§ 39. Границы корней

Мы знаем, что не существует метода для разыскания точных значений корней многочленов с числовыми коэффициентами. Тем не менее, самые различные проблемы механики, физики и всевозможных отраслей техники сводятся к вопросу о корнях многочленов, притом иногда достаточно высоких степеней. Это обстоятельство явилось поводом для весьма многочисленных исследований, имевших целью научиться делать те или иные высказывания о корнях многочлена с числовыми коэффициентами, не зная этих корней. Изучался, например, вопрос о расположении корней на комплексной плоскости (условия, при которых все корни лежат внутри единичного круга, т. е. по модулю меньше единицы, или условия для того, чтобы все корни лежали в левой полуплоскости, т. е. имели бы отрицательные действительные части, и т. д.). Для многочленов с действительными коэффициентами разрабатывались методы определения числа их действительных корней, разыскивались границы, между которыми эти корни могут находиться, и т. д. Наконец, много исследований было посвящено методам приближенного вычисления корней: в технических приложениях обычно достаточно знать лишь приближенные значения корней с некоторой заранее данной точностью и если бы, например, корни многочлена даже записывались в радикалах, эти радикалы все равно были бы заменены их приближенными значениями.

Все эти исследования составляли в свое время основное содержание высшей алгебры. Мы включаем в наш курс лишь весьма небольшую часть относящихся сюда результатов, причем, учитывая первоочередные потребности приложений, ограничиваемся случаем многочленов с действительными коэффициентами и их действительных корней, лишь иногда выходя за эти рамки. При этом мы будем систематически рассматривать многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами как (непрерывную) действительную функцию действительного переменного x и всюду, где это будет полезно, будем применять результаты и методы математического анализа.

Исследование действительных корней многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами полезно начинать с рассмотрения графика этого многочлена: *действительными корнями многочлена будут, очевидно, абсциссы точек пересечения его графика с осью x и только они.*

Рассмотрим, например, многочлен пятой степени

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3.$$

На основании результатов § 24 о корнях этого многочлена можно утверждать следующее: так как его степень нечетна, то $h(x)$ обладает хотя бы одним действительным корнем; если же число действительных корней больше единицы, то оно равно трем или пяти, так как комплексные корни попарно сопряжены.

Рассмотрение графика многочлена $h(x)$ позволяет сказать больше о его корнях. Построим этот график (рис. 9)[1]), беря лишь целые значения x и вычисляя соответствующие значения $h(x)$ хотя бы методом Горнера:

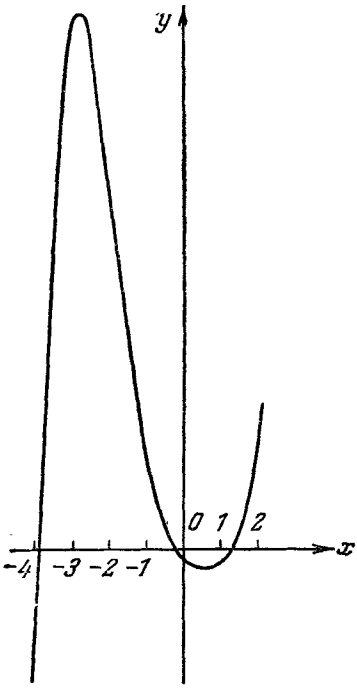

Рис. 9.

x	$h(x)$
.	.
.	.
.	.
—4	— 39
—3	144
—2	83
—1	18
0	—3
1	—4
2	39
.	.
.	.

Мы видим, что многочлен $h(x)$ во всяком случае имеет три действительных корня — положительный корень α_1 и два отрицательных корня α_2 и α_3, причем

$$1 < \alpha_1 < 2, \quad -1 < \alpha_2 < 0,$$
$$-4 < \alpha_3 < -3.$$

Информация о (действительных) корнях многочлена, получающаяся от рассмотрения графика, практически обычно оказывается весьма удовлетворительной. Однако каждый раз остаются сомнения, действительно ли нами найдены все корни. Так, в рассмотренном примере мы не показали, что правее точки $x = 2$ и левее $x = -4$ уже нет корней многочлена. Больше того, так как мы брали лишь целочисленные значения x, то можно допустить, что построенный нами график не вполне точно отражает истинное поведение функции $h(x)$, не учитывает, быть может, ее более мелких колебаний и поэтому упускает некоторые корни.

Правда, можно было бы при построении графика брать не только целочисленные значения x, а значения с точностью до 0,1 или 0,01. Этим, однако, сразу чрезвычайно усложнилось бы вычисление значений $h(x)$, в то время как отмеченные выше сомнения отнюдь не были бы ликвидированы. С другой стороны, можно было бы методами

[1]) На рисунке масштаб по оси y взят в десять раз меньшим, чем по оси x.

математического анализа исследовать функцию $h(x)$ на максимум и минимум и таким путем сравнить наш график с истинным поведением функции; это приводит, однако, к вопросу о корнях производной $h'(x)$, т. е. к такой же задаче, как и та, которой мы занимаемся.

Отсюда вытекает потребность в более совершенных методах для разыскания границ, между которыми расположены действительные корни многочлена с действительными коэффициентами, и для определения числа этих корней. Сейчас мы будем заниматься вопросом о границах действительных корней, отнеся вопрос об их числе к следующим параграфам.

Доказательство леммы о модуле старшего члена (см. § 23) уже дает некоторую границу для модулей корней многочлена. Действительно, полагая в неравенстве (3) § 23 $k=1$, мы получаем, что при

$$|x| \geqslant 1+\frac{A}{|a_0|}, \tag{1}$$

где a_0 — старший коэффициент, а A — максимум модулей остальных коэффициентов, модуль старшего члена многочлена больше модуля суммы всех остальных членов, а поэтому никакое значение x, удовлетворяющее неравенству (1), не может служить корнем этого многочлена.

Таким образом, *для многочлена $f(x)$ с любыми числовыми коэффициентами число $1+\frac{A}{|a_0|}$ служит верхней границей для модулей всех его корней, действительных и комплексных.* Так, для рассмотренного выше многочлена $h(x)$ этой границей, ввиду $a_0=1$, $A=8$, служит число 9.

Эта граница обычно оказывается, однако, слишком высокой, особенно если мы интересуемся лишь границами действительных корней. Сейчас будут изложены другие методы, более точные. При этом следует помнить, что если указываются границы, между которыми должны содержаться действительные корни многочлена, то этим вовсе не утверждается, что такие корни на самом деле существуют.

Покажем сначала, что *достаточно уметь находить лишь верхнюю границу положительных корней любого многочлена.* В самом деле, пусть дан многочлен $f(x)$ степени n и пусть N_0 будет верхней границей его положительных корней. Рассмотрим многочлены

$$\varphi_1(x)=x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$\varphi_2(x)=f(-x),$$
$$\varphi_3(x)=x^n f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

и найдем верхние границы их положительных корней; пусть это будут соответственно числа N_1, N_2, N_3. Тогда *число $\frac{1}{N_1}$ будет*

нижней границей положительных корней многочлена $f(x)$: *если* α есть положительный корень $f(x)$, то $\frac{1}{\alpha}$ будет положительным корнем для $\varphi_1(x)$, и из $\frac{1}{\alpha} < N_1$ следует $\alpha > \frac{1}{N_1}$. Аналогично *числа* $-N_2$ *и* $-\frac{1}{N_3}$ *служат соответственно нижней и верхней границами отрицательных корней многочлена* $f(x)$. Таким образом, все положительные корни многочлена $f(x)$ удовлетворяют неравенствам $\frac{1}{N_1} < x < N_0$, все отрицательные корни — неравенствам

$$-N_2 < x < -\frac{1}{N_3}.$$

Для определения верхней границы положительных корней можно применить следующий метод. Пусть дан многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с действительными коэффициентами, причем $a_0 > 0$. Пусть, далее, a_k, $k \geqslant 1$, будет первым из отрицательных коэффициентов; если бы таких коэффициентов не было, то многочлен $f(x)$ вообще не мог бы иметь положительных корней. Наконец, пусть B будет наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов. Тогда *число*

$$1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

служит верхней границей положительных корней многочлена $f(x)$.

В самом деле, полагая $x > 1$ и заменяя каждый из коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ числом нуль, а каждый из коэффициентов $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ — числом $-B$, мы можем лишь уменьшить значение многочлена, т. е.

$$f(x) \geqslant a_0x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + x + 1) = a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1},$$

т. е., ввиду $x > 1$,

$$f(x) > a_0x^n - \frac{Bx^{n-k+1}}{x-1} = \frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0x^{k-1}(x-1) - B]. \qquad (2)$$

Если

$$x > 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \qquad (3)$$

то, так как

$$a_0x^{k-1}(x-1) - B \geqslant a_0(x-1)^k - B,$$

выражение в квадратных скобках в формуле (2) окажется положительным, т. е., ввиду (2), значение $f(x)$ будет строго положительным. Таким образом, значения x, удовлетворяющие неравенству (3), не могут служить корнями для $f(x)$, что и требовалось доказать.

Для рассмотренного выше многочлена $h(x)$ этот метод дает, ввиду $k=2$ и $B=7$, в качестве верхней границы положительных корней число $1+\sqrt{7}$, что можно заменить ближайшим бо́льшим целым числом 4.

Из многочисленных других методов разыскания верхней границы положительных корней мы изложим еще лишь *метод Ньютона*. Этот метод более громоздок, чем изложенный выше, но зато дает обычно очень хороший результат.

Пусть дан многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом a_0. *Если при $x=c$ многочлен $f(x)$ и все его последовательные производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ принимают положительные значения, то число c служит верхней границей положительных корней.*

В самом деле, по формуле Тэйлора (см. § 23)

$$f(x)=f(c)+(x-c)f'(c)+(x-c)^2\frac{f''(c)}{2!}+\ldots+(x-c)^n\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Мы видим, что если $x\geqslant c$, то справа будет стоять строго положительное число, т. е. такие значения x не могут служить корнями для $f(x)$.

При разыскании для данного многочлена $f(x)$ соответствующего числа c полезно поступать следующим образом. Производная $f^{(n)}(x)=$ $=n!a_0$ является положительным числом, поэтому многочлен $f^{(n-1)}(x)$ является возрастающей функцией x. Существует, следовательно, такое число c_1, что при $x\geqslant c_1$ производная $f^{(n-1)}(x)$ положительна. Отсюда следует, что при $x\geqslant c_1$ производная $f^{(n-2)}(x)$ будет возрастающей функцией x, поэтому существует такое число c_2, $c_2\geqslant c_1$, что при $x\geqslant c_2$ производная $f^{(n-2)}(x)$ также будет положительной. Продолжая далее, мы дойдем, наконец, до искомого числа c.

Применим метод Ньютона к рассматривавшемуся выше многочлену $h(x)$. Мы имеем:

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,$$
$$h'(x)=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,$$
$$h''(x)=20x^3+24x^2-30x+16,$$
$$h'''(x)=60x^2+48x-30,$$
$$h^{\mathrm{IV}}(x)=120x+48,$$
$$h^{\mathrm{V}}(x)=120.$$

Легко проверить (хотя бы методом Горнера), что все эти многочлены положительны при $x=2$. Таким образом, число 2 служит верхней границей положительных корней многочлена $h(x)$ — результат, много более точный, чем полученные выше другими методами.

Для разыскания нижней границы отрицательных корней многочлена $h(x)$ рассмотрим многочлен $\varphi_2(x) = -h(-x)$ [1]). Так как

$$\varphi_2(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3,$$
$$\varphi_2'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 15x^2 - 16x - 7,$$
$$\varphi_2''(x) = 20x^3 - 24x^2 - 30x - 16,$$
$$\varphi_2'''(x) = 60x^2 - 48x - 30,$$
$$\varphi_2^{IV}(x) = 120x - 48,$$
$$\varphi_2^{V}(x) = 120,$$

а все эти многочлены положительны, как легко проверить, при $x = 4$, то число 4 служит верхней границей положительных корней для $\varphi_2(x)$, и поэтому число -4 будет нижней границей отрицательных корней для $h(x)$.

Рассматривая, наконец, многочлены

$$\varphi_1(x) = -x^5 h\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1,$$

$$\varphi_3(x) = -x^5 h\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1,$$

мы найдем для них, снова применяя метод Ньютона, в качестве верхних границ положительных корней соответственно числа 1 и 4, а поэтому нижней границей положительных корней многочлена $h(x)$ служит число $\frac{1}{1} = 1$, верхней же границей отрицательных корней — число $-\frac{1}{4}$.

Таким образом, положительные корни многочлена $h(x)$ расположены между числами 1 и 2, отрицательные корни — между числами -4 и $-\frac{1}{4}$. Этот результат очень хорошо согласуется с тем, что было найдено выше при рассмотрении графика.

§ 40. Теорема Штурма

Теперь мы перейдем к вопросу о числе действительных корней многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами. Мы будем при этом интересоваться как общим числом действительных корней, так и отдельно числом положительных и числом отрицательных корней и вообще числом корней, заключенных между заданными границами a и b. Существует несколько методов для разыскания точного числа корней, причем все они весьма громоздки; среди них более удобным является *метод Штурма*, который и будет сейчас изложен.

---

[1]) Мы берем $-h(-x)$ вместо $h(-x)$ потому, что для применимости метода Ньютона старший коэффициент должен быть положительным. На корни многочлена $\varphi_2(x)$ эта перемена знака не оказывает, понятно, никакого влияния.