэтому вся эта сумма на $x - c$ не может делиться. Учитывая, что частное от деления $f(x)$ на $(x - c)^{k-1}$ определено однозначно, мы получаем, что $(x - c)^{k-1}$ является наибольшей степенью двучлена $x - c$, на которую делится многочлен $f'(x)$, что и требовалось доказать.

Применяя эту теорему несколько раз, мы получаем, что *k-кратный корень многочлена $f(x)$ будет $(k-s)$ -кратным в s-й производной этого многочлена ($k \geq s$) и впервые не будет служить корнем для k-й производной от $f(x)$.*

§ 23. Основная теорема

Занимаясь в предшествующем параграфе корнями многочленов, мы не ставили вопроса о том, всякий ли многочлен обладает корнями. Известно, что существуют многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие действительных корней; $x^2 + 1$ — один из таких многочленов. Можно было бы ожидать, что существуют многочлены, не имеющие корней даже среди комплексных чисел, особенно если рассматриваются многочлены с любыми комплексными коэффициентами. Если бы это было так, то система комплексных чисел нуждалась бы в дальнейшем расширении. На самом деле, однако, справедлива следующая основная теорема алгебры комплексных чисел:

Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

Эта теорема является одним из крупнейших достижений всей математики и находит применения в самых различных областях науки. На ней основана, в частности, вся дальнейшая теория многочленов с числовыми коэффициентами, и потому эту теорему называли раньше (а иногда называют и теперь) «основной теоремой высшей алгебры». В действительности, однако, основная теорема не является чисто алгебраической. Все ее доказательства, — а их, после Гаусса, впервые доказавшего эту теорему в самом конце XVIII века, было найдено весьма много, — принуждены в большей или меньшей мере использовать так называемые топологические свойства действительных и комплексных чисел, т. е. свойства, связанные с непрерывностью.

В доказательстве, которое будет сейчас проведено, многочлен $f(x)$ с комплексными коэффициентами будет рассматриваться как

комплексная функция комплексного переменного x . Таким образом, x может принимать любые комплексные значения, т. е., как говорят, учитывая изложенный в § 17 способ построения комплексных чисел, переменное x изменяется на *комплексной плоскости*. Значения функции $f(x)$ также будут комплексными числами. Можно считать, что эти значения отмечаются на втором экземпляре комплексной плоскости, подобно тому как в случае действительных функций действительного переменного значения независимого переменного отмечаются на одной числовой прямой (оси абсцисс), а значения функции — на другой (оси ординат).

Определение непрерывной функции, известное читателю из курса математического анализа, переносится и на функции комплексного переменного, причем в формулировке определения абсолютные величины заменяются модулями.

Именно, комплексная функция $f(x)$ комплексного переменного x называется *непрерывной в точке x_0* , если для всякого положительного действительного числа ε можно подобрать такое положительное действительное число δ , что, каково бы ни было (вообще говоря, комплексное) приращение h , модуль которого удовлетворяет неравенству $|h| < \delta$, будет справедливым также неравенство

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной*, если она непрерывна во всех точках x_0 , в которых она определена, т. е. если $f(x)$ является многочленом, — на всей комплексной плоскости.

Многочлен $f(x)$ является непрерывной функцией комплексного переменного x .

Доказательство этой теоремы можно было бы провести так же, как это делается в курсе математического анализа, а именно, показав, что сумма и произведение непрерывных функций сами непрерывны, и заметив, что функция, постоянно равная одному и тому же комплексному числу, будет непрерывной. Мы пойдем, однако, иным путем.

Докажем сначала частный случай теоремы, а именно случай, когда свободный член многочлена $f(x)$ равен нулю, причем докажем лишь непрерывность $f(x)$ в точке $x_0 = 0$. Иными словами, мы докажем следующую лемму (вместо h мы пишем x):

Лемма 1. Если свободный член многочлена $f(x)$ равен нулю:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x,$$

т. е. $f(0) = 0$, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что при всех x , для которых $|x| < \delta$, будет $|f(x)| < \varepsilon$.

Действительно, пусть

$$A = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|).$$

Число ε нам уже дано. Покажем, что если за число δ взять

$$\delta = \frac{\varepsilon}{A + \varepsilon}, \quad (1)$$

то оно будет удовлетворять требуемым условиям.

В самом деле,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |a_0||x|^n + |a_1||x|^{n-1} + \dots + |a_{n-1}||x| \leq \\ &\leq A(|x|^n + |x|^{n-1} + \dots + |x|), \end{aligned}$$

т. е.

$$|f(x)| \leq A \frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|}.$$

Так как $|x| < \delta$ и, по (1), $\delta < 1$, то

$$\frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|} < \frac{|x|}{1 - |x|},$$

и поэтому

$$|f(x)| < \frac{A|x|}{1 - |x|} < \frac{A\delta}{1 - \delta} = \frac{A \frac{\varepsilon}{A + \varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{A + \varepsilon}} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Выведем теперь следующую формулу. Пусть дан многочлен

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

с любыми комплексными коэффициентами. Подставим в него вместо x сумму $x + h$, где h —второе неизвестное. Разлагая в правой части каждую из степеней $(x + h)^k$, $k \leq n$, по формуле бинома и собирая вместе члены с одинаковыми степенями h , мы получим, как читатель без труда проверит, равенство

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x),$$

т. е. докажем формулу Тэйлора, дающую разложение $f(x + h)$ по степеням «приращения» h .

Непрерывность произвольного многочлена $f(x)$ в любой точке x_0 доказывается теперь следующим образом. По формуле Тэйлора

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n = \varphi(h),$$

где

$$c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0), \quad \dots, \quad c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Многочлен $\varphi(h)$ от неизвестного h есть многочлен без свободного члена, поэтому, по лемме 1, для всякого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ будет $|\varphi(h)| < \varepsilon$, т. е.

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Из неравенства

$$||f(x_0 + h)| - |f(x_0)|| \leq |f(x_0 + h) - f(x_0)|,$$

основанного на формуле (13) § 18, и из доказанной сейчас непрерывности многочлена вытекает *непрерывность модуля* $|f(x)|$ многочлена $f(x)$; этот модуль является, очевидно, действительной неотрицательной функцией комплексного переменного x .

Сейчас будут доказаны леммы, используемые при доказательстве основной теоремы.

Лемма о модуле старшего члена. *Если дан многочлен n -й степени, $n \geq 1$,*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

с произвольными комплексными коэффициентами и если k — любое положительное действительное число, то для достаточно больших по модулю значений неизвестного x имеет место неравенство

$$|a_0x^n| > k |a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n|, \quad (2)$$

т. е. модуль старшего члена будет больше модуля суммы всех остальных членов, притом во сколько угодно раз.

В самом деле, пусть A — наибольший из модулей коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n :

$$A = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|).$$

Тогда (см. в § 18 свойства модулей суммы и произведения комплексных чисел)

$$\begin{aligned} |a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n| &\leq |a_1||x|^{n-1} + |a_2||x|^{n-2} + \dots \\ &\dots + |a_n| \leq A(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + 1) = A \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

Полагая $|x| > 1$, мы получим:

$$\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < \frac{|x|^n}{|x| - 1},$$

откуда

$$|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n| < A \frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Таким образом, неравенство (2) будет выполняться, если x удовлетворяет, помимо условия $|x| > 1$, также неравенству

$$kA \frac{|x|^n}{|x|-1} \leq |a_0 x^n| = |a_0| |x|^n,$$

т. е. если

$$|x| \geq \frac{kA}{|a_0|} + 1. \quad (3)$$

Так как правая часть неравенства (3) больше 1, то можно утверждать, что для значений x , удовлетворяющих этому неравенству, имеет место неравенство (2), что доказывает лемму.

Лемма о возрастании модуля многочлена. Для всякого многочлена $f(x)$ с комплексными коэффициентами, степень которого не меньше единицы, и всякого положительного действительного числа M , сколь угодно большого, можно подобрать такое положительное действительное число N , что при $|x| > N$ будет $|f(x)| > M$.

Пусть

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

По формуле (11) § 18

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |a_0 x^n + (a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)| \geq \\ &\geq |a_0 x^n| - |a_1 x^{n-1} + \dots + a_n|. \end{aligned} \quad (4)$$

Применим лемму о модуле старшего члена, положив $k = 2$: существует такое число N_1 , что при $|x| > N_1$ будет

$$|a_0 x^n| > 2 |a_1 x^{n-1} + \dots + a_n|.$$

Отсюда

$$|a_1 x^{n-1} + \dots + a_n| < \frac{1}{2} |a_0 x^n|,$$

т. е., по (4),

$$|f(x)| > |a_0 x^n| - \frac{1}{2} |a_0 x^n| = \frac{1}{2} |a_0 x^n|.$$

Правая часть этого неравенства будет больше M при

$$|x| > N_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}.$$

Таким образом, при $|x| > N = \max(N_1, N_2)$ будет $|f(x)| > M$.

Смысл этой леммы может быть выяснен при помощи следующей геометрической иллюстрации, которая в настоящем параграфе будет неоднократно использоваться. Предположим, что в каждой точке x_0 комплексной плоскости к этой плоскости восставлен перпендикуляр, длина которого (при заданной единице масштаба) равна модулю значения многочлена $f(x)$ в этой точке, т. е. равна $|f(x_0)|$. Концы перпендикуляров будут составлять ввиду доказанной выше

непрерывности модуля многочлена некоторую непрерывную кривую поверхность, расположенную над комплексной плоскостью. Лемма о возрастании модуля многочлена показывает, что эта поверхность при возрастании $|x_0|$ все больше и больше удаляется от комплексной

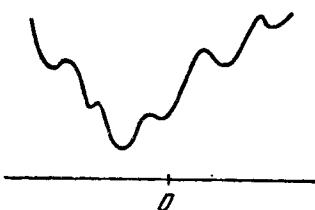


Рис. 8.

плоскости, хотя, понятно, это удаление вовсе не является монотонным. Рис. 8 схематически изображает линию пересечения этой поверхности с плоскостью, перпендикулярной к комплексной плоскости и проходящей через точку O .

Основную роль в доказательстве играет следующая лемма:

Лемма Даламбера. *Если при $x = x_0$ многочлен $f(x)$ степени n , $n \geq 1$, не обращается в нуль, $f(x_0) \neq 0$ и поэтому $|f(x_0)| > 0$, то можно найти такое приращение h , в общем случае комплексное, что*

$$|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|.$$

По формуле Тэйлора, если приращение h пока произвольно, будет

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

По условию, x_0 не является корнем для $f(x)$. Случайно, однако, это число может оказаться корнем для $f'(x)$, а также, быть может, для некоторых из дальнейших производных. Пусть k -я производная ($k \geq 1$) будет первой, не имеющей x_0 своим корнем, т. е.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Такое k существует, так как, если a_0 есть старший коэффициент многочлена $f(x)$, то

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_0 \neq 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \\ + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Некоторые из чисел $f^{(k+1)}(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)$ также могут равняться нулю, но это для нас несущественно.

Деля обе части этого равенства на $f(x_0)$, отличное, по условию, от нуля, и вводя обозначение

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j! f(x_0)}, \quad j = k, k+1, \dots, n,$$

мы получим:

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = 1 + c_k h^k + c_{k+1} h^{k+1} + \dots + c_n h^n$$

или, ввиду $c_k \neq 0$,

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = (1 + c_k h^k) + c_k h^k \left(\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right).$$

Переходя к модулям, получим:

$$\left| \frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} \right| \leqslant |1 + c_k h^k| + |c_k h^k| \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right|. \quad (5)$$

До этого момента мы не делали никаких предположений о приращении h . Теперь мы будем выбирать h , причем будем отдельно выбирать его модуль и его аргумент. Модуль h будет выбираться следующим образом. Так как

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k}$$

является многочленом от h без свободного члена, то, по лемме 1 (полагая $\varepsilon = \frac{1}{2}$), можно найти такое δ_1 , что при $|h| < \delta_1$ будет

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right| < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

С другой стороны, при

$$|h| < \delta_2 = \sqrt[k]{|c_k|^{-1}}$$

будет

$$|c_k h^k| < 1. \quad (7)$$

Положим, что модуль h выбран в соответствии с неравенством

$$|h| < \min(\delta_1, \delta_2). \quad (8)$$

Тогда, ввиду (6), неравенство (5) превращается в строгое неравенство

$$\left| \frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} \right| < |1 + c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k|; \quad (9)$$

условием (7) мы воспользуемся лишь позже.

Для выбора аргумента h потребуем, чтобы число $c_k h^k$ было отрицательным действительным числом. Иными словами,

$$\arg(c_k h^k) = \arg c_k + k \arg h = \pi,$$

откуда

$$\arg h = \frac{\pi - \arg c_k}{k}. \quad (10)$$

При этом выборе h число $c_k h^k$ будет отличаться знаком от своей абсолютной величины,

$$c_k h^k = -|c_k h^k|,$$

а поэтому, используя неравенство (7),

$$|1 + c_k h^k| = |1 - |c_k h^k|| = 1 - |c_k h^k|.$$

Таким образом, при выборе h на основании условий (8) и (10) неравенство (9) принимает вид

$$\left| \frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} \right| < 1 - |c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k| = 1 - \frac{1}{2} |c_k h^k|,$$

т. е. тем более

$$\left| \frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} \right| = \frac{|f(x_0+h)|}{|f(x_0)|} < 1,$$

откуда следует

$$|f(x_0+h)| < |f(x_0)|,$$

что доказывает лемму Даламбера.

При помощи той геометрической иллюстрации, которая была дана выше, можно следующим образом пояснить лемму Даламбера. Дано, что $|f(x_0)| > 0$. Это значит, что длина перпендикуляра, составленного к комплексной плоскости в точке x_0 , отлична от нуля. Тогда, по лемме Даламбера, можно найти такую точку $x_1 = x_0 + h$, что $|f(x_1)| < |f(x_0)|$, т. е. перпендикуляр в точке x_1 будет более коротким, чем в точке x_0 , и, следовательно, поверхность, образованная концами перпендикуляров, будет в этой новой точке несколько ближе к комплексной плоскости. Как показывает доказательство леммы, модуль h можно считать сколь угодно малым, т. е. точку x_1 можно выбрать как угодно близко к точке x_0 ; мы не будем, однако, пользоваться в дальнейшем этим замечанием.

Корнями многочлена $f(x)$ будут служить, очевидно, те комплексные числа (т. е. те точки комплексной плоскости), в которых поверхность, образованная концами перпендикуляров, коснется этой плоскости. Опираясь лишь на лемму Даламбера, нельзя доказать существование таких точек. В самом деле, пользуясь этой леммой, можно найти такую бесконечную последовательность точек x_0, x_1, x_2, \dots , что

$$|f(x_0)| > |f(x_1)| > |f(x_2)| > \dots, \quad (11)$$

Отсюда не следует, однако, существование такой точки \bar{x} , что $f(\bar{x}) = 0$, тем более, что убывающая последовательность положительных действительных чисел (11) вовсе не обязана стремиться к нулю.

Дальнейшие рассмотрения будут основаны на одной теореме из теории функций комплексного переменного, обобщающей теорему Вейерштрасса, известную читателю из курса математического анализа. Она относится к действительным функциям комплексного перемен-

ного, т. е. к функциям комплексного переменного, принимающим лишь действительные значения; примером таких функций служит модуль многочлена. В формулировке этой теоремы мы будем говорить для простоты *о замкнутом круге* E , понимая под этим круг на комплексной плоскости, к которому присоединены все точки его границы.

Если действительная функция $g(x)$ комплексного переменного x непрерывна во всех точках замкнутого круга E , то существует в круге E такая точка x_0 , что для всех x из E имеет место неравенство $g(x) \geq g(x_0)$. Точка x_0 является, следовательно, точкой минимума для $g(x)$ в круге E .

Доказательство этой теоремы можно найти во всех курсах теории функций комплексного переменного, и мы его не приводим.

Ограничиваюсь случаем, когда функция $g(x)$ неотрицательна во всех точках круга E , — только этот случай представляет для нас интерес, — поясним геометрически эту теорему при помощи той иллюстрации, которая уже использована выше. В каждой точке x_0 круга E проводим перпендикуляр длины $g(x_0)$. Концы этих перпендикуляров составляют кусок непрерывной кривой поверхности, причем благодаря замкнутости круга E существование точек минимума для этого куска поверхности делается геометрически достаточно ясным. Эта иллюстрация не заменяет, конечно, доказательства теоремы.

Теперь мы можем перейти к непосредственному доказательству основной теоремы. Пусть дан многочлен $f(x)$ степени n , $n \geq 1$. Если его свободный член есть a_n , то, очевидно, $f(0) = a_n$. Применим к нашему многочлену лемму о возрастании модуля многочлена, полагая $M = |f(0)| = |a_n|$. Существует, следовательно, такое N , что при $|x| > N$ будет $|f(x)| > |f(0)|$. Очевидно, далее, что указанное выше обобщение теоремы Вейерштрасса применимо к функции $|f(x)|$ при любом выборе замкнутого круга E . В качестве E мы возьмем замкнутый круг, ограниченный окружностью радиуса N с центром в точке 0. Пусть точка x_0 будет точкой минимума для $|f(x)|$ в круге E , откуда, в частности, следует $|f(x_0)| \leq |f(0)|$.

Легко видеть, что x_0 на самом деле будет служить точкой минимума для $|f(x)|$ на всей комплексной плоскости: если точка x' лежит вне E , то $|x'| > N$, и поэтому

$$|f(x')| > |f(0)| \geq |f(x_0)|.$$

Отсюда следует, наконец, что $f(x_0) = 0$, т. е. что x_0 служит корнем для $f(x)$; если бы было $f(x_0) \neq 0$, то, по лемме Даламбера, существовала бы такая точка x_1 , что $|f(x_1)| < |f(x_0)|$; это противоречит, однако, только что установленному свойству точки x_0 .

Заметим, что еще одно доказательство основной теоремы будет приведено в § 55.