скалярное произведение векторов. Таким образом, ортогональные преобразования $n$-мерного евклидова пространства можно рассматривать как «вращения» этого пространства.

К числу ортогональных преобразований евклидова пространства принадлежит, очевидно, тождественное преобразование. С другой стороны, установленная нами связь между ортогональными преобразованиями и ортогональными матрицами, а также изложенная в § 31 связь между операциями над линейными преобразованиями и над матрицами позволяют из известных свойств ортогональных матриц вывести следующие свойства ортогональных преобразований евклидова пространства, легко проверяемые и непосредственно:

*Всякое ортогональное преобразование является невырожденным и его обратное преобразование также ортогонально.*

*Произведение любых ортогональных преобразований ортогонально.*

## § 36. Симметрические преобразования

Линейное преобразование $\varphi$ $n$-мерного евклидова пространства называется *симметрическим* (или *самосопряженным*), если для любых векторов $a$, $b$ этого пространства имеет место равенство

$$(a\varphi,\ b)=(a,\ b\varphi), \tag{1}$$

т. е. символ симметрического преобразования можно при скалярном умножении переносить с одного множителя на другой.

Примерами симметрических преобразований служат, очевидно, тождественное преобразование $\varepsilon$ и нулевое преобразование $\omega$. Более общим примером является линейное преобразование, при котором всякий вектор умножается на фиксированное число $\alpha$,

$$a\varphi=\alpha a.$$

Действительно, в этом случае

$$(a\varphi,\ b)=(\alpha a,\ b)=\alpha(a,\ b)=(a,\ \alpha b)=(a,\ b\varphi).$$

Роль симметрических преобразований весьма велика и нам необходимо изучить их достаточно детально.

*Симметрическое преобразование евклидова пространства в любой ортонормированной базе задается симметрической матрицей. Обратно, если линейное преобразование евклидова пространства хотя бы в одной ортонормированной базе задается симметрической матрицей, то это преобразование симметрическое.*

Действительно, пусть симметрическое преобразование $\varphi$ задается в ортонормированной базе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицей $A=(\alpha_{ij})$. Учитывая, что в ортонормированной базе скалярное произведение двух

векторов равно сумме произведений соответственных координат этих векторов, мы получаем:

$$(e_i\varphi,\ e_j)=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}e_k,\ e_j\right)=\alpha_{ij},$$

$$(e_i,\ e_j\varphi)=\left(e_i,\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}e_k\right)=\alpha_{ji},$$

т. е., ввиду (1),

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$$

для всех $i$ и $j$. Матрица $A$ оказалась, таким образом, симметрической.

Обратно, пусть линейное преобразование $\varphi$ задается в ортонормированной базе $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ симметрической матрицей $A=(\alpha_{ij})$,

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}\quad \text{для всех } i \text{ и } j. \tag{2}$$

Если

$$b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i,\qquad c=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j e_j$$

— любые векторы пространства, то

$$b\varphi=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\,(e_i\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_{ij}\right)e_j,$$

$$c\varphi=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,(e_j\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\alpha_{ji}\right)e_i.$$

Используя ортонормированность базы $e$, получаем

$$(b\varphi,\ c)=\sum_{j,\,i=1}^{n}\beta_i\alpha_{ij}\gamma_j,$$

$$(b,\ c\varphi)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\beta_i\gamma_j\alpha_{ji}.$$

Ввиду (2) правые части последних равенств совпадают, а поэтому

$$(b\varphi,\ c)=(b,\ c\varphi),$$

что и требовалось доказать.

Из полученного результата вытекает следующее свойство симметрических преобразований, легко проверяемое и непосредственно:

*Сумма симметрических преобразований, а также произведение симметрического преобразования на число являются симметрическими преобразованиями.*

Докажем теперь следующую важную теорему:

*Все характеристические корни симметрического преобразования действительны.*

Так как характеристические корни любого линейного преобразования совпадают с характеристическими корнями матрицы этого преобразования в любой базе, а симметрическое преобразование задается в ортонормированных базах симметрическими матрицами, то достаточно доказать следующее утверждение:

*Все характеристические корни симметрической матрицы действительны.*

В самом деле, пусть $\lambda_0$ будет характеристический корень (быть может, комплексный) симметрической матрицы $A=(\alpha_{ij})$,

$$|A-\lambda_0 E|=0.$$

Тогда система линейных однородных уравнений с комплексными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j=\lambda_0 x_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

имеет равный нулю определитель, т. е. обладает ненулевым решением $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n$, вообще говоря, комплексным; таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j=\lambda_0\beta_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

Умножая обе части каждого $i$-го из равенств (3) на число $\overline{\beta}_i$, сопряженное с числом $\beta_i$, и складывая отдельно левые и правые части всех получающихся равенств, мы приходим к равенству

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i=\lambda_0\sum_{i=1}^{n}\beta_i\overline{\beta}_i. \tag{4}$$

Коэффициент при $\lambda_0$ в (4) является отличным от нуля действительным числом, будучи суммой неотрицательных действительных чисел, хотя бы одно из которых строго положительно. Действительность числа $\lambda_0$ будет поэтому доказана, если мы докажем действительность левой части равенства (4), для чего достаточно показать, что это комплексное число совпадает со своим сопряженным. Здесь впервые будет использована симметричность (действительной) матрицы $A$.

$$\overline{\sum_{i,\ j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i}=\sum_{i,\ j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i}=\sum_{i,\ j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\beta}_j\beta_i=$$
$$=\sum_{i,\ j=1}^{n}\alpha_{ji}\overline{\beta}_j\beta_i=\sum_{i,\ j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\beta}_i\beta_j=\sum_{i,\ j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i.$$

Заметим, что предпоследнее равенство получено простой переменой обозначений для индексов суммирования: вместо $i$ поставлено $j$, вместо $j$ поставлено $i$. Теорема, следовательно, доказана.

*Линейное преобразование $\varphi$ евклидова пространства $E_n$ тогда и только тогда будет симметрическим, если в пространстве $E_n$ существует ортонормированная база, составленная из собственных векторов этого преобразования.*

В одну сторону это утверждение почти очевидно: если в $E_n$ существует ортонормированная база $e_1, e_2, \ldots, e_n$, причем

$$e_i\varphi = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то в базе $e$ преобразование $\varphi$ задается диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица является, однако, симметрической, а поэтому преобразование $\varphi$ задается в ортонормированной базе $e$ симметрической матрицей, т. е. будет симметрическим.

Основное обратное утверждение теоремы мы будем доказывать индукцией по размерности $n$ пространства $E_n$. В самом деле, при $n = 1$ всякое линейное преобразование $\varphi$ пространства $E_1$ непременно переводит любой вектор в вектор, ему пропорциональный. Отсюда следует, что всякий ненулевой вектор $a$ будет собственным вектором для $\varphi$ (как, впрочем, следует и то, что всякое линейное преобразование пространства $E_1$ будет симметрическим). Нормируя вектор $a$, мы получим искомую ортонормированную базу пространства $E_1$.

Пусть утверждение теоремы уже доказано для $(n-1)$-мерного евклидова пространства и пусть в пространстве $E_n$ задано симметрическое преобразование $\varphi$. Из доказанной выше теоремы вытекает существование для $\varphi$ действительного характеристического корня $\lambda_0$. Это число будет, следовательно, собственным значением для преобразования $\varphi$. Если $a$ — собственный вектор преобразования $\varphi$, относящийся к этому собственному значению, то и всякий ненулевой вектор, пропорциональный вектору $a$, будет для $\varphi$ собственным вектором, относящимся к тому же собственному значению $\lambda_0$, так как

$$(\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi) = \alpha(\lambda_0 a) = \lambda_0(\alpha a).$$

В частности, нормируя вектор $a$, мы получим такой вектор $e_1$, что

$$e_1\varphi = \lambda_0 e_1,$$
$$(e_1, e_1) = 1.$$

Как доказано в § 34, ненулевой вектор $e_1$ можно включить в ортогональную базу

$$e_1, e_2', \ldots, e_n', \tag{5}$$

пространства $E_n$. Те векторы, первая координата которых в базе (5) равна нулю, т. е. векторы вида $\alpha_2 e_2' + \ldots + \alpha_n e_n'$, составляют, очевидно, $(n-1)$-мерное линейное подпространство пространства $E_n$, которое мы обозначим через $L$. Это будет даже $(n-1)$-мерное евклидово пространство, так как скалярное произведение, будучи определенным для всех векторов из $E_n$, определено, в частности, для векторов из $L$, причем обладает всеми необходимыми свойствами.

Подпространство $L$ состоит из всех тех векторов пространства $E_n$, которые ортогональны к вектору $e_1$. Действительно, если

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2' e_2' + \ldots + \alpha_n' e_n',$$

то, ввиду ортогональности базы (5) и нормированности вектора $e_1$,

$$(e_1, a) = \alpha_1 (e_1, e_1) + \alpha_2' (e_1, e_2') + \ldots + \alpha_n' (e_1, e_n') = \alpha_1,$$

т. е. $(e_1, a) = 0$ тогда и только тогда, если $\alpha_1 = 0$.

Если вектор $a$ принадлежит к подпространству $L$, т. е. $(e_1, a) = 0$, то и вектор $a\varphi$ содержится в $L$. Действительно, ввиду симметричности преобразования $\varphi$,

$$(e_1, a\varphi) = (e_1\varphi, a) = (\lambda_0 e_1, a) = \lambda_0 (e_1, a) = \lambda_0 \cdot 0 = 0,$$

т. е. вектор $a\varphi$ ортогонален к $e_1$ и поэтому содержится в $L$. Это свойство подпространства $L$, называемое его *инвариантностью* относительно преобразования $\varphi$, позволяет считать $\varphi$, рассматриваемое лишь в применении к векторам из $L$, линейным преобразованием этого $(n-1)$-мерного евклидова пространства. Оно будет даже симметрическим преобразованием пространства $L$, так как равенство (1), выполняясь для любых векторов из $E_n$, будет выполняться, в частности, для векторов, лежащих в $L$.

В силу индуктивного предположения в пространстве $L$ существует ортонормированная база, состоящая из собственных векторов преобразования $\varphi$; обозначим ее через $e_2, \ldots, e_n$. Все эти векторы ортогональны к вектору $e_1$, а поэтому $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будет искомой ортонормированной базой пространства $E_n$, состоящей из собственных векторов преобразования $\varphi$. Теорема доказана.

## § 37. Приведение квадратичной формы к главным осям. Пары форм

Применим последнюю теорему предшествующего параграфа к доказательству следующей матричной теоремы:

*Для всякой симметрической матрицы $A$ можно найти такую ортогональную матрицу $Q$, которая приводит матрицу $A$ к диагональному виду, т. е. матрица $Q^{-1}AQ$, полученная трансформированием матрицы $A$ матрицей $Q$, будет диагональной.*