Для разыскания нижней границы отрицательных корней многочлена $h(x)$ рассмотрим многочлен $\varphi_2(x) = -h(-x)$[1]. Так как

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3,\\
\varphi_2'(x) &= 5x^4 - 8x^3 - 15x^2 - 16x - 7,\\
\varphi_2''(x) &= 20x^3 - 24x^2 - 30x - 16,\\
\varphi_2'''(x) &= 60x^2 - 48x - 30,\\
\varphi_2^{\mathrm{IV}}(x) &= 120x - 48,\\
\varphi_2^{\mathrm{V}}(x) &= 120,
\end{aligned}$$

а все эти многочлены положительны, как легко проверить, при $x = 4$, то число 4 служит верхней границей положительных корней для $\varphi_2(x)$, и поэтому число -4 будет нижней границей отрицательных корней для $h(x)$.

Рассматривая, наконец, многочлены

$$\varphi_1(x) = -x^5 h\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1,$$

$$\varphi_3(x) = -x^5 h\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1,$$

мы найдем для них, снова применяя метод Ньютона, в качестве верхних границ положительных корней соответственно числа 1 и 4, а поэтому нижней границей положительных корней многочлена $h(x)$ служит число $\frac{1}{1} = 1$, верхней же границей отрицательных корней — число $-\frac{1}{4}$.

Таким образом, положительные корни многочлена $h(x)$ расположены между числами 1 и 2, отрицательные корни — между числами -4 и $-\frac{1}{4}$. Этот результат очень хорошо согласуется с тем, что было найдено выше при рассмотрении графика.

§ 40. Теорема Штурма

Теперь мы перейдем к вопросу о числе действительных корней многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами. Мы будем при этом интересоваться как общим числом действительных корней, так и отдельно числом положительных и числом отрицательных корней и вообще числом корней, заключенных между заданными границами a и b. Существует несколько методов для разыскания точного числа корней, причем все они весьма громоздки; среди них более удобным является *метод Штурма*, который и будет сейчас изложен.

---

[1] Мы берем $-h(-x)$ вместо $h(-x)$ потому, что для применимости метода Ньютона старший коэффициент должен быть положительным. На корни многочлена $\varphi_2(x)$ эта перемена знака не оказывает, понятно, никакого влияния.

Введем сначала одно определение, которое будет использоваться и в следующем параграфе.

Пусть дана некоторая упорядоченная конечная система действительных чисел, отличных от нуля, например

$$1,\ 3,\ -2,\ 1,\ -4,\ -8,\ -3,\ 4,\ 1. \tag{1}$$

Выпишем последовательно знаки этих чисел:

$$+,\ +,\ -,\ +,\ -,\ -,\ -,\ +,\ +. \tag{2}$$

Мы видим, что в системе знаков (2) четыре раза стоят рядом противоположные знаки. Ввиду этого говорят, что в упорядоченной системе (1) имеют место четыре *перемены знаков*. Число перемен знаков можно подсчитать, понятно, для любой упорядоченной конечной системы отличных от нуля действительных чисел.

Рассмотрим теперь многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами, причем будем предполагать, что многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней, так как иначе мы могли бы его разделить на наибольший общий делитель его с его производной. Конечная упорядоченная система отличных от нуля многочленов с действительными коэффициентами

$$f(x)=f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_s(x) \tag{3}$$

называется *системой Штурма* для многочлена $f(x)$, если выполняются следующие требования:

1) Соседние многочлены системы (3) не имеют общих корней.

2) Последний многочлен, $f_s(x)$, не имеет действительных корней.

3) Если α — действительный корень одного из промежуточных многочленов $f_k(x)$ системы (3), $1 \leqslant k \leqslant s-1$, то $f_{k-1}(\alpha)$ и $f_{k+1}(\alpha)$ имеют разные знаки.

4) Если α — действительный корень многочлена $f(x)$, то произведение $f(x)f_1(x)$ меняет знак с минуса на плюс, когда x, возрастая, проходит через точку α.

Вопрос о том, всякий ли многочлен обладает системой Штурма, будет рассмотрен ниже; сейчас же, предполагая, что $f(x)$ такой системой обладает, покажем, как она может быть использована для нахождения числа действительных корней.

Если действительное число c не является корнем данного многочлена $f(x)$, а (3) — система Штурма для этого многочлена, то возьмем систему действительных чисел

$$f(c),\ f_1(c),\ f_2(c),\ \ldots,\ f_s(c),$$

вычеркнем из нее все числа, равные нулю, и обозначим через $W(c)$ число перемен знаков в оставшейся системе; будем называть $W(c)$

числом перемен знаков в системе Штурма (3) *многочлена* $f(x)$ *при* $x=c$[1].

Справедлива следующая

Теорема Штурма. *Если действительные числа* a *и* b, $a<b$, *не являются корнями многочлена* $f(x)$, *не имеющего кратных корней, то* $W(a) \geqslant W(b)$ *и разность* $W(a)-W(b)$ *равна числу действительных корней многочлена* $f(x)$, *заключенных между* a *и* b.

Таким образом, для определения числа действительных корней многочлена $f(x)$, заключенных между a и b (напоминаем, что $f(x)$ по условию не имеет кратных корней), нужно лишь установить, насколько уменьшается число перемен знаков в системе Штурма этого многочлена при переходе от a к b.

Для доказательства теоремы рассмотрим, как меняется число $W(x)$ при возрастании x. Пока x, возрастая, не встретит корня ни одного из многочленов системы Штурма (3), знаки многочленов этой системы не будут меняться, и поэтому число $W(x)$ останется без изменения. Ввиду этого, а также ввиду условия 2) из определения системы Штурма, нам остается рассмотреть два случая: переход x через корень одного из промежуточных многочленов $f_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$, и переход x через корень самого многочлена $f(x)$.

Пусть α будет корнем многочлена $f_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$. Тогда, по условию 1), $f_{k-1}(\alpha)$ и $f_{k+1}(\alpha)$ отличны от нуля. Можно найти, следовательно, такое положительное число ε, быть может и очень малое, что в отрезке $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ многочлены $f_{k-1}(x)$ и $f_{k+1}(x)$ не имеют корней и поэтому сохраняют постоянные знаки, причем, по условию 3), эти знаки различны. Отсюда следует, что каждая из систем чисел

$$f_{k-1}(\alpha-\varepsilon),\ f_k(\alpha-\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha-\varepsilon) \tag{4}$$

и

$$f_{k-1}(\alpha+\varepsilon),\ f_k(\alpha+\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha+\varepsilon) \tag{5}$$

обладает ровно одной переменой знаков независимо от того, каковы знаки чисел $f_k(\alpha-\varepsilon)$ и $f_k(\alpha+\varepsilon)$. Так, например, если многочлен $f_{k-1}(x)$ на рассматриваемом отрезке отрицателен, а $f_{k+1}(x)$ положителен и если $f_k(\alpha-\varepsilon)>0$, $f_k(\alpha+\varepsilon)<0$, то системам (4) и (5) соответствуют системы знаков

$$-,\ +,\ +;\ -,\ -,\ +.$$

Таким образом, при переходе x через корень одного из промежуточных многочленов системы Штурма перемены знаков в этой системе

[1] Само собой разумеется, что перемены знаков в системе Штурма многочлена $f(x)$ не имеют ничего общего с переменой знака самого многочлена $f(x)$, происходящей от прохождения x через корень этого многочлена.

могут лишь перемещаться, но не возникают вновь и не исчезают, а поэтому число $W(x)$ при таком переходе не меняется.

Пусть, с другой стороны, α будет корнем самого данного многочлена $f(x)$. По условию 1) α не будет корнем для $f_1(x)$. Существует, следовательно, такое положительное число ε, что отрезок $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ не содержит корней многочлена $f_1(x)$, а поэтому $f_1(x)$ сохраняет на этом отрезке постоянный знак. Если этот знак положителен, то ввиду условия 4) сам многочлен $f(x)$ при переходе x через α меняет знак с минуса на плюс, т. е. $f(\alpha-\varepsilon)<0, f(\alpha+\varepsilon)>0$. Системам чисел

$$f(\alpha-\varepsilon),\ f_1(\alpha-\varepsilon) \text{ и } f(\alpha+\varepsilon),\ f_1(\alpha+\varepsilon) \tag{6}$$

соответствуют, следовательно, системы знаков

$$-,\ + \text{ и } +,\ +,$$

т. е. в системе Штурма теряется одна перемена. Если же знак $f_1(x)$ на отрезке $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ отрицателен, то снова, ввиду условия 4), многочлен $f(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе x через α, т. е. $f(\alpha-\varepsilon)>0, f(\alpha+\varepsilon)<0$; системам чисел (6) соответствуют теперь системы знаков

$$+,\ - \text{ и } -,\ -,$$

т. е. в системе Штурма снова теряется одна перемена.

Таким образом, *число $W(x)$ меняется (при возрастании x) лишь при переходе x через корень многочлена $f(x)$, причем в этом случае оно уменьшается ровно на единицу.*

Этим доказана, очевидно, теорема Штурма. Для того чтобы воспользоваться ею для разыскания общего числа действительных корней многочлена $f(x)$, достаточно в качестве a взять нижний предел отрицательных корней, в качестве b — верхний предел положительных корней. Проще, однако, поступить следующим образом. Ввиду леммы, доказанной в § 23, существует такое положительное число N, быть может и очень большое, что при $|x|>N$ знаки всех многочленов системы Штурма будут совпадать со знаками их старших членов. Иными словами, существует столь большое положительное значение неизвестного x, что знаки соответствующих ему значений всех многочленов системы Штурма совпадают со знаками их старших коэффициентов; это значение x, вычислять которое нет необходимости, условно обозначается символом ∞. Существует, с другой стороны, столь большое по абсолютной величине отрицательное значение x, что знаки соответствующих ему значений многочленов системы Штурма совпадают со знаками их старших коэффициентов для многочленов четной степени и противоположны знакам старших коэффициентов для многочленов нечетной степени; это значение x условимся обозначать через $-\infty$. В отрезке $(-\infty, \infty)$ содержатся, очевидно, все действительные корни всех многочленов системы Штурма и, в частности, все действительные корни многочлена $f(x)$. Применяя к этому отрезку теорему Штурма, мы найдем число этих корней, применение же теоремы Штурма к отрезкам $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ дает соответственно число отрицательных и число положительных корней многочлена $f(x)$.

Нам остается показать, что *всякий многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами, не имеющий кратных корней, обладает системой Штурма.* Из различных методов, используемых для построения такой системы, мы изложим один, наиболее употребительный. Положим $f_1(x)=f'(x)$, чем обеспечивается выполнение условия 4) из определения системы Штурма. Действительно, если α — действительный корень многочлена $f(x)$, то $f'(\alpha)\neq 0$. Если $f'(\alpha)>0$, то $f'(x)>0$ в окрестности точки α, а поэтому $f(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе x через α; это же верно тогда и для произведения $f(x)f_1(x)$. Аналогичные рассуждения проходят и в случае $f'(\alpha)<0$. Делим затем $f(x)$ на $f_1(x)$ и остаток от этого деления, взятый с обратным знаком, принимаем за $f_2(x)$:

$$f(x)=f_1(x)q_1(x)-f_2(x).$$

Вообще, если многочлены $f_{k-1}(x)$ и $f_k(x)$ уже найдены, то $f_{k+1}(x)$ будет остатком от деления $f_{k-1}(x)$ на $f_k(x)$, взятым с обратным знаком:

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)q_k(x)-f_{k+1}(x). \tag{7}$$

Изложенный здесь метод отличается от алгоритма Евклида, примененного к многочленам $f(x)$ и $f'(x)$, лишь тем, что у остатка каждый раз меняется знак на обратный и следующее деление производится уже на этот остаток с обратным знаком. Так как при разыскании наибольшего общего делителя такая перемена знаков не существенна, то наш процесс остановится на некотором $f_s(x)$, являющемся наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $f'(x)$, причем из отсутствия у $f(x)$ кратных корней, т. е. из его взаимной простоты с $f'(x)$, будет следовать, что на самом деле $f_s(x)$ является некоторым отличным от нуля действительным числом.

Отсюда вытекает, что построенная нами система многочленов

$$f(x)=f_0(x),\quad f'(x)=f_1(x),\quad f_2(x),\ \ldots,\ f_s(x)$$

удовлетворяет и условию 2) из определения системы Штурма. Для доказательства выполнения условия 1) предположим, что соседние многочлены $f_k(x)$ и $f_{k+1}(x)$ обладают общим корнем α. Тогда, по (7), α будет корнем и для многочлена $f_{k-1}(x)$. Переходя к равенству

$$f_{k-2}(x)=f_{k-1}(x)q_{k-1}(x)-f_k(x),$$

мы получим, что α служит корнем и для $f_{k-2}(x)$. Продолжая далее, мы получим, что α служит общим корнем для $f(x)$ и $f'(x)$, что противоречит, однако, нашим предположениям. Наконец, выполнение условия 3) вытекает непосредственно из равенства (7): если $f_k(\alpha)=0$, то $f_{k-1}(\alpha)=-f_{k+1}(\alpha)$.

Применим метод Штурма к рассматривавшемуся в предыдущем параграфе многочлену

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3.$$

Мы не будем при этом предварительно проверять, что $h(x)$ не имеет кратных корней, так как метод построения системы Штурма, изложенный выше, одновременно служит для проверки взаимной простоты многочлена и его производной.

Найдем систему Штурма для $h(x)$, применяя указанный метод. При этом в процессе деления мы будем, в отличие от алгоритма Евклида, умножать и сокращать лишь на произвольные положительные числа, так как знаки остатков играют в методе Штурма основную роль. Мы получим такую систему:

$$\begin{aligned}
h\ (x)&=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,\\
h_1(x)&=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,\\
h_2(x)&=66x^3-150x^2+172x+61,\\
h_3(x)&=-464x^2+1135x+723,\\
h_4(x)&=-32\,599\,457x-8\,486\,093,\\
h_5(x)&=-1.
\end{aligned}$$

Определим знаки многочленов этой системы при $x=-\infty$ и $x=\infty$, для чего, как было указано, следует смотреть лишь на знаки старших коэффициентов и на степени этих многочленов. Мы получим такую таблицу:

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Число перемен знаков
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1

Таким образом, при переходе x от $-\infty$ к ∞ система Штурма теряет три перемены знаков, а поэтому многочлен $h(x)$ имеет ровно три действительных корня. Отсюда видно, что при построении в предыдущем параграфе графика этого многочлена мы не упустили ни одного из корней.

Применим метод Штурма к другому многочлену, более простому. Пусть дан многочлен

$$f(x)=x^3+3x^2-1.$$

Найдем число его действительных корней, а также целые границы, между которыми каждый из этих корней расположен, причем не будем строить заранее графика этого многочлена.

Система Штурма для многочлена $f(x)$ будет

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^3+3x^2-1\\
f_1(x)&=3x^2+6x,\\
f_2(x)&=2x+1,\\
f_3(x)&=1.
\end{aligned}$$

Найдем число перемен знаков в этой системе при $x=-\infty$ и $x=\infty$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число перемен знаков
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Многочлен $f(x)$ обладает, следовательно, тремя действительными корнями. Для более точного определения положения этих корней продолжим предыдущую таблицу:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число перемен знаков
$x=-3$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$x=-2$	$+$	0	$-$	$+$	2
$x=-1$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$x=0$	$-$	0	$+$	$+$	1
$x=1$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Таким образом, система Штурма многочлена $f(x)$ теряет по одной перемене знаков при переходе x от -3 к -2, от -1 к 0 и от 0 к 1. Корни α_1, α_2 и α_3 этого многочлена удовлетворяют, следовательно, неравенствам:

$$-3<\alpha_1<-2, \quad -1<\alpha_2<0, \quad 0<\alpha_3<1.$$

§ 41. Другие теоремы о числе действительных корней

Теорема Штурма полностью решает вопрос о числе действительных корней многочлена. Ее существенным недостатком является, однако, громоздкость вычислений, выполняемых при построении системы Штурма, как читатель мог убедиться, проделав все вычисления, относящиеся к первому из рассмотренных выше примеров. Ввиду этого сейчас будут доказаны две теоремы, не дающие точного числа действительных корней, а лишь ограничивающие это число сверху. Эти теоремы, применяемые после того, как при помощи графика число действительных корней уже ограничено