Найдем число перемен знаков в этой системе при $x=-\infty$ и $x=\infty$

| | $f(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ | Число перемен знаков |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | 3 |
| $\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 |

Многочлен $f(x)$ обладает, следовательно, тремя действительными корнями. Для более точного определения положения этих корней продолжим предыдущую таблицу:

| | $f(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ | Число перемен знаков |
|---|---|---|---|---|---|
| $x=-3$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | 3 |
| $x=-2$ | $+$ | 0 | $-$ | $+$ | 2 |
| $x=-1$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | 2 |
| $x=0$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | 1 |
| $x=1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 |

Таким образом, система Штурма многочлена $f(x)$ теряет по одной перемене знаков при переходе $x$ от $-3$ к $-2$, от $-1$ к 0 и от 0 к 1. Корни $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$ этого многочлена удовлетворяют, следовательно, неравенствам:

$$-3<\alpha_1<-2,\quad -1<\alpha_2<0,\quad 0<\alpha_3<1.$$

## § 41. Другие теоремы о числе действительных корней

Теорема Штурма полностью решает вопрос о числе действительных корней многочлена. Ее существенным недостатком является, однако, громоздкость вычислений, выполняемых при построении системы Штурма, как читатель мог убедиться, проделав все вычисления, относящиеся к первому из рассмотренных выше примеров. Ввиду этого сейчас будут доказаны две теоремы, не дающие точного числа действительных корней, а лишь ограничивающие это число сверху. Эти теоремы, применяемые после того, как при помощи графика число действительных корней уже ограничено

снизу, позволяют иногда найти точное число действительных корней, не прибегая к методу Штурма.

Пусть дан многочлен $f(x)$ $n$-й степени с действительными коэффициентами, причем допускаем, что он может обладать кратными корнями. Рассмотрим систему его последовательных производных

$$f(x)=f^{(0)}(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x), \tag{1}$$

из которых последняя равна старшему коэффициенту $a_0$ многочлена $f(x)$, умноженному на $n!$, и поэтому все время сохраняет постоянный знак. Если действительное число $c$ не служит корнем ни одного из многочленов системы (1), то обозначим через $S(c)$ число перемен знаков в упорядоченной системе чисел

$$f(c),\ f'(c),\ f''(c),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(c),\ f^{(n)}(c).$$

Таким образом можно рассматривать целочисленную функцию $S(x)$, определенную для тех значений $x$, которые не обращают в нуль ни одного из многочленов системы (1).

Посмотрим, как меняется число $S(x)$ при возрастании $x$. Пока $x$ не пройдет через корень ни одного из многочленов (1), число $S(x)$ не может измениться. Ввиду этого мы должны рассмотреть два случая: переход $x$ через корень многочлена $f(x)$ и переход $x$ через корень одной из производных $f^{(k)}(x)$, $1\leqslant k\leqslant n-1$.

Пусть $\alpha$ будет $l$-кратный корень многочлена $f(x)$, $l\geqslant 1$, т. е.

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(l-1)}(\alpha)=0,\ f^{(l)}(\alpha)\neq 0.$$

Пусть положительное число $\varepsilon$ столь мало, что отрезок $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ не содержит корней многочленов $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots$, $f^{(l-1)}(x)$, отличных от $\alpha$, а также не содержит ни одного корня многочлена $f^{(l)}(x)$. Докажем, что в системе чисел

$$f(\alpha-\varepsilon),\ f'(\alpha-\varepsilon),\ \ldots,\ f^{(l-1)}(\alpha-\varepsilon),\ f^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$$

всякие два соседних числа имеют противоположные знаки, тогда как все числа

$$f(\alpha+\varepsilon),\ f'(\alpha+\varepsilon),\ \ldots,\ f^{(l-1)}(\alpha+\varepsilon),\ f^{(l)}(\alpha+\varepsilon)$$

имеют один и тот же знак. Так как каждый из многочленов системы (1) является производной от предыдущего многочлена, то нам нужно лишь доказать, что если $x$ проходит через корень $\alpha$ многочлена $f(x)$, то, независимо от кратности этого корня, до перехода $f(x)$ и $f'(x)$ имели разные знаки, а после перехода их знаки совпадают. Если $f(\alpha-\varepsilon)>0$, то $f(x)$ убывает на отрезке $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha)$, а потому $f'(\alpha-\varepsilon)<0$; если же $f(\alpha-\varepsilon)<0$, то $f(x)$ возрастает, и потому $f'(\alpha-\varepsilon)>0$. В обоих случаях, следовательно, знаки различны. С другой стороны, если $f(\alpha+\varepsilon)>0$, то $f(x)$ возрастает на отрезке $(\alpha,\ \alpha+\varepsilon)$, а потому $f'(\alpha+\varepsilon)>0$; аналогично из $f(\alpha+\varepsilon)<0$

следует $f'(\alpha+\varepsilon)<0$. Таким образом, после перехода через корень $\alpha$ знаки $f(x)$ и $f'(x)$ должны совпадать.

Из доказанного следует, что при переходе $x$ через $l$-кратный корень многочлена $f(x)$ система

$$f(x),\ f'(x),\ \ldots,\ f^{(l-1)}(x),\ f^{(l)}(x)$$

теряет $l$ перемен знаков.

Пусть $\alpha$ будет теперь корнем производных

$$f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x),\ \ldots,\ f^{(k+l-1)}(x),\ 1\leqslant k\leqslant n-1,\ l\geqslant 1,$$

но не служит корнем ни для $f^{(k-1)}(x)$, ни для $f^{(k+l)}(x)$. По доказанному выше, переход $x$ через $\alpha$ влечет за собой потерю в системе

$$f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x),\ \ldots,\ f^{(k+l-1)}(x),\ f^{(k+l)}(x)$$

$l$ перемен знаков. Правда, этот переход создает, возможно, новую перемену знаков между $f^{(k-1)}(x)$ и $f^{(k)}(x)$, однако, ввиду $l\geqslant 1$, при переходе $x$ через $\alpha$ число перемен знаков в системе

$$f^{(k-1)}(x),\ f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x),\ \ldots,\ f^{(k+l-1)}(x),\ f^{(k+l)}(x)$$

или не меняется, или же уменьшается. Оно может уменьшиться при этом лишь на четное число, так как многочлены $f^{(k-1)}(x)$ и $f^{(k+l)}(x)$ не меняют своих знаков при переходе $x$ через значение $\alpha$.

Из полученных результатов вытекает, что *если числа $a$ и $b$, $a<b$, не являются корнями ни для одного из многочленов системы* (1), *то число действительных корней многочлена $f(x)$, заключенных между $a$ и $b$ и подсчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно разности $S(a)-S(b)$ или меньше этой разности на четное число.*

Для того чтобы ослабить ограничения, наложенные на числа $a$ и $b$, введем следующие обозначения. Пусть действительное число $c$ не является корнем многочлена $f(x)$, хотя, быть может, служит корнем для некоторых других многочленов системы (1). Обозначим через $S_+(c)$ число перемен знаков в системе чисел

$$f(c),\ f'(c),\ f''(c),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(c),\ f^{(n)}(c), \tag{2}$$

подсчитываемое следующим образом: если

$$f^{(k)}(c)=f^{(k+1)}(c)=\ldots=f^{(k+l-1)}(c)=0, \tag{3}$$

но

$$f^{(k-1)}(c)\neq 0,\ f^{(k+l)}(c)\neq 0, \tag{4}$$

то считаем $f^{(k)}(c)$, $f^{(k+1)}(c)$, $\ldots$, $f^{(k+l-1)}(c)$ имеющими такой же знак, как у $f^{(k+l)}(c)$; это равносильно, очевидно, тому, что при подсчете числа перемен знаков в системе (2) нули предполагаются вычеркнутыми. С другой стороны, через $S_-(c)$ обозначим число перемен знаков в системе (2), подсчитываемое следующим образом: если имеют место условия (3) и (4), то считаем, что $f^{(k+i)}(c)$,

$0 \leqslant i \leqslant l-1$, имеет такой же знак, как и $f^{(k+l)}(c)$, если разность $l-i$ четная, и противоположный знак, если эта разность нечетная.

Если мы хотим теперь определить число действительных корней многочлена $f(x)$, заключенных между $a$ и $b$, $a<b$, причем $a$ и $b$ не являются корнями $f(x)$, но служат, быть может, корнями для других многочленов системы (1), то поступаем следующим образом. Пусть $\varepsilon$ столь мало, что отрезок $(a, a+2\varepsilon)$ не содержит корней многочлена $f(x)$, а также отличных от $a$ корней всех остальных многочленов системы (1); с другой стороны, пусть $\eta$ столь мало, что отрезок $(b-2\eta, b)$ также не содержит корней $f(x)$ и отличных от $b$ корней остальных многочленов системы (1). Тогда интересующее нас число действительных корней многочлена $f(x)$ будет равно числу действительных корней этого многочлена, заключенных между $a+\varepsilon$ и $b-\eta$, т. е., по доказанному выше, равно разности $S(a+\varepsilon)-$ $-S(b-\eta)$ или меньше этой разности на четное число. Легко видеть, однако, что

$$S(a+\varepsilon)=S_+(a), \quad S(b-\eta)=S_-(b).$$

Этим доказана следующая

Теорема Бюдана—Фурье. *Если действительные числа $a$ и $b$, $a<b$, не являются корнями многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то число действительных корней этого многочлена, заключенных между $a$ и $b$ и подсчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно разности $S_+(a)-S_-(b)$ или меньше этой разности на четное число.*

Обозначим символом $\infty$ столь большое положительное значение неизвестного $x$, что знаки соответствующих ему значений всех многочленов системы (1) совпадают со знаками их старших коэффициентов. Так как этими коэффициентами будут последовательно числа $a_0$, $na_0$, $n(n-1)a_0$, ..., $n!a_0$, знаки которых совпадают, то $S(\infty)=S_-(\infty)=0$. С другой стороны, так как

$$f(0)=a_n, \; f'(0)=a_{n-1}, \; f''(0)=a_{n-2}2!,$$
$$f'''(0)=a_{n-3}3!, \; \ldots, \; f^{(n)}(0)=a_0\cdot n!,$$

где $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ — коэффициенты многочлена $f(x)$, то $S_+(0)$ совпадает с числом перемен знаков в системе коэффициентов многочлена $f(x)$, причем коэффициенты, равные нулю, не учитываются. Таким образом, применяя теорему Бюдана—Фурье к отрезку $(0, \infty)$, мы приходим к следующей теореме:

Теорема Декарта. *Число положительных корней многочлена $f(x)$, засчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена (причем равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число.*

Для определения числа отрицательных корней многочлена $f(x)$ достаточно, очевидно, применить теорему Декарта к многочлену

$f(-x)$. При этом, если ни один из коэффициентов многочлена $f(x)$ не равен нулю, то, очевидно, переменам знаков в системе коэффициентов многочлена $f(-x)$ соответствуют сохранения знаков в системе коэффициентов многочлена $f(x)$ и обратно. Таким образом, *если многочлен $f(x)$ не имеет равных нулю коэффициентов, то число его отрицательных корней (считаемых с их кратностями) равно числу сохранений знаков в системе коэффициентов или меньше его на четное число.*

Укажем еще одно доказательство теоремы Декарта, не опирающееся на теорему Бюдана — Фурье. Докажем сначала следующую лемму:

*Если $c>0$, то число перемен знаков в системе коэффициентов многочлена $f(x)$ меньше числа перемен знаков в системе коэффициентов произведения $(x-c)f(x)$ на нечетное число.*

Действительно, собирая в скобки стоящие рядом члены одного знака, запишем следующим образом многочлен $f(x)$, старший коэффициент $a_0$ которого считаем положительным:

$$f(x)=(a_0x^n+\ldots+b_1x^{k_1+1})-(a_1x^{k_1}+\ldots+b_2x^{k_2+1})+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^s(a_sx^{k_s}+\ldots+b_{s+1}x^t). \quad (5)$$

Здесь $a_0>0$, $a_1>0$, ..., $a_s>0$, в то время как $b_1, b_2, \ldots, b_s$ положительны или равны нулю; однако $b_{s+1}$ считаем строго положительным, т. е. $x^t$, где $t\geqslant 0$, является наименьшей степенью неизвестного $x$, входящей в многочлен $f(x)$ с отличным от нуля коэффициентом. Скобка

$$(a_0x^n+\ldots+b_1x^{k_1+1})$$

случайно может состоять при этом лишь из одного слагаемого, а именно тогда, когда $k_1+1=n$. Аналогичное замечание применимо и к другим скобкам формулы (5).

Запишем теперь многочлен, равный произведению $(x-c)f(x)$, причем будем выделять лишь члены, содержащие $x$ в степенях $n+1$, $k_1+1$, ..., $k_s+1$ и $t$. Мы получим:

$$(x-c)f(x)=(a_0x^{n+1}+\ldots)-(a_1'x^{k_1+1}+\ldots)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^s(a_s'x^{k_s+1}+\ldots-cb_{s+1}x^t), \quad (6)$$

где $a_i'=a_i+cb_i$, $i=1, 2, \ldots, s$, и поэтому, так как $c>0$, все $a_i'$ строго положительны. Таким образом, в системе коэффициентов многочлена $f(x)$ между членами $a_0x^n$ и $-a_1x^{k_1}$ (а также между членами $-a_1x^{k_1}$ и $a_2x^{k_2}$ и т. д.) была одна перемена знаков, а у многочлена $(x-c)f(x)$ между соответствующими членами $a_0x^{n+1}$ и $-a_1'x^{k_1+1}$ (соответственно между членами $-a_1'x^{k_1+1}$ и $a_2'x^{k_2+1}$ и т. д.) будет или одна перемена знаков, или больше, но тогда непременно на четное число. Точные места этих перемен знаков нас не будут

при этом интересовать; может случиться, например, что коэффициент при $x^{k_1+2}$ в (6) отрицателен, как и коэффициент $-a_1$, а поэтому между этими двумя соседними коэффициентами нет перемены знаков, т. е. в первой скобке перемены знаков расположены где-то раньше. Заметим теперь, что последняя скобка в (5) не содержала никаких перемен знаков, в то время как последняя скобка в (6) их содержит, притом нечетное число: достаточно учесть, что последние отличные от нуля коэффициенты многочленов $f(x)$ и $(x-c)f(x)$, т. е. $(-1)^s b_{s+1}$ и $(-1)^{s+1} b_{s+1} c$, имеют разные знаки. Таким образом, при переходе от $f(x)$ к $(x-c)f(x)$ общее число перемен знаков в системе коэффициентов непременно увеличивается, притом на нечетное число (сумма нескольких слагаемых, одно из которых нечетно, а остальные четны, будет, понятно, нечетной!). Лемма доказана.

Для доказательства теоремы Декарта обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ все положительные корни многочлена $f(x)$. Таким образом,

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_k)\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, уже не имеющий положительных действительных корней. Отсюда следует, что первый и последний отличный от нуля коэффициенты многочлена $\varphi(x)$ одного знака, т. е. система коэффициентов этого многочлена содержит четное число перемен знаков. Применяя теперь доказанную выше лемму последовательно к многочленам

$$\varphi(x),\ (x-\alpha_1)\varphi(x),\ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\varphi(x),\ \ldots,\ f(x),$$

мы получим, что число перемен знаков в системе коэффициентов каждый раз увеличивается на нечетное число, т. е. на единицу плюс четное число, а поэтому число перемен знаков в системе коэффициентов многочлена $f(x)$ больше числа $k$ на четное число.

Применим теоремы Декарта и Бюдана — Фурье к рассматривавшемуся выше многочлену

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3.$$

Число перемен знаков в системе коэффициентов равно трем, и поэтому, по теореме Декарта, $h(x)$ может иметь три или один положительный корень. С другой стороны, $h(x)$ не имеет равных нулю коэффициентов, а так как в системе коэффициентов два сохранения знаков, то $h(x)$ либо имеет два отрицательных корня, либо не имеет ни одного. Сравнивая с результатами, полученными ранее при помощи графика, мы получаем, что два есть точное число отрицательных корней нашего многочлена.

Для точного определения числа положительных корней воспользуемся теоремой Бюдана — Фурье, причем применим ее к отрезку $(1, \infty)$, так как в § 39 уже было показано, что 1 служит нижней границей положительных

корней многочлена $h(x)$. Последовательные производные $h(x)$ также уже были выписаны в § 39. Найдем их знаки при $x=1$ и $x=\infty$:

| | $h(x)$ | $h'(x)$ | $h''(x)$ | $h'''(x)$ | $h^{IV}(x)$ | $h^{V}(x)$ | Число перемен знаков |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=1$ | — | + | + | + | + | + | 1 |
| $x=\infty$ | + | + | + | + | + | + | 0 |

Отсюда следует, что система производных теряет при переходе $x$ от 1 до $\infty$ одну перемену знаков, а поэтому $h(x)$ имеет ровно один положительный корень.

В связи с этим примером заметим, что вообще при разыскании числа действительных корней многочлена следует начинать с построения графика и применения теорем Декарта и Бюдана—Фурье, лишь в крайних случаях переходя к построению системы Штурма.

Теорема Декарта допускает некоторое уточнение в том частном случае, когда заранее известно, что все корни многочлена действительные, как это имеет место, например, для характеристического многочлена симметрической матрицы. Именно:

*Если все корни многочлена $f(x)$ действительные, а свободный член отличен от нуля, то число $k_1$ положительных корней этого многочлена равно числу $s_1$ перемен знаков в системе его коэффициентов, а число $k_2$ отрицательных корней равно числу $s_2$ перемен знаков в системе коэффициентов многочлена $f(-x)$.*

Действительно, при наших предположениях

$$k_1+k_2=n, \tag{7}$$

где $n$ — степень многочлена $f(x)$, и, по теореме Декарта,

$$k_1 \leqslant s_1, \quad k_2 \leqslant s_2. \tag{8}$$

Докажем, что

$$s_1+s_2 \leqslant n. \tag{9}$$

Доказательство будем вести индукцией по $n$, так как при $n=1$ ввиду $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ перемена знаков имеется лишь у одного из многочленов

$$f(x)=a_0x+a_1, \quad f(-x)=-a_0x+a_1,$$

т. е. для этого случая $s_1+s_2=1$. Пусть формула (9) уже доказана для многочленов, степень которых меньше $n$. Если

$$f(x)=a_0x^n+a_{n-i}x^i+\ldots+a_n,$$

где $l \leqslant n-1$, $a_{n-l} \neq 0$, то положим

$$g(x) = a_{n-l}x^l + \ldots + a_n.$$

Тогда

$$f(x) = a_0x^n + g(x), \qquad f(-x) = (-1)^n a_0 x^n + g(-x).$$

Если $s_1'$ и $s_2'$ будут соответственно числа перемен знаков в системах коэффициентов многочленов $g(x)$ и $g(-x)$, то, по индуктивному предположению (ясно, что $l \geqslant 1$),

$$s_1' + s_2' \leqslant l.$$

Если $l = n-1$, то перемена знаков на первом месте, т. е., для $f(x)$, между $a_0$ и $a_1 = a_{n-l}$ будет лишь у одного из многочленов $f(x)$, $f(-x)$, а поэтому

$$s_1 + s_2 = s_1' + s_2' + 1 \leqslant l + 1 = n.$$

Если же $l \leqslant n-2$, то возможны перемены знаков на первых местах у каждого из многочленов $f(x)$, $f(-x)$, однако и в этом случае

$$s_1 + s_2 \leqslant s_1' + s_2' + 2 \leqslant l + 2 \leqslant (n-2) + 2 = n.$$

Сопоставляя (7), (8) и (9), получаем, что

$$k_1 = s_1, \quad k_2 = s_2,$$

что и требовалось доказать.

## § 42. Приближенное вычисление корней

Изложенные в предшествующих параграфах методы позволяют произвести *отделение* действительных корней многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, т. е. для каждого из корней указать границы, между которыми находится только один этот корень. Если эти границы достаточно узки, то любое число, заключенное между ними, можно считать приближенным значением искомого корня. Таким образом, после того как методом Штурма (или каким-либо другим, более экономным способом) будет установлено, что между рациональными числами $a$ и $b$ содержится лишь один корень многочлена $f(x)$, остается задача настолько сузить эти границы, чтобы новые границы $a'$ и $b'$ обладали наперед заданным числом совпадающих первых десятичных знаков; этим искомый корень будет вычислен с заданной точностью.

Существует много методов, позволяющих достаточно быстро находить приближенное значение корня с требуемой точностью. Мы укажем два из них, теоретически более простые и общие и при совместном употреблении достаточно быстро приводящие к цели. Следует заметить, что методы, которые будут сейчас изложены, применимы не только к многочленам, но и к более широким классам непрерывных функций.

Будем считать дальше, что $\alpha$ есть простой корень многочлена $f(x)$, так как от кратных корней мы всегда можем освободиться,