Тогда линейное преобразование

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$
$$y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,$$
$$y_i = x_i \text{ при } i = 3, 4, \ldots, n$$

будет невырожденным; оно приводит квадратичную форму $\varphi\psi$ к виду

$$\varphi\psi = y_1y_2.$$

Справа стоит квадратичная форма ранга 2, имеющая в случае действительных коэффициентов сигнатуру 0.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Квадратичная форма ранга 0 может, конечно, рассматриваться как произведение двух линейных форм, одна из которых нулевая. Далее, квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ранга 1 невырожденным линейным преобразованием приводится к виду

$$f = cy_1^2, \quad c \neq 0,$$

т. е. к виду

$$f = (cy_1)\, y_1.$$

Выражая y_1 линейно через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы получим представление формы f в виде произведения двух линейных форм. Наконец, действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ранга 2 и сигнатуры 0 приводится невырожденным линейным преобразованием к виду

$$f = y_1^2 - y_2^2;$$

к этому же виду может быть приведена любая комплексная квадратичная форма ранга 2. Однако

$$y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2),$$

но справа, после замены y_1 и y_2 их линейными выражениями через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будет стоять произведение двух линейных форм. Теорема доказана.

§ 28. Положительно определенные формы

Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами называется *положительно определенной*, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов, т. е. если и ранг, и положительный индекс инерции этой формы равны числу неизвестных.

Следующая теорема дает возможность охарактеризовать положительно определенные формы, не приводя их к нормальному или каноническому виду.

Квадратичная форма f от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, если при всяких действительных значениях этих неизвестных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, эта форма получает положительные значения.

Доказательство. Пусть форма f положительно определенная, т. е. приводится к нормальному виду

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2, \tag{1}$$

причем

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

с отличным от нуля определителем из действительных коэффициентов a_{ij}. Если мы хотим подставить в f произвольные действительные значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то можно подставить их сначала в (2), а затем значения, полученные для всех y_i,— в (1). Заметим, что значения, полученные для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ из (2), не могут все сразу равняться нулю, так как иначе мы получили бы, что система линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

обладает ненулевым решением, хотя ее определитель отличен от нуля. Подставляя найденные для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ значения в (1), мы получим значение формы f, равное сумме квадратов n действительных чисел, которые не все равны нулю; это значение будет, следовательно, строго положительным.

Обратно, пусть форма f не является положительно определенной, т. е. или ее ранг, или положительный индекс инерции меньше n. Это означает, что в нормальном виде этой формы, к которому она приводится, скажем, невырожденным линейным преобразованием (2), квадрат хотя бы одного из новых неизвестных, например y_n, или отсутствует совсем, или же содержится со знаком минус. Покажем, что в этом случае можно подобрать такие действительные значения для неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые не все равны нулю, что значение формы f при этих значениях неизвестных равно нулю или даже отрицательно. Такими будут, например, те значения для $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые мы получим, решая по правилу Крамера систему линейных уравнений, получающихся из (2) при $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0$, $y_n = 1$. Действительно, при этих значениях неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ форма f равна нулю, если y_n^2 не входит в нормальный вид этой формы, и равна -1, если y_n^2 входит в нормальный вид со знаком минус.

Теорема, сейчас доказанная, используется всюду, где применяются положительно определенные квадратичные формы. С ее помощью нельзя, однако, по коэффициентам формы установить, будет ли эта форма положительно определенной. Для этой цели служит другая теорема, которую мы сформулируем и докажем после того, как введем одно вспомогательное понятие.

Пусть дана квадратичная форма f от n неизвестных с матрицей $A=(a_{ij})$. Миноры порядка 1, 2, ..., n этой матрицы, расположенные в ее левом верхнем углу, т. е. миноры

$$a_{11},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

из которых последний совпадает, очевидно, с определителем матрицы A, называются ***главными минорами*** формы f.

Справедлива следующая теорема:

Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, если все ее главные миноры строго положительны.

Доказательство. При $n=1$ теорема верна, так как форма имеет в этом случае вид ax^2 и поэтому положительно определена тогда и только тогда, если $a>0$. Будем поэтому доказывать теорему для случая n неизвестных, предполагая, что для квадратичных форм от $n-1$ неизвестных она уже доказана.

Сделаем сначала следующее замечание:

Если квадратичная форма f с действительными коэффициентами, составляющими матрицу A, подвергается невырожденному линейному преобразованию с действительной матрицей Q, то ***знак определителя формы (т. е. определителя ее матрицы) не меняется.***

Действительно, после преобразования мы получаем квадратичную форму с матрицей $Q'AQ$, однако, ввиду $|Q'|=|Q|$,

$$|Q'AQ|=|Q'|\cdot|A|\cdot|Q|=|A|\cdot|Q|^2,$$

т. е. определитель $|A|$ умножается на положительное число.

Пусть теперь дана квадратичная форма

$$f=\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Ее можно записать в виде

$$f=\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})+2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_ix_n+a_{nn}x_n^2, \tag{3}$$

где φ будет квадратичной формой от $n-1$ неизвестных, составленной из тех членов формы f, в которые не входит неизвестное x_n.

Главные миноры формы φ совпадают, очевидно, со всеми, кроме последнего, главными минорами формы f.

Пусть форма f положительно определена. Форма φ также будет в этом случае положительно определенной: если бы существовали такие значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, не все равные нулю, при которых форма φ получает не строго положительное значение, то, полагая дополнительно $x_n=0$, мы получили бы, ввиду (3), также не строго положительное значение формы f, хотя не все значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ равны нулю. Поэтому, по индуктивному предположению, все главные миноры формы φ, т. е. все главные миноры формы f, кроме последнего, строго положительны. Что же касается последнего главного минора формы f, т. е. определителя самой матрицы A, то его положительность вытекает из следующих соображений: форма f, ввиду ее положительной определенности, невырожденным линейным преобразованием приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов. Определитель этого нормального вида строго положителен, а поэтому ввиду сделанного выше замечания положителен и определитель самой формы f.

Пусть теперь строго положительны все главные миноры формы f. Отсюда вытекает положительность всех главных миноров формы φ, т. е., по индуктивному предположению, положительная определенность этой формы. Существует, следовательно, такое невырожденное линейное преобразование неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, которое приводит форму φ к виду суммы $n-1$ положительных квадратов от новых неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Это линейное преобразование можно дополнить до (невырожденного) линейного преобразования всех неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полагая $x_n=y_n$. Ввиду (3) форма f приводится указанным преобразованием к виду

$$f=\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in}y_iy_n+b_{nn}y_n^2; \tag{4}$$

точные выражения коэффициентов b_{in} для нас несущественны. Так как

$$y_i^2+2b_{in}y_iy_n=(y_i+b_{in}y_n)^2-b_{in}^2y_n^2,$$

то невырожденное линейное преобразование

$$\begin{aligned} z_i&=y_i+b_{in}y_n, \quad i=1, 2, \ldots, n-1,\\ z_n&=\qquad\quad y_n \end{aligned}$$

приводит, ввиду (4), форму f к каноническому виду

$$f=\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2+cz_n^2. \tag{5}$$

Для доказательства положительной определенности формы f остается доказать положительность числа c. Определитель формы, стоящей в правой части равенства (5), равен c. Этот определитель должен, однако, быть положительным, так как правая часть равенства (5) получена из формы f двумя невырожденными линейными преобразованиями, а определитель формы f был, как последний из главных миноров этой формы, положительным.

Доказательство теоремы закончено.

Примеры 1. Квадратичная форма

$$f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

положительно определена, так как ее главные миноры

$$5,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1$$

положительны.

2. Квадратичная форма

$$f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

не будет положительно определенной, так как ее второй главный минор отрицателен:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Заметим, что по аналогии с положительно определенными квадратичными формами можно ввести *отрицательно определенные формы*, т. е. такие невырожденные квадратичные формы с действительными коэффициентами, нормальный вид которых содержит лишь отрицательные квадраты неизвестных. Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых состоит из квадратов одного знака, называются иногда *полуопределенными*. Наконец, *неопределенными* будут такие квадратичные формы, нормальный вид которых содержит как положительные, так и отрицательные квадраты неизвестных.