любых невырожденных линейных преобразований, в то время как приведение кривой второго порядка к каноническому виду достигается применением линейных преобразований весьма специального вида (2), являющихся вращениями плоскости. Эта геометрическая теория может быть, однако, обобщена на случай квадратичных форм от n неизвестных с действительными коэффициентами. Изложение этого обобщения, называемого приведением квадратичных форм к главным осям, будет дано в гл. 8.

§ 27. Закон инерции

Канонический вид, к которому приводится данная квадратичная форма, вовсе не является для нее однозначно определенным: всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими различными способами. Так, рассмотренная в предшествующем параграфе квадратичная форма $f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1$ невырожденным линейным преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1+3t_2+2t_3, \\ x_2 &= t_1-t_2-2t_3, \\ x_3 &= \phantom{t_1+{}} t_2 \end{aligned}$$

приводится к каноническому виду

$$f=2t_1^2+6t_2^2-8t_3^2,$$

отличному от полученного ранее.

Возникает вопрос, что общего у тех различных канонических квадратичных форм, к которым приводится данная форма f? Этот вопрос тесно связан, как мы увидим, с таким вопросом: при каком условии одна из двух данных квадратичных форм может быть переведена в другую невырожденным линейным преобразованием? Ответ на эти вопросы зависит, однако, от того, рассматриваются ли комплексные или действительные квадратичные формы.

Предположим сначала, что рассматриваются произвольные комплексные квадратичные формы и, вместе с тем, допускается употребление невырожденных линейных преобразований также с произвольными комплексными коэффициентами. Мы знаем, что всякая квадратичная форма f от n неизвестных, имеющая ранг r, приводится к каноническому виду

$$f=c_1y_1^2+c_2y_2^2+\ldots+c_ry_r^2,$$

где все коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_r$ отличны от нуля. Пользуясь тем, что из всякого комплексного числа извлекается квадратный корень, выполним следующее невырожденное линейное преобразование:

$$z_i=\sqrt{c_i}\,y_i \quad \text{при} \quad i=1, 2, \ldots, r; \quad z_j=y_j \quad \text{при} \quad j=r+1, \ldots, n.$$

Оно приводит форму f к виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2, \tag{1}$$

называемому ***нормальным***; это — просто сумма квадратов r неизвестных с коэффициентами, равными единице.

Нормальный вид зависит лишь от ранга r формы f, т. е. все квадратичные формы ранга r приводятся к одному и тому же нормальному виду (1). Если, следовательно, формы f и g от n неизвестных имеют одинаковый ранг r, то можно перевести f в (1), а затем (1) в g, т. е. существует невырожденное линейное преобразование, переводящее f в g. Так как, с другой стороны, никакое невырожденное линейное преобразование не изменяет ранга формы, то мы приходим к следующему результату:

Две комплексные квадратичные формы от n неизвестных тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными линейными преобразованиями с комплексными коэффициентами, если эти формы имеют один и тот же ранг.

Из этой теоремы без труда вытекает, что ***каноническим видом комплексной квадратичной формы ранга r может служить всякая сумма квадратов r неизвестных с любыми отличными от нуля комплексными коэффициентами.***

Положение несколько более сложно в том случае, если рассматриваются действительные квадратичные формы и, что особенно важно, допускаются лишь линейные преобразования с действительными коэффициентами. В этом случае уже не всякую форму можно привести к виду (1), так как это могло бы потребовать извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Если, однако, мы назовем теперь ***нормальным видом*** квадратичной формы сумму квадратов нескольких неизвестных с коэффициентами $+1$ или -1, то легко показать, что ***всякую действительную квадратичную форму f можно привести невырожденным линейным преобразованием с действительными коэффициентами к нормальному виду.***

В самом деле, форма f ранга r от n неизвестных приводится к каноническому виду, который можно записать следующим образом (меняя, если нужно, нумерацию неизвестных):

$$f = c_1 y_1^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - c_r y_r^2, \quad 0 \leqslant k \leqslant r,$$

где все числа $c_1, \ldots, c_k; c_{k+1}, \ldots, c_r$ отличны от нуля и положительны. Тогда невырожденное линейное преобразование с действительными коэффициентами

$$z_i = \sqrt{c_i}\, y_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, r, \quad z_j = y_j \quad \text{при } j = r+1, \ldots, n,$$

приводит f к нормальному виду,

$$f = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

Общее число входящих сюда квадратов будет равно рангу формы.

Действительная квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду многими различными преобразованиями, однако с точностью до нумерации неизвестных она приводится лишь к одному нормальному виду. Это показывает следующая важная теорема, называемая *законом инерции действительных квадратичных форм*:

Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная квадратичная форма с действительными коэффициентами действительным невырожденным линейным преобразованием, не зависят от выбора этого преобразования.

Пусть, в самом деле, квадратичная форма f ранга r от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ двумя способами приведена к нормальному виду:

$$\begin{aligned} f &= y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = \\ &= z_1^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Так как переход от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к неизвестным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ был невырожденным линейным преобразованием, то, обратно, вторые неизвестные также будут линейно выражаться через первые с отличным от нуля определителем:

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Аналогично

$$z_j = \sum_{t=1}^{n} b_{jt} x_t, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

причем определитель из коэффициентов снова отличен от нуля. Коэффициенты же как в (3), так и в (4) — действительные числа.

Предположим теперь, что $k < l$, и напишем систему равенств

$$y_1 = 0, \ \ldots, \ y_k = 0, \quad z_{l+1} = 0, \ \ldots, \ z_r = 0, \ \ldots, \ z_n = 0. \tag{5}$$

Если левые части этих равенств будут заменены их выражениями из (3) и (4), мы получим систему $n - l + k$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных, поэтому, как мы знаем из § 1, наша система обладает ненулевым действительным решением $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Заменим теперь в равенстве (2) все y и все z их выражениями (3) и (4), а затем подставим вместо неизвестных числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Если для краткости через $y_i(\alpha)$ и $z_j(\alpha)$ будут обозначены значения неизвестных y_i и z_j, получающиеся после такой подстановки, то (2) превращается, ввиду (5), в равенство

$$-y_{k+1}^2(\alpha) - \ldots - y_r^2(\alpha) = z_1^2(\alpha) + \ldots + z_l^2(\alpha). \tag{6}$$

Так как все коэффициенты в (3) и (4) действительные, то все квадраты, входящие в равенство (6), положительны, а поэтому (6) влечет за собой равенство нулю всех этих квадратов; отсюда следуют равенства

$$z_1(\alpha)=0, \ \ldots, \ z_l(\alpha)=0. \tag{7}$$

С другой стороны, по самому выбору чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$z_{l+1}(\alpha)=0, \ \ldots, \ z_r(\alpha)=0, \ \ldots, \ z_n(\alpha)=0. \tag{8}$$

Таким образом, система n линейных однородных уравнений

$$z_i=0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обладает, ввиду (7) и (8), ненулевым решением $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, т. е. определитель этой системы должен быть равен нулю. Это противоречит, однако, тому, что преобразование (4) предполагалось невырожденным. К такому же противоречию мы придем при $l<k$. Отсюда следует равенство $k=l$, доказывающее теорему.

Число положительных квадратов в той нормальной форме, к которой приводится данная действительная квадратичная форма f, называется *положительным индексом инерции* этой формы, число отрицательных квадратов — *отрицательным индексом инерции*, а разность между положительным и отрицательным индексами инерции — *сигнатурой* формы f. Понятно, что при заданном ранге формы задание любого из определенных сейчас трех чисел вполне определяет два других, и поэтому в дальнейших формулировках можно будет говорить о любом из этих трех чисел.

Докажем теперь следующую теорему:

Две квадратичные формы от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными действительными линейными преобразованиями, если эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.

В самом деле, пусть форма f переводится в форму g невырожденным действительным преобразованием. Мы знаем, что это преобразование не меняет ранга формы. Оно не может менять и сигнатуры, так как в противном случае f и g приводились бы к различным нормальным видам, а тогда форма f приводилась бы, в противоречие с законом инерции, к этим обоим нормальным видам. Обратно, если формы f и g имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры, то они приводятся к одному и тому же нормальному виду и поэтому могут быть переведены друг в друга.

Если дана квадратичная форма g в каноническом виде,

$$g=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\ldots+b_ry_r^2, \tag{9}$$

с не равными нулю действительными коэффициентами, то ранг этой формы равен, очевидно, r. Легко видеть, далее, употребляя уже применявшийся выше способ приведения такой формы к нормальному виду, что положительный индекс инерции формы g равен числу положительных коэффициентов в правой части равенства (9). Отсюда и из предшествующей теоремы вытекает такой результат:

Квадратичная форма f тогда и только тогда будет иметь форму (9) *своим каноническим видом, если ранг формы f равен r, а положительный индекс инерции этой формы совпадает с числом положительных коэффициентов в* (9).

Распадающиеся квадратичные формы. Перемножая любые две линейные формы от n неизвестных,

$$\varphi = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \quad \psi = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,$$

мы получим, очевидно, некоторую квадратичную форму. Не всякая квадратичная форма может быть представлена в виде произведения двух линейных форм, и мы хотим вывести условия, при которых это имеет место, т. е. при которых квадратичная форма является *распадающейся*.

Комплексная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ распадается тогда и только тогда, если ее ранг меньше или равен двум. Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ распадается тогда и только тогда, если или ее ранг не больше единицы, или же он равен двум, а сигнатура равна нулю.

Рассмотрим сначала произведение линейных форм φ и ψ. Если хотя бы одна из этих форм нулевая, то их произведение будет квадратичной формой с нулевыми коэффициентами, т. е. оно имеет ранг 0. Если линейные формы φ и ψ пропорциональны,

$$\psi = c\varphi,$$

причем $c \neq 0$ и форма φ ненулевая, то пусть, например, коэффициент a_1 отличен от нуля. Тогда невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \quad y_i = x_i \quad \text{при} \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

приводит квадратичную форму $\varphi\psi$ к виду

$$\varphi\psi = cy_1^2.$$

Справа стоит квадратичная форма ранга 1, а поэтому и квадратичная форма $\varphi\psi$ имеет ранг 1. Если же, наконец, линейные формы φ и ψ не являются пропорциональными, то пусть, например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда линейное преобразование

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$
$$y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,$$
$$y_i = x_i \text{ при } i = 3, 4, \ldots, n$$

будет невырожденным; оно приводит квадратичную форму $\varphi\psi$ к виду

$$\varphi\psi = y_1y_2.$$

Справа стоит квадратичная форма ранга 2, имеющая в случае действительных коэффициентов сигнатуру 0.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Квадратичная форма ранга 0 может, конечно, рассматриваться как произведение двух линейных форм, одна из которых нулевая. Далее, квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ранга 1 невырожденным линейным преобразованием приводится к виду

$$f = cy_1^2, \quad c \neq 0,$$

т. е. к виду

$$f = (cy_1)\, y_1.$$

Выражая y_1 линейно через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы получим представление формы f в виде произведения двух линейных форм. Наконец, действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ранга 2 и сигнатуры 0 приводится невырожденным линейным преобразованием к виду

$$f = y_1^2 - y_2^2;$$

к этому же виду может быть приведена любая комплексная квадратичная форма ранга 2. Однако

$$y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2),$$

но справа, после замены y_1 и y_2 их линейными выражениями через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будет стоять произведение двух линейных форм. Теорема доказана.

§ 28. Положительно определенные формы

Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами называется *положительно определенной*, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов, т. е. если и ранг, и положительный индекс инерции этой формы равны числу неизвестных.

Следующая теорема дает возможность охарактеризовать положительно определенные формы, не приводя их к нормальному или каноническому виду.