самих векторов. Ввиду этого может случиться, что хотя векторы некоторых двух данных линейных пространств по своей природе совершенно различны, однако с точки зрения свойств операций эти два пространства неразличимы. Точное определение таково:

Два действительных линейных пространства $V$ и $V'$ называются *изоморфными*, если между их векторами установлено взаимно однозначное соответствие — всякому вектору $a$ из $V$ сопоставлен вектор $a'$ из $V'$, образ вектора $a$, причем различные векторы из $V$ обладают различными образами и всякий вектор из $V'$ служит образом некоторого вектора из $V$, — и если при этом соответствии образом суммы двух векторов служит сумма образов этих векторов,

$$(a+b)'=a'+b', \tag{2}$$

а образом произведения вектора на число служит произведение образа этого вектора на то же число,

$$(\alpha a)'=\alpha a'. \tag{3}$$

Отметим, что взаимно однозначное соответствие между пространствами $V$ и $V'$, удовлетворяющее условиям (2) и (3), называется *изоморфным соответствием*.

Так, пространство векторов-отрезков на плоскости, выходящих из начала координат, изоморфно двумерному векторному пространству, составленному из упорядоченных пар действительных чисел: мы получим изоморфное соответствие между этими пространствами, если на плоскости фиксируем некоторую систему координат и всякому вектору-отрезку сопоставим упорядоченную пару его координат.

Докажем следующее свойство изоморфизма линейных пространств: *образом нуля пространства $V$ при изоморфном соответствии между пространствами $V$ и $V'$ служит нуль пространства $V'$.*

Пусть, в самом деле, $a$ будет некоторый вектор из $V$, $a'$ — его образ в $V'$. Тогда, ввиду (2),

$$a'=(a+0)'=a'+0',$$

т. е. $0'$ будет нулем пространства $V'$.

## § 30. Конечномерные пространства. Базы

Как читатель без труда может проверить, те два определения линейной зависимости векторов-строк, которые были даны в § 9, равно как и доказательство эквивалентности этих определений, используют лишь операции над векторами и поэтому могут быть перенесены на случай любых линейных пространств. В аксиоматически определенных линейных пространствах можно говорить, следовательно, о линейно независимых системах векторов, о макси-

мальных линейно независимых системах, если такие существуют, и т. д.

*Если линейные пространства $V$ и $V'$ изоморфны, то система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из $V$ тогда и только тогда линейно зависима, если линейно зависима система их образов $a_1', a_2', \ldots, a_k'$ в $V'$.*

Заметим, что если соответствие $a \to a'$ (для всех $a$ из $V$) является изоморфным соответствием между $V$ и $V'$, то и обратное соответствие $a' \to a$ также будет изоморфным. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда линейно зависима система $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Пусть существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0.$$

Образом правой части этого равенства при рассматриваемом изоморфизме служит, как мы знаем, нуль $0'$ пространства $V'$. Беря образ левой части и применяя несколько раз (2) и (3), получаем

$$\alpha_1 a_1' + \alpha_2 a_2' + \ldots + \alpha_k a_k' = 0',$$

т. е. система $a_1', a_2', \ldots, a_k'$ также оказалась линейно зависимой.

**Конечномерные пространства.** Линейное пространство $V$ называется *конечномерным*, если в нем можно найти конечную максимальную линейно независимую систему векторов; всякая такая система векторов будет называться *базой* пространства $V$.

Конечномерное линейное пространство может обладать многими различными базами. Так, в пространстве векторов-отрезков на плоскости базой служит любая пара векторов, отличных от нуля и не лежащих на одной прямой. Заметим, что наше определение конечномерного пространства не дает пока ответа на вопрос, могут ли в этом пространстве существовать базы, состоящие из разного числа векторов. Больше того, можно было бы допустить даже, что в некоторых конечномерных пространствах существуют базы со сколь угодно большим числом векторов. Сейчас мы приступим к выяснению того, каково же положение на самом деле.

Пусть линейное пространство $V$ обладает базой

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \tag{1}$$

состоящей из $n$ векторов. Если $a$ — произвольный вектор из $V$, то из максимальности линейно независимой системы (1) следует, что $a$ линейно выражается через эту систему,

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n. \tag{2}$$

С другой стороны, ввиду линейной независимости системы (1) выражение (2) будет для вектора $a$ единственным: если

$$a = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \ldots + \alpha_n' e_n,$$

то

$$(\alpha_1-\alpha_1')\,e_1+(\alpha_2-\alpha_2')\,e_2+\ldots+(\alpha_n-\alpha_n')\,e_n=0,$$

откуда

$$\alpha_i=\alpha_i', \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Таким образом, вектору $a$ однозначно соответствует строка

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \tag{3}$$

коэффициентов его выражения (2) через базу (1) или, как мы будем говорить, *строка его координат в базе* (1). Обратно, всякая строка вида (3), т. е. всякий $n$-мерный вектор в смысле гл. 2, служит строкой координат в базе (1) для некоторого вектора пространства $V$, а именно для вектора, записывающегося через базу (1) в виде (2).

Мы получили, следовательно, взаимно однозначное соответствие между всеми векторами пространства $V$ и всеми векторами $n$-мерного векторного пространства строк. Покажем, что это соответствие, зависящее, понятно, от выбора базы (1), является изоморфным.

Возьмем в пространстве $V$, помимо вектора $a$, выражающегося через базу (1) в виде (2), также вектор $b$, выражение которого через базу (1) будет

$$b=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\ldots+\beta_ne_n.$$

Тогда

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1)\,e_1+(\alpha_2+\beta_2)\,e_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)\,e_n,$$

т. е. *сумме векторов $a$ и $b$ соответствует сумма строк их координат в базе* (1). С другой стороны,

$$\gamma a=(\gamma\alpha_1)\,e_1+(\gamma\alpha_2)\,e_2+\ldots+(\gamma\alpha_n)\,e_n,$$

т. е. *произведению вектора $a$ на число $\gamma$ соответствует произведение строки его координат в базе* (1) *на это же число $\gamma$.*

Этим доказана следующая теорема:

*Всякое линейное пространство, обладающее базой из $n$ векторов, изоморфно $n$-мерному векторному пространству строк.*

Как мы знаем, при изоморфном соответствии между линейными пространствами линейно зависимая система векторов переходит в линейно зависимую и обратно, а поэтому линейно независимая переходит в линейно независимую. Отсюда следует, что *при изоморфном соответствии база переходит в базу.*

В самом деле, пусть база $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ пространства $V$ переходит при изоморфном соответствии между пространствами $V$ и $V'$ в систему векторов $e_1',\ e_2',\ \ldots,\ e_n'$ пространства $V'$, которая хотя и линейно независима, но не является максимальной. В $V'$ можно найти, следовательно, такой вектор $f'$, что система $e_1',\ e_2',\ \ldots,\ e_n',\ f'$ остается линейно независимой. Вектор $f'$ служит, однако, образом при рассматриваемом изоморфизме для некоторого вектора $f$ из $V$.

Мы получаем, что система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n, f$ должна быть линейно независимой в противоречие с определением базы.

Мы знаем, далее (см. § 9), что в $n$-мерном векторном пространстве строк все максимальные линейно независимые системы состоят из $n$ векторов, что всякая система из $n+1$ вектора линейно зависима и что всякая линейно независимая система векторов содержится в некоторой максимальной линейно независимой системе. Используя установленные выше свойства изоморфных соответствий, мы приходим к следующим результатам:

*Все базы конечномерного линейного пространства $V$ состоят из одного и того же числа векторов.* Если это число равно $n$, то $V$ будет называться *$n$-мерным линейным пространством*, а число $n$ — *размерностью* этого пространства.

*Всякая система из $n+1$ вектора $n$-мерного линейного пространства линейно зависима.*

*Всякая линейно независимая система векторов $n$-мерного линейного пространства содержится в некоторой базе этого пространства.*

Теперь легко проверить, что указанные выше примеры действительных линейных пространств — пространство последовательностей и пространство функций — не являются конечномерными пространствами: в каждом из этих пространств читатель без труда найдет линейно независимые системы, состоящие из сколь угодно большого числа векторов.

**Связь между базами.** Объектом изучения являются для нас конечномерные линейные пространства. Понятно, что, изучая $n$-мерные линейные пространства, мы по существу изучаем то $n$-мерное векторное пространство строк, которое было введено еще в гл. 2. Однако раньше в этом пространстве была выделена одна база — а именно база, составленная из единичных векторов, т. е. векторов, у которых одна координата равна единице, а все остальные координаты равны нулю, — и все векторы пространства задавались строками их координат в этой базе; теперь же все базы пространства являются для нас равноправными.

Посмотрим, как много баз можно найти в $n$-мерном линейном пространстве и как эти базы связаны друг с другом.

Пусть в $n$-мерном линейном пространстве $V$ заданы базы

$$e_1, \quad e_2, \ldots, e_n \tag{4}$$

и

$$e_1', \quad e_2', \ldots, e_n'. \tag{5}$$

Каждый вектор базы (5), как и всякий вектор пространства $V$, однозначно записывается через базу (4),

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Матрица

$$T=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \dots & \tau_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn}\end{pmatrix},$$

строки которой являются строками координат векторов (5) в базе (4), называется *матрицей перехода* от базы (4) к базе (5).

Связь между базами (4) и (5) и матрицей перехода $T$ можно записать, ввиду (6), в виде матричного равенства

$$\begin{pmatrix}e_1'\\ e_2'\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ e_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ e_n\end{pmatrix} \tag{7}$$

или, обозначая базы (4) и (5), записанные в столбец, соответственно через $e$ и $e'$, в виде

$$e'=Te.$$

С другой стороны, если $T'$ — матрица перехода от базы (5) к базе (4), то

$$e=T'e'.$$

Отсюда

$$e=(T'T)\,e,$$
$$e'=(TT')\,e',$$

т. е., ввиду линейной независимости баз $e$ и $e'$,

$$T'T=TT'=E,$$

откуда

$$T'=T^{-1}.$$

Этим доказано, что *матрица перехода от одной базы к другой всегда является невырожденной матрицей.*

*Всякая невырожденная квадратная матрица порядка $n$ с действительными элементами служит матрицей перехода от данной базы $n$-мерного действительного линейного пространства к некоторой другой базе.*

Пусть, в самом деле, дана база (4) и невырожденная матрица $T$ порядка $n$. Возьмем в качестве (5) систему векторов, для которых строки матрицы $T$ служат строками координат в базе (4); имеет место, следовательно, равенство (7). Векторы (5) линейно независимы — линейная зависимость между ними влекла бы за собой линейную зависимость строк матрицы $T$ в противоречие с ее невырожденностью. Поэтому система (5), как линейно независимая

система, состоящая из $n$ векторов, является базой нашего пространства, а матрица $T$ служит матрицей перехода от базы (4) к базе (5).

Мы видим, что в $n$-мерном линейном пространстве можно найти столь же много различных баз, как много существует различных невырожденных квадратных матриц порядка $n$. Правда, при этом две базы, состоящие из одних и тех же векторов, но записанных в различном порядке, считаются различными.

**Преобразование координат вектора.** Пусть в $n$-мерном линейном пространстве даны базы (4) и (5) с матрицей перехода $T=(\tau_{ij})$,

$$e' = Te.$$

Найдем связь между строками координат произвольного вектора $a$ в этих базах.

Пусть

$$a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \tag{8}$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i'.$$

Используя (6), получаем:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \left( \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \tau_{ij} \right) e_j.$$

Сравнивая с (8) и используя единственность записи вектора через базу, получаем:

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \tau_{ij}, \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

т. е. имеет место матричное равенство

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')\, T.$$

Таким образом, *строка координат вектора $a$ в базе $e$ равна строке координат этого вектора в базе $e'$, умноженной справа на матрицу перехода от базы $e$ к базе $e'$.*

Отсюда следует, понятно, равенство

$$(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n') = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, T^{-1}.$$

Пример. Рассмотрим трехмерное действительное линейное пространство с базой

$$e_1, e_2, e_3. \tag{9}$$

Векторы

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= 5e_1 - e_2 - 2e_3, \\ e_2' &= 2e_1 + 3e_2, \\ e_3' &= -2e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

также составляют базу в этом пространстве, причем матрицей перехода от (9) к (10) служит матрица

$$T=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вектор

$$a=e_1+4e_2-e_3$$

имеет поэтому в базе (10) строку координат

$$(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')=(1,\ 4,\ -1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}=(-13,\ 6,\ -27),$$

т. е.

$$a=-13e_1'+6e_2'-27e_3'.$$

## § 31. Линейные преобразования

В гл. 3 мы уже встречались с понятием линейного преобразования неизвестных. Понятие, которое будет сейчас введено, носит такое же название, но имеет иной характер. Впрочем, некоторые связи между этими двумя одноименными понятиями могли бы быть указаны.

Пусть дано $n$-мерное действительное линейное пространство, которое обозначим через $V_n$. Рассмотрим *преобразование* этого пространства, т. е. отображение, переводящее каждый вектор $a$ пространства $V_n$ в некоторый вектор $a'$ этого же пространства. Вектор $a'$ называется *образом* вектора $a$ при рассматриваемом преобразовании.

Если преобразование обозначено через $\varphi$, то образ вектора $a$ условимся записывать не через $\varphi(a)$ или $\varphi a$, что читателю было бы привычнее, а через $a\varphi$. Таким образом,

$$a'=a\varphi.$$

Преобразование $\varphi$ линейного пространства $V_n$ называется *линейным преобразованием* этого пространства, если сумму любых двух векторов $a$, $b$ оно переводит в сумму образов этих векторов,

$$(a+b)\varphi=a\varphi+b\varphi, \tag{1}$$

а произведение любого вектора $a$ на любое число $\alpha$ переводит в произведение образа вектора $a$ на это же число $\alpha$,

$$(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi). \tag{2}$$

Из этого определения немедленно вытекает, что *линейное преобразование линейного пространства переводит любую линейную*