евклидово пространство в том же смысле, в каком для всякого n существует единственное n-мерное действительное линейное пространство.

На случай комплексных линейных пространств понятия и результаты настоящего параграфа переносятся следующим образом. Комплексное линейное пространство называется *унитарным пространством*, если в нем задано скалярное умножение, причем (a, b) будет, вообще говоря, комплексным числом; при этом должны выполняться аксиомы II—IV (в формулировке последней аксиомы следует подчеркнуть, что скалярный квадрат ненулевого вектора действителен и строго положителен), а аксиома I заменяется аксиомой

I′ $$(a, b) = \overline{(b, a)},$$

где черта обозначает, как обычно, переход к сопряженному комплексному числу.

Скалярное умножение уже не будет, следовательно, коммутативным. Тем не менее, равенство, симметричное аксиоме II, остается справедливым,

II′ $$(a, b+c) = (a, b) + (a, c),$$

так как

$$(a, b+c) = \overline{(b+c, a)} = \overline{(b, a) + (c, a)} = \overline{(b, a)} + \overline{(c, a)} = (a, b) + (a, c).$$

С другой стороны,

III′ $$(a, \alpha b) = \overline{\alpha}\,(a, b),$$

так как

$$(a, \alpha b) = \overline{(\alpha b, a)} = \overline{\alpha\,(b, a)} = \overline{\alpha}\,\overline{(b, a)} = \overline{\alpha}\,(a, b).$$

Понятия ортогональности и ортонормированной системы векторов переносятся на случай унитарных пространств без всяких изменений. Как и выше, доказывается существование ортонормированных баз во всяком конечномерном унитарном пространстве. При этом, однако, если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированная база и векторы a, b имеют в этой базе записи (7), то

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}.$$

Результаты дальнейших параграфов настоящей главы также можно было бы перенести с евклидовых на унитарные пространства. Мы не будем этого делать и отошлем интересующегося читателя к специальным книгам по линейной алгебре.

§ 35. Ортогональные матрицы, ортогональные преобразования

Пусть дано действительное линейное преобразование n неизвестных:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{1}$$

матрицу этого преобразования обозначим через Q. Это преобразование переводит сумму квадратов неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, являющуюся нормальным

видом положительно определенных квадратичных форм (см. § 28), в некоторую квадратичную форму от неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Случайно эта новая квадратичная форма сама может оказаться суммой квадратов неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е. может иметь место равенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2, \tag{2}$$

тождественное после замены неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их выражениями (1). Линейное преобразование неизвестных (1), обладающее этим свойством, т. е., как говорят, оставляющее сумму квадратов неизвестных инвариантной, называется *ортогональным преобразованием неизвестных*, а его матрица Q — *ортогональной матрицей*.

Существует много других определений ортогонального преобразования и ортогональной матрицы, эквивалентных приведенным выше. Укажем некоторые из них, необходимые для дальнейшего.

Мы знаем из § 26 закон, по которому преобразуется матрица квадратичной формы при выполнении линейного преобразования неизвестных. Применяя его к нашему случаю и учитывая, что матрицей квадратичной формы, являющейся суммой квадратов всех неизвестных, служит единичная матрица E, мы получим, что равенство (2) равносильно матричному равенству

$$Q'EQ = E,$$

т. е.

$$Q'Q = E. \tag{3}$$

Отсюда

$$Q' = Q^{-1}, \tag{4}$$

а поэтому справедливо и равенство

$$QQ' = E. \tag{5}$$

Таким образом, ввиду (4), *ортогональную матрицу Q можно определить как такую матрицу, для которой транспонированная матрица Q' равна обратной матрице Q^{-1}*. Каждое из равенств (3) и (5) также может быть принято в качестве определения ортогональной матрицы.

Так как столбцы матрицы Q' являются строками матрицы Q, то из (5) вытекает следующее утверждение: *квадратная матрица Q тогда и только тогда будет ортогональной, если сумма квадратов всех элементов любой ее строки равна единице, а сумма произведений соответственных элементов любых двух ее различных строк равна нулю*. Из (3) следует аналогичное утверждение для столбцов матрицы Q.

Переходя в равенстве (3) к определителям, мы получим ввиду того, что $|Q'| = |Q|$, равенство

$$|Q|^2 = 1.$$

Отсюда следует, что *определитель ортогональной матрицы равен* ± 1. Таким образом, *всякое ортогональное преобразование неизвестных является невырожденным.* Само собой разумеется, что утверждать обратное нельзя; отметим также, что далеко не всякая матрица с определителем, равным ± 1, будет ортогональной.

Матрица, обратная к ортогональной, сама будет ортогональной. Действительно, переходя в (4) к транспонированным матрицам, мы получим:

$$(Q^{-1})' = (Q')' = Q = (Q^{-1})^{-1}.$$

С другой стороны, *произведение ортогональных матриц само ортогонально.* Действительно, если матрицы Q и R ортогональные, то, используя (4), а также равенство (6) из § 26 и аналогичное равенство, справедливое для обратной матрицы, мы получим:

$$(QR)' = R'Q' = R^{-1}Q^{-1} = (QR)^{-1}.$$

В § 37 будет использовано следующее утверждение:

Матрица перехода от ортонормированной базы евклидова пространства к любой другой его ортонормированной базе является ортогональной.

Пусть, в самом деле, в пространстве E_n заданы две ортонормированные базы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ с матрицей перехода $Q = (q_{ij})$,

$$e' = Qe.$$

Так как база e ортонормированная, то скалярное произведение любых двух векторов, в частности любых двух векторов из базы e', равно сумме произведений соответственных координат этих векторов в базе e. Так как, однако, и база e' ортонормированная, то скалярный квадрат каждого вектора из e' равен единице, а скалярное произведение любых двух разных векторов из e' равно нулю. Отсюда для строк координат векторов базы e' в базе e, т. е. для строк матрицы Q, вытекают те утверждения, которые, как выведено выше из равенства (5), характерны для ортогональной матрицы.

Ортогональные преобразования евклидова пространства. Сейчас уместно изучить один интересный специальный тип линейных преобразований евклидовых пространств, хотя преобразования этого типа и не будут у нас дальше использоваться.

Линейное преобразование φ евклидова пространства E_n называется *ортогональным преобразованием этого евклидова пространства,* если оно сохраняет скалярный квадрат всякого вектора, т. е. для любого вектора a

$$(a\varphi,\ a\varphi) = (a,\ a). \tag{6}$$

Отсюда выводится следующее более общее утверждение, которое, понятно, также может быть принято в качестве определения ортогонального преобразования:

Ортогональное преобразование φ евклидова пространства сохраняет скалярное произведение любых двух векторов a, b,

$$(a\varphi,\ b\varphi)=(a,\ b). \tag{7}$$

Действительно, ввиду (6)

$$((a+b)\varphi,\ (a+b)\varphi)=(a+b,\ a+b).$$

Однако

$$((a+b)\varphi,\ (a+b)\varphi)=(a\varphi+b\varphi,\ a\varphi+b\varphi)=$$
$$=(a\varphi,\ a\varphi)+(a\varphi,\ b\varphi)+(b\varphi,\ a\varphi)+(b\varphi,\ b\varphi),$$
$$(a+b,\ a+b)=(a,\ a)+(a,\ b)+(b,\ a)+(b,\ b).$$

Отсюда, используя (6) как для a, так и для b, и учитывая коммутативность скалярного умножения, получаем

$$2(a\varphi,\ b\varphi)=2(a,\ b),$$

а поэтому имеет место и (7).

При ортогональном преобразовании евклидова пространства образы всех векторов любой ортонормированной базы сами составляют ортонормированную базу. Обратно, если линейное преобразование евклидова пространства переводит хотя бы одну ортонормированную базу снова в ортонормированную базу, то это преобразование ортогонально.

В самом деле, пусть φ — ортогональное преобразование пространства E_n, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — произвольная ортонормированная база этого пространства. Ввиду (7) из равенств

$$(e_i,\ e_i)=1, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
$$(e_i,\ e_j)=0 \text{ при } i\neq j$$

вытекают равенства

$$(e_i\varphi,\ e_i\varphi)=1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
$$(e_i\varphi,\ e_j\varphi)=0 \text{ при } i\neq j,$$

т. е. система векторов $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ оказывается ортогональной и нормированной, а поэтому она будет ортонормированной базой пространства E_n.

Обратно, пусть линейное преобразование φ пространства E_n переводит ортонормированную базу $e_1, e_2, \ldots, e_n$ снова в ортонормированную базу, т. е. система векторов $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ является ортонормированной базой пространства E_n. Если

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

— произвольный вектор пространства E_n, то

$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i\varphi),$$

т. е. вектор $a\varphi$ имеет в базе $e\varphi$ те же координаты, что и вектор a в базе e. Эти обе базы являются, однако, ортонормированными, а поэтому скалярный квадрат любого вектора равен сумме квадратов его координат в любой из этих баз. Таким образом,

$$(a, a) = (a\varphi, a\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2,$$

т. е. равенство (6) действительно выполняется.

Ортогональное преобразование евклидова пространства в любой ортонормированной базе задается ортогональной матрицей. Обратно, если линейное преобразование евклидова пространства хотя бы в одной ортонормированной базе задается ортогональной матрицей, то это преобразование ортогонально.

Действительно, если преобразование φ ортогональное, а база $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированная, то и система векторов $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots$ $\ldots, e_n\varphi$ будет ортонормированной базой. Матрица A преобразования φ в базе e,

$$e\varphi = Ae, \tag{8}$$

будет, следовательно, матрицей перехода от ортонормированной базы e к ортонормированной базе $e\varphi$, т. е., как доказано выше, будет ортогональной.

Обратно, пусть линейное преобразование φ задается в ортонормированной базе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортогональной матрицей A; имеет место, следовательно, равенство (8). Так как база e ортонормированная, то скалярное произведение любых векторов, в частности любых векторов из системы $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$, равно сумме произведений соответственных координат этих векторов в базе e. Поэтому, так как матрица A ортогональна,

$$(e_i\varphi, e_i\varphi) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$(e_i\varphi, e_j\varphi) = 0 \text{ при } i \neq j,$$

т. е. система $e\varphi$ сама оказывается ортонормированной базой пространства E_n. Отсюда вытекает ортогональность преобразования φ.

Как читатель знает из курса аналитической геометрии, среди всех аффинных преобразований плоскости, оставляющих на месте начало координат, вращения (соединенные, быть может, с зеркальными отражениями) являются единственными, сохраняющими

скалярное произведение векторов. Таким образом, ортогональные преобразования n-мерного евклидова пространства можно рассматривать как «вращения» этого пространства.

К числу ортогональных преобразований евклидова пространства принадлежит, очевидно, тождественное преобразование. С другой стороны, установленная нами связь между ортогональными преобразованиями и ортогональными матрицами, а также изложенная в § 31 связь между операциями над линейными преобразованиями и над матрицами позволяют из известных свойств ортогональных матриц вывести следующие свойства ортогональных преобразований евклидова пространства, легко проверяемые и непосредственно:

Всякое ортогональное преобразование является невырожденным и его обратное преобразование также ортогонально.

Произведение любых ортогональных преобразований ортогонально.

§ 36. Симметрические преобразования

Линейное преобразование φ n-мерного евклидова пространства называется *симметрическим* (или *самосопряженным*), если для любых векторов a, b этого пространства имеет место равенство

$$(a\varphi,\ b)=(a,\ b\varphi), \tag{1}$$

т. е. символ симметрического преобразования можно при скалярном умножении переносить с одного множителя на другой.

Примерами симметрических преобразований служат, очевидно, тождественное преобразование ε и нулевое преобразование ω. Более общим примером является линейное преобразование, при котором всякий вектор умножается на фиксированное число α,

$$a\varphi=\alpha a.$$

Действительно, в этом случае

$$(a\varphi,\ b)=(\alpha a,\ b)=\alpha(a,\ b)=(a,\ \alpha b)=(a,\ b\varphi).$$

Роль симметрических преобразований весьма велика и нам необходимо изучить их достаточно детально.

Симметрическое преобразование евклидова пространства в любой ортонормированной базе задается симметрической матрицей. Обратно, если линейное преобразование евклидова пространства хотя бы в одной ортонормированной базе задается симметрической матрицей, то это преобразование симметрическое.

Действительно, пусть симметрическое преобразование φ задается в ортонормированной базе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицей $A=(\alpha_{ij})$. Учитывая, что в ортонормированной базе скалярное произведение двух