также составляют базу в этом пространстве, причем матрицей перехода от (9) к (10) служит матрица

$$T=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вектор

$$a=e_1+4e_2-e_3$$

имеет поэтому в базе (10) строку координат

$$(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')=(1,\ 4,\ -1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}=(-13,\ 6,\ -27),$$

т. е.

$$a=-13e_1'+6e_2'-27e_3'.$$

§ 31. Линейные преобразования

В гл. 3 мы уже встречались с понятием линейного преобразования неизвестных. Понятие, которое будет сейчас введено, носит такое же название, но имеет иной характер. Впрочем, некоторые связи между этими двумя одноименными понятиями могли бы быть указаны.

Пусть дано n-мерное действительное линейное пространство, которое обозначим через V_n. Рассмотрим *преобразование* этого пространства, т. е. отображение, переводящее каждый вектор a пространства V_n в некоторый вектор a' этого же пространства. Вектор a' называется *образом* вектора a при рассматриваемом преобразовании.

Если преобразование обозначено через φ, то образ вектора a условимся записывать не через $\varphi(a)$ или φa, что читателю было бы привычнее, а через $a\varphi$. Таким образом,

$$a'=a\varphi.$$

Преобразование φ линейного пространства V_n называется *линейным преобразованием* этого пространства, если сумму любых двух векторов a, b оно переводит в сумму образов этих векторов,

$$(a+b)\varphi=a\varphi+b\varphi, \tag{1}$$

а произведение любого вектора a на любое число α переводит в произведение образа вектора a на это же число α,

$$(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi). \tag{2}$$

Из этого определения немедленно вытекает, что *линейное преобразование линейного пространства переводит любую линейную*

комбинацию данных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *в линейную комбинацию (с теми же коэффициентами) образов этих векторов,*

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k)\varphi = \alpha_1 (a_1\varphi) + \alpha_2 (a_2\varphi) + \ldots + \alpha_k (a_k\varphi). \quad (3)$$

Докажем следующее утверждение:

При любом линейном преобразовании φ *линейного пространства* V_n *нулевой вектор* 0 *остается неподвижным,*

$$0\varphi = 0,$$

а образом вектора, противоположного для данного вектора a, *служит вектор, противоположный для образа вектора* a,

$$(-a)\varphi = -a\varphi.$$

В самом деле, если b — произвольный вектор, то, ввиду (2),

$$0\varphi = (0 \cdot b)\varphi = 0 \cdot (b\varphi) = 0.$$

С другой стороны,

$$(-a)\varphi = [(-1)a]\varphi = (-1)(a\varphi) = -a\varphi.$$

Понятие линейного преобразования линейного пространства возникло как обобщение известного из курса аналитической геометрии понятия аффинного преобразования плоскости или трехмерного пространства; действительно, условия (1) и (2) для аффинных преобразований выполняются. Эти условия выполняются и для проекций векторов на плоскости или в трехмерном пространстве на некоторую прямую (или на некоторую плоскость). Таким образом, например, в двумерном линейном пространстве векторов-отрезков, выходящих из начала координат плоскости, преобразование, переводящее всякий вектор в его проекцию на некоторую ось, проходящую через начало координат, будет линейным преобразованием.

Примерами линейных преобразований в произвольном пространстве V_n служат *тождественное преобразование* ε, оставляющее всякий вектор a на месте,

$$a\varepsilon = a,$$

и *нулевое преобразование* ω, отображающее всякий вектор a в нуль,

$$a\omega = 0.$$

Сейчас будет получено некоторое обозрение всех линейных преобразований линейного пространства V_n. Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \quad (4)$$

— база этого пространства; как и раньше, базу (4), расположенную в столбец, будем обозначать через e. Так как всякий вектор a пространства V_n однозначно представляется в виде линейной комбинации

векторов базы (4), то, ввиду (3), образ вектора a с теми же коэффициентами выражается через образы векторов (4). Иными словами, *всякое линейное преобразование* φ *пространства* V_n *однозначно определяется заданием образов* $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ *всех векторов фиксированной базы* (4).

Какова бы ни была упорядоченная система из n *векторов пространства* V_n,

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \tag{5}$$

существует, притом единственное, такое линейное преобразование φ *этого пространства, что* (5) *служит системой образов векторов базы* (4) *при этом преобразовании,*

$$e_i\varphi = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Единственность преобразования φ уже доказана выше и нужно доказать лишь его существование. Определим преобразование φ следующим образом: если a — произвольный вектор пространства и

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

— его запись в базе (4), то положим

$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i. \tag{7}$$

Докажем линейность этого преобразования. Если

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

— любой другой вектор пространства, то

$$(a+b)\varphi = \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right]\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) c_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i = a\varphi + b\varphi.$$

Если же γ — любое число, то

$$(\gamma a)\varphi = \left[\sum_{i=1}^{n} (\gamma\alpha_i) e_i\right]\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\gamma\alpha_i) c_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \gamma (a\varphi).$$

Что же касается справедливости равенств (6), то она вытекает из определения (7) преобразования φ, так как все координаты вектора e_i в базе (4) равны нулю, кроме i-й координаты, равной единице.

Нами установлено, следовательно, взаимно однозначное соответствие между всеми линейными преобразованиями линейного пространства V_n *и всеми упорядоченными системами* (5) *из* n *векторов этого пространства.*

Всякий вектор c_i обладает, однако, определенной записью в базе (4),

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Из координат вектора c_i в базе (4) можно составить квадратную матрицу

$$A = (\alpha_{ij}), \tag{9}$$

беря в качестве ее i-й строки строку координат вектора c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как система (5) была произвольной, то матрица A будет произвольной квадратной матрицей порядка n с действительными элементами.

Мы имеем, таким образом, взаимно однозначное соответствие между всеми линейными преобразованиями пространства V_n и всеми квадратными матрицами порядка n; это соответствие зависит, конечно, от выбора базы (4).

Будем говорить, что матрица A *задает* линейное преобразование φ в базе (4), или, короче, что A есть *матрица линейного преобразования* φ в базе (4). Если через $e\varphi$ мы обозначим столбец, составленный из образов векторов базы (4), то из (6), (8) и (9) вытекает следующее матричное равенство, полностью описывающее связи, существующие между линейным преобразованием φ, базой e и матрицей A, задающей это линейное преобразование в этой базе:

$$e\varphi = Ae. \tag{10}$$

Покажем, как, зная матрицу A линейного преобразования φ в базе (4), по координатам вектора a в этой базе найти координаты его образа $a\varphi$. Если

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$

то

$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i\varphi),$$

что равносильно матричному равенству

$$a\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(e\varphi).$$

Используя (10) и учитывая, что ассоциативность умножения матриц легко проверяется и в том случае, когда одна из матриц является столбцом, составленным из векторов, мы получаем:

$$a\varphi = [(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) A]\, e.$$

Отсюда следует, что *строка координат вектора $a\varphi$ равна строке координат вектора a, умноженной справа на матрицу A линейного преобразования φ, все в базе* (4).

Пример. Пусть в базе e_1, e_2, e_3 трехмерного линейного пространства линейное преобразование φ задается матрицей

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если

$$a=5e_1+e_2-2e_3,$$

то

$$(5,\ 1,\ -2)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}=(-9,\ 16,\ 0),$$

т. е.

$$a\varphi=-9e_1+16e_2.$$

Связь между матрицами линейного преобразования в разных базах. Само собою разумеется, что матрица, задающая линейное преобразование, зависит от выбора базы. Покажем, какова связь между матрицами, задающими в разных базах одно и то же линейное преобразование.

Пусть даны базы e и e' с матрицей перехода T,

$$e'=Te, \tag{11}$$

и пусть линейное преобразование φ задается в этих базах соответственно матрицами A и A',

$$e\varphi=Ae, \quad e'\varphi=A'e'. \tag{12}$$

Второе из равенств (12) приводит, ввиду (11), к равенству

$$(Te)\,\varphi=A'\,(Te).$$

Однако

$$(Te)\,\varphi=T\,(e\varphi).$$

Действительно, если $(\tau_{i1},\ \tau_{i2},\ \ldots,\ \tau_{in})$ — i-я строка матрицы T, то

$$(\tau_{i1}e_1+\tau_{i2}e_2+\ldots+\tau_{in}e_n)\,\varphi=\tau_{i1}\,(e_1\varphi)+\tau_{i2}\,(e_2\varphi)+\ldots+\tau_{in}\,(e_n\varphi).$$

Таким образом, ввиду (12),

$$(Te)\,\varphi=T\,(e\varphi)=T\,(Ae)=(TA)\,e,$$
$$A'\,(Te)=(A'T)\,e,$$

т. е.

$$(TA)\,e=(A'T)\,e.$$

Если хотя бы для одного i, $1\leqslant i\leqslant n$, i-я строка матрицы TA будет отлична от i-й строки матрицы $A'T$, то две различные линейные комбинации векторов e_1, e_2, $\ldots$, e_n окажутся равными друг другу, что противоречит линейной независимости базы e. Таким образом,

$$TA=A'T,$$

откуда, ввиду невырожденности матрицы перехода T,

$$A' = TAT^{-1}, \quad A = T^{-1}A'T. \tag{13}$$

Заметим, что квадратные матрицы B и C называются ***подобными***, если они связаны равенством

$$C = Q^{-1}BQ,$$

где Q — некоторая невырожденная матрица. При этом говорят, что матрица C получена из матрицы B *трансформированием* матрицей Q.

Доказанные выше равенства (13) можно сформулировать, таким образом, в виде следующей важной теоремы:

Матрицы, задающие одно и то же линейное преобразование в разных базах, подобны между собой. При этом матрица линейного преобразования φ в базе e' получается трансформированием матрицы этого преобразования в базе e матрицей перехода от базы e' к базе e.

Подчеркнем, что если матрица A задает линейное преобразование φ в базе e, то любая матрица B, подобная матрице A,

$$B = Q^{-1}AQ,$$

также задает преобразование φ в некоторой базе, а именно в базе, получающейся из базы e при помощи матрицы перехода Q^{-1}.

Операции над линейными преобразованиями. Сопоставляя каждому линейному преобразованию пространства V_n его матрицу в фиксированной базе, мы получаем, как доказано, взаимно однозначное соответствие между всеми линейными преобразованиями и всеми квадратными матрицами порядка n. Естественно ожидать, что операциям сложения и умножения матриц, а также умножения матрицы на число, будут соответствовать аналогичные операции над линейными преобразованиями.

Пусть в пространстве V_n даны линейные преобразования φ и ψ. Назовем *суммой* этих преобразований преобразование $\varphi + \psi$, определяемое равенством

$$a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi; \tag{14}$$

оно переводит, следовательно, любой вектор a в сумму его образов при преобразованиях φ и ψ.

Преобразование $\varphi + \psi$ является линейным. Действительно, для любых векторов a и b и любого числа α

$$(a+b)(\varphi+\psi) = (a+b)\varphi + (a+b)\psi = \\ = a\varphi + b\varphi + a\psi + b\psi = a(\varphi+\psi) + b(\varphi+\psi);$$

$$(\alpha a)(\varphi+\psi) = (\alpha a)\varphi + (\alpha a)\psi = \alpha(a\varphi) + \alpha(a\psi) = \\ = \alpha(a\varphi + a\psi) = \alpha[a(\varphi+\psi)].$$

С другой стороны, назовем *произведением* линейных преобразований φ и ψ преобразование $\varphi\psi$, определяемое равенством

$$a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi, \tag{15}$$

т. е. получающееся в результате последовательного выполнения преобразований φ и ψ.

Преобразование $\varphi\psi$ *является линейным*:

$$(a+b)(\varphi\psi) = [(a+b)\varphi]\psi = (a\varphi + b\varphi)\psi = \\ = (a\varphi)\psi + (b\varphi)\psi = a(\varphi\psi) + b(\varphi\psi);$$

$$(\alpha a)(\varphi\psi) = [(\alpha a)\varphi]\psi = [\alpha(a\varphi)]\psi = \alpha[(a\varphi)\psi] = \alpha[a(\varphi\psi)].$$

Назовем, наконец, *произведением линейного преобразования* φ *на число* $\varkappa$ преобразование $\varkappa\varphi$, определяемое равенством

$$a(\varkappa\varphi) = \varkappa(a\varphi); \tag{16}$$

образы при преобразовании φ всех векторов умножаются, следовательно, на число $\varkappa$.

Преобразование $\varkappa\varphi$ *является линейным*:

$$(a+b)(\varkappa\varphi) = \varkappa[(a+b)\varphi] = \varkappa(a\varphi + b\varphi) = \\ = \varkappa(a\varphi) + \varkappa(b\varphi) = a(\varkappa\varphi) + b(\varkappa\varphi);$$

$$(\alpha a)(\varkappa\varphi) = \varkappa[(\alpha a)\varphi] = \varkappa[\alpha(a\varphi)] = \alpha[\varkappa(a\varphi)] = \alpha[a(\varkappa\varphi)].$$

Пусть в базе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ преобразования φ и ψ задаются соответственно матрицами $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$,

$$e\varphi = Ae, \quad e\psi = Be.$$

Тогда, ввиду (14),

$$e_i(\varphi + \psi) = e_i\varphi + e_i\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) e_j,$$

т. е.

$$e(\varphi + \psi) = (A + B)e.$$

Таким образом, *матрица суммы линейных преобразований в любой базе равна сумме матриц этих преобразований в той же базе.*

С другой стороны, ввиду (15),

$$e_i(\varphi\psi) = (e_i\varphi)\psi = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j\right)\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(e_j\psi) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk}\right) e_k,$$

т. е.

$$e(\varphi\psi) = (AB)e.$$

Иными словами, *матрица произведения линейных преобразований в любой базе равна произведению матриц этих преобразований в той же базе.*

Наконец, ввиду (16),

$$e_i(\varkappa\varphi) = \varkappa(e_i\varphi) = \varkappa \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} (\varkappa\alpha_{ij}) e_j,$$

т. е.

$$e(\varkappa\varphi) = (\varkappa A) e.$$

Следовательно, *матрица, задающая в некоторой базе произведение линейного преобразования* φ *на число* $\varkappa$, *равна произведению матрицы самого преобразования* φ *в этой базе на число* $\varkappa$.

Из полученных результатов следует, что операции над линейными преобразованиями обладают теми же свойствами, что и операции над матрицами. Так, сложение линейных преобразований коммутативно и ассоциативно, а умножение ассоциативно, но при $n > 1$ не коммутативно. Для линейных преобразований существует однозначное вычитание. Отметим также, что *тождественное преобразование* ε *играет среди линейных преобразований роль единицы, а нулевое преобразование* ω — *роль нуля.* Действительно, в любой базе преобразование ε задается единичной матрицей, а преобразование ω — нулевой матрицей.

§ 32*. Линейные подпространства

Подмножество L линейного пространства V называется *линейным подпространством* этого пространства, если оно само является линейным пространством по отношению к определенным в V операциям сложения векторов и умножения вектора на число. Так, в трехмерном евклидовом пространстве совокупность векторов, выходящих из начала координат и лежащих на некоторой плоскости (или некоторой прямой), проходящей через начало, будет линейным подпространством.

Для того чтобы непустое подмножество L *пространства* V *было его линейным подпространством, достаточно выполнения следующих требований:*

1. *Если векторы* a *и* b *принадлежат к* L, *то в* L *содержится и вектор* $a+b$.

2. *Если вектор* a *принадлежит к* L, *то в* L *содержится и вектор* αa *при любом значении числа* α.

Действительно, ввиду условия 2, множество L содержит нулевой вектор: если вектор a принадлежит к L, то L содержит и вектор $0 \cdot a = 0$. Далее, L вместе со всяким своим вектором a содержит, снова ввиду свойства 2, и противоположный ему вектор $-a = (-1) \cdot a$, а поэтому ввиду свойства 1 к L принадлежит и разность любых двух векторов из L. Что же касается всех остальных