ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 38*. Уравнения второй, третьей и четвертой степени

Основная теорема, доказанная в § 23, устанавливает для любого многочлена n-й степени с числовыми коэффициентами существование n комплексных корней. Ее доказательства (как приведенное выше, так и любые другие из ныне известных) не дают, однако, никаких методов для практического разыскания этих корней, являясь чистыми «доказательствами существования». Поиски таких методов начались, естественно, с попыток вывода формул, аналогичных формуле для решения квадратного уравнения, известной читателю для случая действительных коэффициентов из школьного курса алгебры. Мы покажем сейчас, что эта формула остается справедливой и для квадратных уравнений с комплексными коэффициентами и что аналогичные формулы, хотя и много более громоздкие, могут быть выведены для уравнений третьей и четвертой степени.

Квадратные уравнения. Пусть дано квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0$$

с любыми комплексными коэффициентами; старший коэффициент без ограничения общности можно считать равным единице. Это уравнение можно переписать в виде

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0.$$

Как мы знаем, из комплексного числа $\frac{p^2}{4}-q$ можно извлечь квадратный корень, не выходя за пределы системы комплексных чисел. Два значения этого корня, отличающихся друг от друга лишь знаком, мы запишем в виде $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Поэтому

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

т. е. корни заданного уравнения можно находить по обычной формуле

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Пример. Решить уравнение

$$x^2 - 3x + (3 - i) = 0.$$

Применяя выведенную формулу, получаем:

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - (3 - i)} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3 + 4i}.$$

При помощи методов § 19 мы находим:

$$\sqrt{-3 + 4i} = \pm(1 + 2i),$$

а поэтому

$$x_1 = 2 + i, \quad x_2 = 1 - i.$$

Кубичные уравнения. В отличие от случая квадратных уравнений, до сих пор у нас не было метода для решения кубичных уравнений даже в случае действительных коэффициентов. Сейчас мы выведем для кубичных уравнений формулу, аналогичную формуле для квадратных уравнений, причем сразу допустим, что коэффициенты являются любыми комплексными числами.

Пусть дано кубичное уравнение

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \tag{1}$$

с любыми комплексными коэффициентами. Заменяя в уравнении (1) неизвестное y новым неизвестным x, связанным с y равенством

$$y = x - \frac{a}{3}, \tag{2}$$

мы получим уравнение относительно неизвестного x, не содержащее, как легко проверить, квадрата этого неизвестного, т. е. уравнение вида

$$x^3 + px + q = 0. \tag{3}$$

Если будут найдены корни уравнения (3), то, ввиду (2), мы получим и корни заданного уравнения (1). Нам остается, следовательно, научиться решать «неполное» кубичное уравнение (3) с любыми комплексными коэффициентами.

Уравнение (3) обладает по основной теореме тремя комплексными корнями. Пусть x_0 будет любой из этих корней. Введем вспомогательное неизвестное u и рассмотрим многочлен

$$f(u) = u^2 - x_0 u - \frac{p}{3}.$$

Его коэффициенты — комплексные числа, и поэтому он обладает двумя комплексными корнями α и β, причем, по формулам Вьета,

$$\alpha+\beta=x_0, \tag{4}$$

$$\alpha\beta=-\frac{p}{3}. \tag{5}$$

Подставляя в (3) выражение (4) корня x_0, мы получим:

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0$$

или

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0.$$

Однако из (5) следует $3\alpha\beta+p=0$, и поэтому мы получаем:

$$\alpha^3+\beta^3=-q. \tag{6}$$

С другой стороны, из (5) вытекает

$$\alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}. \tag{7}$$

Равенства (6) и (7) показывают, что числа α^3 и β^3 служат корнями квадратного уравнения

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \tag{8}$$

с комплексными коэффициентами.

Решая уравнение (8), мы получим:

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

откуда [1])

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{9}$$

Мы приходим к следующей *формуле Кардано*, выражающей корни уравнения (3) через его коэффициенты при помощи квадратных и кубичных радикалов:

$$x_0=\alpha+\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Так как кубичный радикал имеет в поле комплексных чисел три значения, то формулы (9) дают три значения для α и три для β. Нельзя, однако, применяя формулу Кардано, комбинировать любое значение радикала α с любым значением радикала β: для данного значения α следует брать лишь то из трех значений β, которое удовлетворяет условию (5).

---

[1]) Безразлично, какой из корней уравнения (8) принять за α^3 и какой — за β^3, так как α и β в равенстве (6) и (7), а также в выражение (4) для x_0 входят симметричным образом.

Пусть α_1 будет любое из трех значений радикала α. Тогда два других можно получить, как доказано в § 19, умножением α_1 на кубичные корни ε и ε^2 из единицы:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \varepsilon, \quad \alpha_3 = \alpha_1 \varepsilon^2.$$

Обозначим через β_1 то из трех значений радикала β, которое соответствует значению α_1 радикала α на основании (5), т. е. $\alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3}$. Два других значения β будут

$$\beta_2 = \beta_1 \varepsilon, \quad \beta_3 = \beta_1 \varepsilon^2.$$

Так как, ввиду $\varepsilon^3 = 1$,

$$\alpha_2\beta_3 = \alpha_1\varepsilon \cdot \beta_1\varepsilon^2 = \alpha_1\beta_1\varepsilon^3 = \alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3},$$

то значению α_2 радикала α соответствует значение β_3 радикала β; аналогично значению α_3 соответствует значение β_2. Таким образом, все три корня уравнения (3) могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1, \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2, \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Кубичные уравнения с действительными коэффициентами. Посмотрим, что можно сказать о корнях неполного кубичного уравнения

$$x^3 + px + q = 0, \tag{11}$$

если его коэффициенты действительны. Оказывается, что в этом случае основную роль играет знак выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, стоящего в формуле Кардано под знаком квадратного корня. Заметим, что знак этого выражения противоположен знаку выражения

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right),$$

называемого *дискриминантом* уравнения (11) (ср. ниже, § 54); в дальнейших формулировках будет использоваться знак дискриминанта.

1) Пусть $D < 0$. В этом случае в формуле Кардано под знаком каждого из квадратных радикалов стоит положительное число, а поэтому под знаком каждого из кубичных радикалов оказываются действительные числа. Однако кубичный корень из действительного числа имеет одно действительное и два сопряженных комплексных значения. Пусть α_1 будет действительное значение радикала α; тогда значение β_1 радикала β, соответствующее α_1 на основании формулы (5), также будет действительным ввиду действительности числа p. Таким образом, корень $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$ уравнения (11) оказы-

вается действительным. Два других корня мы найдем, заменяя в формулах (10) настоящего параграфа корни из единицы $\varepsilon=\varepsilon_1$ и $\varepsilon^2=\varepsilon_2$ их выражениями (7) из § 19:

$$x_2=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}+i\sqrt{3}\frac{\alpha_1-\beta_1}{2},$$

$$x_3=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}-i\sqrt{3}\frac{\alpha_1-\beta_1}{2};$$

эти два корня оказываются ввиду действительности чисел α_1 и β_1 сопряженными комплексными числами, причем коэффициент при мнимой части отличен от нуля, так как $\alpha_1\neq\beta_1$, — эти числа являются значениями различных кубичных радикалов.

Таким образом, *если* $D<0$, *то уравнение* (11) *имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня.*

2) Пусть $D=0$. В этом случае

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Пусть α_1 будет действительное значение радикала α; тогда β_1 также будет, ввиду (5), действительным числом, причем $\alpha_1=\beta_1$. Заменяя в формулах (10) β_1 через α_1 и используя очевидное равенство $\varepsilon+\varepsilon^2=-1$, мы получим:

$$x_1=2\alpha_1,\quad x_2=\alpha_1(\varepsilon+\varepsilon^2)=-\alpha_1,\quad x_3=\alpha_1(\varepsilon^2+\varepsilon)=-\alpha_1.$$

Таким образом, *если* $D=0$, *то все корни уравнения* (11) *действительны, причем два из них равны между собой.*

3) Пусть, наконец, $D>0$. В этом случае в формуле Кардано под знаком квадратного корня стоит отрицательное действительное число, а поэтому под знаками кубичных радикалов стоят сопряженные комплексные числа. Таким образом, все значения радикалов α и β будут теперь комплексными числами. Среди корней уравнения (11) должен, однако, содержаться хотя бы один действительный. Пусть это будет корень

$$x_1=\alpha_0+\beta_0.$$

Так как действительны и сумма чисел α_0 и β_0, и их произведение, равное $-\frac{p}{3}$, то числа α_0 и β_0 сопряжены между собой как корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами. Но тогда

сопряжены между собой и числа $\alpha_0\varepsilon$ и $\beta_0\varepsilon^2$, а также числа $\alpha_0\varepsilon^2$ и $\beta_0\varepsilon$, откуда следует, что корни уравнения (11)

$$x_2=\alpha_0\varepsilon+\beta_0\varepsilon^2, \quad x_3=\alpha_0\varepsilon^2+\beta_0\varepsilon$$

также будут действительными числами.

Мы получили, что все три корня уравнения (11) действительны, причем легко показать, что среди них нет равных. В самом деле, в противном случае выбор корня x_1 можно было бы осуществить так, чтобы имело место равенство $x_2=x_3$, откуда

$$\alpha_0(\varepsilon-\varepsilon^2)=\beta_0(\varepsilon-\varepsilon^2),$$

т. е. $\alpha_0=\beta_0$, что явно невозможно.

Таким образом, *если* $D>0$, *то уравнение* (11) *имеет три различных действительных корня.*

Рассмотренный сейчас последний случай показывает, что практическое значение формулы Кардано весьма невелико. В самом деле, хотя при $D>0$ все корни уравнения (11) с действительными коэффициентами являются действительными числами, однако разыскание их по формуле Кардано требует извлечения кубичных корней из комплексных чисел, что мы умеем делать лишь переходом к тригонометрической форме этих чисел. Поэтому запись корней с помощью радикалов теряет практическое значение. При помощи методов, выходящих за рамки нашей книги, можно было бы доказать, что в рассматриваемом случае корни уравнения (11) вообще никаким способом не могут быть выражены через коэффициенты при помощи радикалов с действительными подкоренными выражениями. Этот случай решения уравнения (11) называется *неприводимым* (не смешивать с неприводимостью многочленов!).

Примеры. 1. Решить уравнение

$$y^3+3y^2-3y-14=0.$$

Подстановка $y=x-1$ приводит это уравнение к виду

$$x^3-6x-9=0. \tag{12}$$

Здесь $p=-6$, $q=-9$, поэтому

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{49}{4}>0,$$

т. е. уравнение (12) имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня. По (9) $\alpha=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{8}$, $\beta=\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{1}$. Поэтому $\alpha_1=2$, $\beta_1=1$, т. е. $x_1=3$. Два других корня найдем по формулам (10): $x_2=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда следует, что корнями заданного уравнения служат числа

$$y_1=2,\ y_2=-\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y_3=-\frac{5}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Решить уравнение

$$x^3-12x+16=0.$$

Здесь $p=-12$, $q=16$, поэтому

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

Отсюда следует: $\alpha=\sqrt[3]{-8}$, т. е. $\alpha_1=-2$. Поэтому

$$x_1=-4,\ x_2=x_3=2.$$

8. Решить уравнение

$$x^3-19x+30=0.$$

Здесь $p=-19$, $q=30$, поэтому

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{784}{27}<0.$$

Таким образом, если оставаться в области действительных чисел, формула Кардано к этому уравнению неприменима, хотя его корнями являются действительные числа 2, 3 и —5.

Уравнения четвертой степени. Решение уравнения четвертой степени

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0 \tag{13}$$

с произвольными комплексными коэффициентами сводится к решению некоторого вспомогательного кубичного уравнения. Достигается это следующим методом, принадлежащим Феррари.

Предварительно уравнение (13) подстановкой $y=x-\frac{a}{4}$ приводится к виду

$$x^4+px^2+qx+r=0. \tag{14}$$

Затем левая часть этого уравнения следующим образом тождественно преобразуется при помощи вспомогательного параметра α:

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2+qx+r-\frac{p^2}{4}-\alpha^2-2\alpha x^2-p\alpha$$

или

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-qx+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)\right]=0. \tag{15}$$

Подберем теперь α так, чтобы многочлен, стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Для этого он должен иметь один двукратный корень, т. е. должно иметь место равенство

$$q^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0. \tag{16}$$

Равенство (16) является кубичным уравнением относительно неизвестного α с комплексными коэффициентами. Это уравнение имеет, как мы знаем, три комплексных корня. Пусть α_0 будет один из них; он выражается ввиду формулы Кардано при помощи радикалов через коэффициенты уравнения (16), т. е. через коэффициенты уравнения (14).

При этом выборе значения для α многочлен, стоящий в квадратных скобках в (15), имеет двукратный корень $\frac{q}{4\alpha_0}$, и поэтому уравнение (15) принимает вид

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(x-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2=0,$$

т. е. оно распадается на два квадратных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x^2-\sqrt{2\alpha_0}x+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0,\\ x^2+\sqrt{2\alpha_0}x+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Так как от уравнения (14) к уравнениям (17) мы пришли при помощи тождественных преобразований, то корни уравнений (17) будут служить корнями и для уравнения (14). Легко видеть вместе с тем, что корни уравнения (14) выражаются через коэффициенты при помощи радикалов. Мы не будем выписывать соответствующих формул ввиду их громоздкости и практической бесполезности, не станем также исследовать отдельно случай, когда уравнение (14) имеет действительные коэффициенты.

Замечания об уравнениях высших степеней. В то время как методами решения квадратных уравнений владели еще древние греки, открытие изложенных выше методов решения уравнений третьей и четвертой степени относится к XVI веку. После этого почти три столетия продолжались безуспешные попытки сделать следующий шаг, т. е. найти формулы, выражающие при помощи радикалов корни любого уравнения пятой степени (т. е. уравнения пятой степени с буквенными коэффициентами) через его коэффициенты. Эти попытки прекратились лишь после того, как Абель в двадцатых годах прошлого века доказал, что такие формулы для уравнений n-й степени при любом $n\geqslant 5$ заведомо не могут быть найдены.

Этот результат Абеля не исключал, однако, возможности того, что корни всякого конкретного многочлена с числовыми коэффициентами все же каким-либо способом выражаются через коэффициенты при помощи некоторой комбинации радикалов, т. е., как принято говорить, что всякое уравнение разрешимо в радикалах. Полностью вопрос об условиях, при которых данное уравнение разрешимо в радикалах, был исследован Галуа в тридцатых годах прошлого века. Оказалось, что для всякого n, начиная с $n=5$, можно указать неразрешимые в радикалах уравнения n-й степени даже с целочисленными коэффициентами. Таким будет, например, уравнение

$$x^5-4x-2=0.$$

Исследования Галуа оказали решающее влияние на дальнейшее развитие алгебры. Их изложение не входит, однако, в наши задачи.