

пространства  $E_n$ . Те векторы, первая координата которых в базе (5) равна нулю, т. е. векторы вида  $\alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n$ , составляют, очевидно,  $(n-1)$ -мерное линейное подпространство пространства  $E_n$ , которое мы обозначим через  $L$ . Это будет даже  $(n-1)$ -мерное евклидово пространство, так как скалярное произведение, будучи определенным для всех векторов из  $E_n$ , определено, в частности, для векторов из  $L$ , причем обладает всеми необходимыми свойствами.

Подпространство  $L$  состоит из всех тех векторов пространства  $E_n$ , которые ортогональны к вектору  $e_1$ . Действительно, если

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha'_2 e'_2 + \dots + \alpha'_n e'_n,$$

то, ввиду ортогональности базы (5) и нормированности вектора  $e_1$ ,

$$(e_1, a) = \alpha_1 (e_1, e_1) + \alpha'_2 (e_1, e'_2) + \dots + \alpha'_n (e_1, e'_n) = \alpha_1,$$

т. е.  $(e_1, a) = 0$  тогда и только тогда, если  $\alpha_1 = 0$ .

Если вектор  $a$  принадлежит к подпространству  $L$ , т. е.  $(e_1, a) = 0$ , то и вектор  $a\varphi$  содержится в  $L$ . Действительно, ввиду симметричности преобразования  $\varphi$ ,

$$(e_1, a\varphi) = (e_1\varphi, a) = (\lambda_0 e_1, a) = \lambda_0 (e_1, a) = \lambda_0 \cdot 0 = 0,$$

т. е. вектор  $a\varphi$  ортогонален к  $e_1$  и поэтому содержится в  $L$ . Это свойство подпространства  $L$ , называемое его *инвариантностью* относительно преобразования  $\varphi$ , позволяет считать  $\varphi$ , рассматриваемое лишь в применении к векторам из  $L$ , линейным преобразованием этого  $(n-1)$ -мерного евклидова пространства. Оно будет даже симметрическим преобразованием пространства  $L$ , так как равенство (1), выполняясь для любых векторов из  $E_n$ , будет выполняться, в частности, для векторов, лежащих в  $L$ .

В силу индуктивного предположения в пространстве  $L$  существует ортонормированная база, состоящая из собственных векторов преобразования  $\varphi$ ; обозначим ее через  $e_2, \dots, e_n$ . Все эти векторы ортогональны к вектору  $e_1$ , а поэтому  $e_1, e_2, \dots, e_n$  будет искомой ортонормированной базой пространства  $E_n$ , состоящей из собственных векторов преобразования  $\varphi$ . Теорема доказана.

### § 37. Приведение квадратичной формы к главным осям. Пары форм

Применим последнюю теорему предшествующего параграфа к доказательству следующей матричной теоремы:

Для всякой симметрической матрицы  $A$  можно найти такую ортогональную матрицу  $Q$ , которая приводит матрицу  $A$  к диагональному виду, т. е. матрица  $Q^{-1}AQ$ , полученная трансформированием матрицы  $A$  матрицей  $Q$ , будет диагональной.

В самом деле, пусть дана симметрическая матрица  $A$  порядка  $n$ . Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — некоторая ортонормированная база  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ , то матрица  $A$  задает в этой базе симметрическое преобразование  $\varphi$ . Как доказано, в  $E_n$  существует ортонормированная база  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , составленная из собственных векторов преобразования  $\varphi$ ; в этой базе  $\varphi$  задается диагональной матрицей  $B$  (см. § 33). Тогда, по § 31,

$$B = Q^{-1}AQ, \quad (1)$$

где  $Q$  — матрица перехода от базы  $f$  к базе  $e$ ,

$$e = Qf. \quad (2)$$

Эта матрица, как матрица перехода от одной ортонормированной базы к другой такой же базе, будет ортогональной — см. § 35. Теорема доказана.

Так как для ортогональной матрицы  $Q$  ее обратная матрица равна транспонированной,  $Q^{-1} = Q'$ , то равенство (1) можно переписать в виде

$$B = Q'AQ.$$

Из § 26 известно, однако, что именно так преобразуется симметрическая матрица  $A$  квадратичной формы, подвергнутой линейному преобразованию неизвестных с матрицей  $Q$ . Учитывая же, что линейное преобразование неизвестных с ортогональной матрицей является ортогональным преобразованием (см. § 35) и что диагональную матрицу имеет квадратичная форма, приведенная к каноническому виду, мы на основании предшествующей теоремы получаем следующую теорему о приведении действительной квадратичной формы к главным осям:

*Всякая действительная квадратичная форма  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  некоторым ортогональным преобразованием неизвестных может быть приведена к каноническому виду.*

Хотя может существовать много различных ортогональных преобразований неизвестных, приводящих данную квадратичную форму к каноническому виду, однако сам этот канонический вид по существу определяется однозначно:

*Каково бы ни было ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  с матрицей  $A$ , коэффициентами этого канонического вида будут характеристические корни матрицы  $A$ , взятые с их кратностями.*

Пусть, в самом деле, форма  $f$  некоторым ортогональным преобразованием приведена к каноническому виду

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \dots + \mu_n y_n^2.$$

Это ортогональное преобразование оставляет инвариантной сумму квадратов неизвестных, а поэтому, если  $\lambda$  — новое неизвестное, то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Переходя к определителям этих квадратичных форм и учитывая, что после выполнения линейного преобразования определитель квадратичной формы умножается на квадрат определителя преобразования (см. § 28), а квадрат определителя ортогонального преобразования равен единице (см. § 35), мы приходим к равенству

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \mu_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (\mu_i - \lambda),$$

из которого вытекает утверждение теоремы.

Этому результату можно придать также матричную формулировку:

*Какова бы ни была ортогональная матрица, приводящая к диагональному виду симметрическую матрицу  $A$ , на главной диагонали полученной диагональной матрицы будут стоять характеристические корни матрицы  $A$ , взятые с их кратностями.*

Практическое разыскание ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к главным осям. В некоторых задачах необходимо знать не только тот канонический вид, к которому приводится действительная квадратичная форма ортогональным преобразованием, но и само ортогональное преобразование, осуществляющее это приведение. Было бы затруднительно разыскивать это преобразование, используя доказательство теоремы о приведении к главным осям, и мы хотим указать иной путь. Именно, нужно лишь научиться находить ортогональную матрицу  $Q$ , приводящую данную симметрическую матрицу  $A$  к диагональному виду, или, что то же самое, находить ее обратную матрицу  $Q^{-1}$ . Ввиду (2) это будет матрица перехода от базы  $e$  к базе  $f$ , т. е. ее строки являются координатными строками (в базе  $e$ ) ортонормированной системы из  $n$  собственных векторов симметрического преобразования  $\varphi$ , определяемого матрицей  $A$  в базе  $e$ . Остается найти такую систему собственных векторов.

Пусть  $\lambda_0$  — любой характеристический корень матрицы  $A$  и пусть его кратность равна  $k_0$ . Из § 33 мы знаем, что совокупность координатных строк всех собственных векторов преобразования  $\varphi$ , относящихся к собственному значению  $\lambda_0$ , совпадает с совокупностью ненулевых решений системы линейных однородных уравнений

$$(A - \lambda_0 E) X = 0; \quad (3)$$

симметричность матрицы  $A$  позволяет написать здесь  $A$  вместо  $A'$ . Из доказанных выше теорем существования ортогональной матрицы,

приводящей симметрическую матрицу  $A$  к диагональному виду, и единственности этого диагонального вида вытекает, что для системы (3) во всяком случае можно найти  $k_0$  линейно независимых решений. Такую систему решений ищем методами, известными из § 12, а затем ортогонализируем и нормируем полученную систему в соответствии с § 34.

Беря в качестве  $\lambda_0$  поочередно все различные характеристические корни симметрической матрицы  $A$  и учитывая, что сумма кратностей этих корней равна  $n$ , мы получим систему из  $n$  собственных векторов преобразования  $\varphi$ , заданных их координатами в базе  $e$ . Для доказательства того, что это будет искомая ортогонализованная система собственных векторов, остается доказать следующую лемму:

*Собственные векторы симметрического преобразования  $\varphi$ , относящиеся к различным собственным значениям, между собой ортогональны.*

Пусть, в самом деле,

$$b\varphi = \lambda_1 b, \quad c\varphi = \lambda_2 c,$$

причем  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Так как

$$(b\varphi, c) = (\lambda_1 b, c) = \lambda_1 (b, c),$$

$$(b, c\varphi) = (b, \lambda_2 c) = \lambda_2 (b, c),$$

то из

$$(b\varphi, c) = (b, c\varphi)$$

следует

$$\lambda_1 (b, c) = \lambda_2 (b, c)$$

или, ввиду  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,

$$(b, c) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Привести к главным осям квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Матрица  $A$  этой формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее характеристический многочлен:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 3).$$

Таким образом, матрица  $A$  имеет трехкратный характеристический корень 1 и простой характеристический корень  $-3$ . Мы уже можем, следовательно, написать тот канонический вид, к которому форма  $\beta$  приводится ортогональным преобразованием:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

Найдем ортогональное преобразование, осуществляющее это приведение. Система линейных однородных уравнений (3) при  $\lambda_0=1$  принимает вид

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 1, и поэтому для нее можно найти три линейно независимых решения. Ими будут, например, векторы

$$b_1 = (1, 1, 0, 0),$$

$$b_2 = (1, 0, 1, 0),$$

$$b_3 = (-1, 0, 0, 1).$$

Ортогонализируя эту систему векторов, мы получим систему векторов

$$c_1 = b_1 = (1, 1, 0, 0),$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1 + b_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$

$$c_3 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + b_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

С другой стороны, система линейных однородных уравнений (3) принимает при  $\lambda_0=-3$  вид

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 3. Ее ненулевым решением служит вектор

$$c_4 = (1, -1, -1, 1).$$

Система векторов  $c_1, c_2, c_3, c_4$  ортогональная. Нормируя ее, мы придем к ортонормированной системе векторов

$$c'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

$$c'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),$$

$$c'_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$c'_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, форма  $f$  приводится к главным осям ортогональным преобразованием

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2, \\y_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}} x_3, \\y_3 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_4, \\y_4 &= \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4.\end{aligned}$$

Следует отметить, что выбор системы линейно независимых собственных векторов, относящихся к кратному собственному значению, является весьма неоднозначным, а поэтому существует много различных ортогональных преобразований, приводящих форму  $f$  к каноническому виду. Мы нашли лишь одно из них.

**Пары форм.** Пусть дана пара действительных квадратичных форм от  $n$  неизвестных,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Существует ли такое невырожденное линейное преобразование неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которое одновременно приводило бы обе эти формы к каноническому виду?

В общем случае ответ будет отрицательным. Рассмотрим, например, пару форм

$$f(x_1, x_2) = x_1^2, \quad g(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Пусть существует невырожденное линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2, \\x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2,\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

приводящее обе эти формы к каноническому виду. Для того чтобы форма  $f$  могла быть приведена преобразованием (4) к каноническому виду, один из коэффициентов  $c_{11}, c_{12}$  должен быть равен нулю, иначе вошел бы член  $2c_{11}c_{12}y_1y_2$ . Меняя, если нужно, нумерацию неизвестных  $y_1, y_2$ , можно положить, что  $c_{12}=0$  и поэтому  $c_{11} \neq 0$ . Мы получим теперь, однако, что

$$g(x_1, x_2) = c_{11}y_1(c_{21}y_1 + c_{22}y_2) = c_{11}c_{21}y_1^2 + c_{11}c_{22}y_1y_2.$$

Так как форма  $g$  также должна была перейти в канонический вид, то  $c_{11}c_{22}=0$ , т. е.  $c_{22}=0$ , что вместе с  $c_{12}=0$  противоречит невырожденности линейного преобразования (4).

Ситуация будет иной, если мы положим, что хотя бы одна из наших форм, например  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , является положительно определенной<sup>1)</sup>. Именно, справедлива теорема:

<sup>1)</sup> Это условие не является, конечно, необходимым; так, формы  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  и  $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$  обе уже имеют канонический вид, хотя среди них нет положительно определенных.

Если  $f$  и  $g$  — пара действительных квадратичных форм от  $n$  неизвестных, причем вторая из них положительно определенная, то существует невырожденное линейное преобразование, одновременно приводящее форму  $g$  к нормальному виду, а форму  $f$  к каноническому виду.

Для доказательства выполним сначала невырожденное линейное преобразование неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

$$X = TY,$$

приводящее положительно определенную форму  $g$  к нормальному виду,

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Форма  $f$  перейдет при этом в некоторую форму  $\varphi$  от новых неизвестных,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Совершим теперь ортогональное преобразование неизвестных  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ,

$$Y = QZ,$$

приводящее форму  $\varphi$  к главным осям,

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2.$$

Это преобразование (см. определение в § 35) переводит сумму квадратов неизвестных  $y_1, y_2, \dots, y_n$  в сумму квадратов неизвестных  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . В результате мы получаем

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2,$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2,$$

т. е. линейное преобразование

$$X = (TQ)Z$$

является искомым.

---