§ 24. Следствия из основной теоремы

Пусть дан многочлен n-й степени, $n \geqslant 1$,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

с любыми комплексными коэффициентами. Мы снова рассматриваем его как формально-алгебраическое выражение, вполне определяемое набором своих коэффициентов. Основная теорема о существовании корня, доказанная в предшествующем параграфе, позволяет утверждать существование для $f(x)$ корня α_1, комплексного или действительного. Поэтому многочлен $f(x)$ обладает разложением

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,\varphi(x).$$

Коэффициенты многочлена $\varphi(x)$ снова являются действительными или комплексными числами, и поэтому $\varphi(x)$ обладает корнем α_2, откуда

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\,\psi(x).$$

Продолжая так далее, мы придем после конечного числа шагов к разложению многочлена n-й степени $f(x)$ в произведение n линейных множителей,

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ \ldots\ (x - \alpha_n). \tag{2}$$

Коэффициент a_0 появился по следующей причине: если бы справа в выражении (2) стоял некоторый коэффициент b, то после раскрытия скобок старший член многочлена $f(x)$ имел бы вид bx^n, хотя на самом деле, ввиду (1), им является член a_0x^n. Поэтому $b = a_0$.

Разложение (2) *является для многочлена* $f(x)$ *единственным с точностью до порядка сомножителей разложением такого типа.*

Пусть, в самом деле, имеется еще разложение

$$f(x) = a_0(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ \ldots\ (x - \beta_n). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует равенство

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ \ldots\ (x - \alpha_n) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ \ldots\ (x - \beta_n). \tag{4}$$

Если бы корень α_i был отличен от всех β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, то, подставляя α_i вместо неизвестного в (4), мы получили бы слева нуль, а справа число, отличное от нуля. Таким образом, *всякий корень* α_i *равен некоторому корню* β_j *и обратно.*

Отсюда еще не вытекает совпадение разложений (2) и (3). Действительно, среди корней α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, могут быть равные между собой. Пусть, например, s этих корней равны α_1 и пусть, с другой стороны, среди корней β_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, содержится t равных корню α_1. Нужно показать, что $s = t$.

Так как степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, то произведение двух многочленов, отличных от нуля, не может равняться нулю. Отсюда вытекает, что если два произведения многочленов равны друг другу, *то обе части равенства можно сократить на общий множитель*: если

$$f(x)\,\varphi(x)=g(x)\,\varphi(x)$$

и $\varphi(x)\neq 0$, то из

$$[f(x)-g(x)]\,\varphi(x)=0$$

следует

$$f(x)-g(x)=0,$$

т. е.

$$f(x)=g(x).$$

Применим это к равенству (4). Если, например, $s>t$, то, сокращая обе части равенства (4) на множитель $(x-\alpha_1)^t$, мы придем к равенству, левая часть которого еще содержит множитель $x-\alpha_1$, а правая его не содержит. Выше показано, однако, что это приводит к противоречию. Таким образом, единственность разложения (2) для многочлена $f(x)$ доказана.

Объединяя вместе одинаковые множители, разложение (2) можно переписать в виде

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ \ldots\ (x-\alpha_l)^{k_l}, \tag{5}$$

где

$$k_1+k_2+\ldots+k_l=n.$$

При этом предполагается, что среди корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ уже нет равных.

Докажем, что *число k_i из* (5), $i=1, 2, \ldots, l$, *является кратностью корня α_i в многочлене $f(x)$*. Действительно, если эта кратность равна s_i, то $k_i\leqslant s_i$. Пусть, однако, $k_i<s_i$. В силу определения кратности корня для $f(x)$ существует разложение

$$f(x)=(x-\alpha_i)^{s_i}\,\varphi(x).$$

Заменяя в этом разложении множитель $\varphi(x)$ его разложением на линейные множители, мы получили бы для $f(x)$ разложение на линейные множители, заведомо отличное от разложения (2), т. е. пришли бы к противоречию с доказанной выше единственностью этого разложения.

Мы доказали, таким образом, следующий важный результат:

Всякий многочлен $f(x)$ степени n, $n\geqslant 1$, с любыми числовыми коэффициентами имеет n корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

Заметим, что наша теорема справедлива и при $n=0$, так как многочлен нулевой степени не имеет, понятно, корней. Эта теорема неприменима лишь к многочлену 0, не имеющему степени и равному нулю при любом значении x. Этим последним замечанием мы воспользуемся при доказательстве следующей теоремы:

Если многочлены $f(x)$ и $g(x)$, степени которых не превосходят n, имеют равные значения более чем при n различных значениях неизвестного, то $f(x)=g(x)$.

Действительно, многочлен $f(x)-g(x)$ имеет при наших предположениях более чем n корней, а так как его степень не превосходит n, то должно иметь место равенство $f(x)-g(x)=0$.

Таким образом, учитывая, что различных чисел бесконечно много, можно утверждать, что *для любых двух различных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ найдутся такие значения с неизвестного x, что $f(c)\neq g(c)$.* Такие c можно найти не только среди комплексных чисел, но и среди действительных, среди рациональных и даже среди целых чисел.

Таким образом, два многочлена с числовыми коэффициентами, имеющие хотя бы при одной степени неизвестного x различные коэффициенты, будут различными комплексными функциями комплексного переменного x. Этим доказана, наконец, *равносильность для многочленов с числовыми коэффициентами двух указанных в § 20 определений равенства многочленов — алгебраического и теоретико-функционального.*

Теорема, доказанная выше, позволяет утверждать, что *многочлен, степень которого не больше n, вполне определяется своими значениями при любых различных значениях неизвестного, число которых больше n.* Можно ли эти значения многочлена задавать произвольно? Если предположить, что задаются значения многочлена при $n+1$ различных значениях неизвестного, то ответ будет положительным: *всегда существует многочлен не более чем n-й степени, принимающий наперед заданные значения при $n+1$ заданных различных значениях неизвестного.*

В самом деле, пусть нужно построить многочлен не более чем n-й степени, который при значениях неизвестного $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, предполагаемых различными, принимает соответственно значения $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Этим многочленом будет:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{c_i(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_{n+1})}. \qquad (6)$$

Действительно, его степень не больше n, а значение $f(a_i)$ равно c_i.

Формула (6) называется *интерполяционной формулой Лагранжа.* Название «интерполяционная» связано с тем, что по этой формуле, зная значения многочлена в $n+1$ точке, можно вычислять его значения во всех других точках.

Формулы Вьета. Пусть дан многочлен $f(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1,

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (7)$$

и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — его корни[1]). Тогда $f(x)$ обладает следующим разложением:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

Перемножая скобки, стоящие справа, а затем приводя подобные члены и сравнивая полученные коэффициенты с коэффициентами из (7), мы получим следующие равенства, называемые *формулами Вьета* и выражающие коэффициенты многочлена через его корни:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n),\\
a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n,\\
a_3 &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),\\
a_n &= (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.
\end{aligned}$$

Таким образом, в правой части k-го равенства, $k = 1, 2, \ldots, n$, стоит сумма всевозможных произведений по k корней, взятая со знаком плюс или минус, в зависимости от четности или нечетности k.

При $n = 2$ эти формулы превращаются в известную из элементарной алгебры связь между корнями и коэффициентами квадратного многочлена. При $n = 3$, т. е. для кубичного многочлена, эти формулы принимают вид

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \quad a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Формулы Вьета облегчают написание многочлена по заданным его корням. Так, найдем многочлен $f(x)$ четвертой степени, имеющий простыми корнями числа 5 и -2 и двукратным корнем число 3. Мы получим:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(5 - 2 + 3 + 3) = -9,\\
a_2 &= 5\cdot(-2) + 5\cdot 3 + 5\cdot 3 + (-2)\cdot 3 + (-2)\cdot 3 + 3\cdot 3 = 17,\\
a_3 &= -[5\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot 3\cdot 3 + (-2)\cdot 3\cdot 3] = 33,\\
a_4 &= 5\cdot(-2)\cdot 3\cdot 3 = -90,
\end{aligned}$$

а поэтому

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90.$$

Если старший коэффициент a_0 многочлена $f(x)$ отличен от 1, то для применения формул Вьета необходимо сначала разделить все коэффициенты на a_0, что не влияет на корни многочлена. Таким образом, в этом случае формулы Вьета дают выражение для отношений всех коэффициентов к старшему.

Многочлены с действительными коэффициентами. Сейчас будут выведены некоторые следствия из основной теоремы алгебры комплексных чисел, относящиеся к многочленам с действительными

---

[1]) Каждый кратный корень взят здесь соответствующее число раз.

коэффициентами. По существу, именно на этих следствиях основано то исключительно большое значение основной теоремы, о котором говорилось раньше.

Пусть многочлен с действительными коэффициентами

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

имеет комплексный корень α, т. е.

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Мы знаем, что последнее равенство не нарушится, если в нем все числа заменить на сопряженные. Однако все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n-1}, a_n$, а также число 0, стоящее справа, будучи действительными, останутся при этой замене без изменения, и мы приходим к равенству

$$a_0\overline{\alpha}^n + a_1\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n = 0,$$

т. е.

$$f(\overline{\alpha}) = 0.$$

Таким образом, *если комплексное (но не действительное) число α служит корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то корнем для $f(x)$ будет и сопряженное число $\overline{\alpha}$.*

Многочлен $f(x)$ будет делиться, следовательно, на квадратный трехчлен

$$\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}, \tag{8}$$

коэффициенты которого, как мы знаем из § 18, действительны. Пользуясь этим, докажем, что *корни α и $\overline{\alpha}$ имеют в многочлене $f(x)$ одну и ту же кратность.*

Пусть, в самом деле, эти корни имеют соответственно кратности k и l и пусть, например, $k > l$. Тогда $f(x)$ делится на l-ю степень многочлена $\varphi(x)$,

$$f(x) = \varphi^l(x)\,q(x).$$

Многочлен $q(x)$, как частное двух многочленов с действительными коэффициентами, также имеет действительные коэффициенты, но, в противоречие с доказанным выше, он имеет число α своим $(k-l)$-кратным корнем, тогда как число $\overline{\alpha}$ не является для него корнем. Отсюда следует, что $k = l$.

Таким образом, теперь можно сказать, что *комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены.* Отсюда и из доказанной выше единственности разложений вида (2) вытекает следующий окончательный результат:

Всякий многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами представим, притом единственным способом (с точностью до порядка множителей), в виде произведения своего старшего коэффициента a_0 и нескольких многочленов с действительными коэф-

фициентами, линейных вида $x-\alpha$, соответствующих его действительным корням, и квадратных вида (8), *соответствующих парам сопряженных комплексных корней.*

Для дальнейшего полезно подчеркнуть, что среди многочленов с действительными коэффициентами и со старшим коэффициентом 1, неразложимыми на множители меньшей степени или, как мы будем говорить, *неприводимыми*, являются лишь линейные многочлены вида $x-\alpha$ и квадратные многочлены вида (8).

§ 25*. Рациональные дроби

В курсе математического анализа изучаются, помимо целых рациональных функций, названных нами многочленами, также *дробно-рациональные функции*; это будут частные $\frac{f(x)}{g(x)}$ двух целых рациональных функций, где $g(x)\neq 0$. Над этими функциями производятся алгебраические операции по таким же законам, как над рациональными числами, т. е. как над дробями с целыми числителями и знаменателями. Равенство двух дробно-рациональных функций или, как мы будем дальше говорить, *рациональных дробей* также понимается в том же смысле, что и равенство дробей в элементарной арифметике. Для определенности мы будем рассматривать рациональные дроби с действительными коэффициентами; читатель без труда заметит, что все содержание настоящего параграфа может быть почти дословно перенесено на случай рациональных дробей с комплексными коэффициентами.

Рациональная дробь называется *несократимой*, если ее числитель взаимно прост со знаменателем.

Всякая рациональная дробь равна некоторой несократимой дроби, определяемой однозначно с точностью до множителя нулевой степени, общего для числителя и знаменателя.

Действительно, всякую рациональную дробь можно сократить на наибольший общий делитель ее числителя и знаменателя, после чего будет получена равная ей несократимая дробь. Если, далее, равны друг другу несократимые дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, т. е.

$$f(x)\,\psi(x)=g(x)\,\varphi(x), \tag{1}$$

то из взаимной простоты $f(x)$ и $g(x)$ следует, по свойству б) из § 21, что $\varphi(x)$ делится на $f(x)$, а из взаимной простоты $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует, что $f(x)$ делится на $\varphi(x)$. Таким образом, $f(x)=c\varphi(x)$, а тогда из (1) следует $g(x)=c\psi(x)$.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя. Если к числу правильных дробей мы условимся причислять многочлен 0, то справедлива следующая теорема: