

где  $l \leq n-1$ ,  $a_{n-l} \neq 0$ , то положим

$$g(x) = a_{n-l}x^l + \dots + a_n.$$

Тогда

$$f(x) = a_0x^n + g(x), \quad f(-x) = (-1)^n a_0x^n + g(-x).$$

Если  $s'_1$  и  $s'_2$  будут соответственно числа перемен знаков в системах коэффициентов многочленов  $g(x)$  и  $g(-x)$ , то, по индуктивному предположению (ясно, что  $l \geq 1$ ),

$$s'_1 + s'_2 \leq l.$$

Если  $l = n-1$ , то перемена знаков на первом месте, т. е., для  $f(x)$ , между  $a_0$  и  $a_1 = a_{n-l}$  будет лишь у одного из многочленов  $f(x)$ ,  $f(-x)$ , а поэтому

$$s_1 + s_2 = s'_1 + s'_2 + 1 \leq l + 1 = n.$$

Если же  $l \leq n-2$ , то возможны перемены знаков на первых местах у каждого из многочленов  $f(x)$ ,  $f(-x)$ , однако и в этом случае

$$s_1 + s_2 \leq s'_1 + s'_2 + 2 \leq l + 2 \leq (n-2) + 2 = n.$$

Сопоставляя (7), (8) и (9), получаем, что

$$k_1 = s_1, \quad k_2 = s_2,$$

что и требовалось доказать.

## § 42. Приближенное вычисление корней

Изложенные в предшествующих параграфах методы позволяют произвести *отделение* действительных корней многочлена  $f(x)$  с действительными коэффициентами, т. е. для каждого из корней указать границы, между которыми находится только один этот корень. Если эти границы достаточно узки, то любое число, заключенное между ними, можно считать приближенным значением искомого корня. Таким образом, после того как методом Штурма (или каким-либо другим, более экономным способом) будет установлено, что между рациональными числами  $a$  и  $b$  содержится лишь один корень многочлена  $f(x)$ , остается задача настолько сузить эти границы, чтобы новые границы  $a'$  и  $b'$  обладали наперед заданным числом совпадающих первых десятичных знаков; этим искомый корень будет вычислен с заданной точностью.

Существует много методов, позволяющих достаточно быстро находить приближенное значение корня с требуемой точностью. Мы укажем два из них, теоретически более простые и общие и при совместном употреблении достаточно быстро приводящие к цели. Следует заметить, что методы, которые будут сейчас изложены, применимы не только к многочленам, но и к более широким классам непрерывных функций.

Будем считать дальше, что  $\alpha$  есть простой корень многочлена  $f(x)$ , так как от кратных корней мы всегда можем освободиться,

и что корень  $\alpha$  уже отделен границами  $a$  и  $b$ ,  $a < \alpha < b$ ; отсюда следует, в частности, что  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют разные знаки.

**Метод линейной интерполяции** (называемый также методом ложного положения). В качестве приближенного значения корня  $\alpha$  можно было бы принять, например, полусумму границ  $a$  и  $b$ ,  $\frac{a+b}{2}$ , т. е. середину отрезка, имеющего концами  $a$  и  $b$ . Более естественно, однако, предположить, что корень лежит ближе к той из границ  $a$ ,  $b$ , которой соответствует меньшее по абсолютной величине значение многочлена. Метод линейной интерполяции состоит в том, что в качестве приближенного значения корня  $\alpha$  берется число  $c$ , делящее отрезок  $(a, b)$  на части, пропорциональные абсолютным величинам чисел  $|f(a)|$  и  $|f(b)|$ , т. е.

$$\frac{c-a}{b-c} = -\frac{|f(a)|}{|f(b)|};$$

знак минус в правой части поставлен ввиду того, что  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют разные знаки. Отсюда

$$c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}. \quad (1)$$

Геометрически, как показывает рис. 10, метод линейной интерполяции заключается в том, что на отрезке  $(a, b)$  кривая  $y = f(x)$

заменяется ее хордой, соединяющей точки  $A(a, f(a))$  и  $B(b, f(b))$ , и в качестве приближенного значения корня  $\alpha$  принимается абсцисса точки пересечения этой хорды с осью  $x$ .

**Метод Ньютона.** Так как  $\alpha$  — простой корень многочлена  $f(x)$ , то  $f'(\alpha) \neq 0$ . Примем, что также и  $f''(\alpha) \neq 0$ , так как иначе вопрос сводится к вычислению корня многочлена  $f''(x)$ , имеющего меньшую степень, чем  $f(x)$ . Примем, далее, что отрезок  $(a, b)$  не только не содержит корней  $f(x)$ , отличных от  $\alpha$ , но и не содержит ни

одного корня многочлена  $f'(x)$ , а также и многочлена  $f''(x)$ <sup>1</sup>. Таким образом, как следует из курса математического анализа, кривая  $y = f(x)$  на отрезке  $(a, b)$  либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, а также либо во всех точках этого отрезка обращена выпуклостью вверх, либо во всех точках обращена выпуклостью вниз. В расположении кривой на отрезке  $(a, b)$

<sup>1</sup>) Сужение границ, приводящее к тому, что это условие будет удовлетворяться, достигается обычно без всяких затруднений, так как методы, изложенные ранее, позволяют установить число корней многочленов  $f'(x)$  и  $f''(x)$  в любом отрезке.

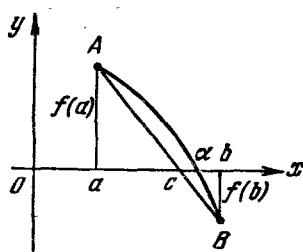


Рис. 10.

могут встретиться, следовательно, четыре случая, представленных на черт. 11—14.

Обозначим через  $a_0$  тот из пределов  $a$  и  $b$ , в котором знак  $f(x)$  совпадает со знаком  $f''(x)$ . Так как  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют разные знаки, а  $f''(x)$  сохраняет знак на всем отрезке  $(a, b)$ , то такое  $a_0$  может быть указано. В случаях, представленных на рис. 11 и 14,  $a_0 = a$ .

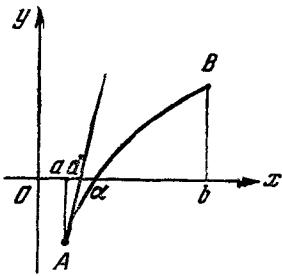


Рис. 11.

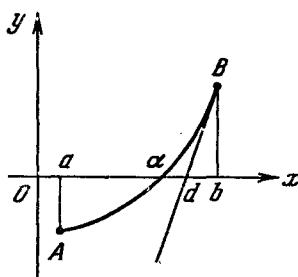


Рис. 12.

будет  $a_0 = a$ , в двух других случаях  $a_0 = b$ . В точке кривой  $y = f(x)$  с абсциссой  $a_0$ , т. е. в точке с координатами  $(a_0, f(a_0))$ , проведем касательную к этой кривой и обозначим через  $d$  абсциссу точки пересечения этой касательной с осью  $x$ . Рис. 11—14 показывают,

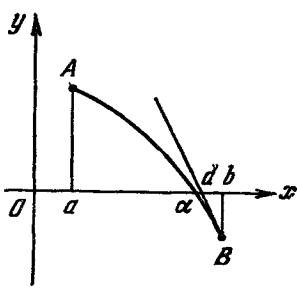


Рис. 13.

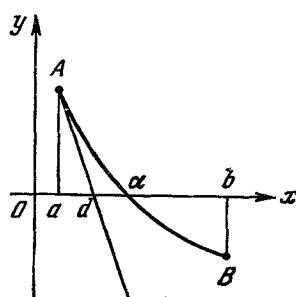


Рис. 14.

что число  $d$  можно считать приближенным значением корня  $\alpha$ . Метод Ньютона состоит, следовательно, в замене кривой  $y = f(x)$  на отрезке  $(a, b)$  ее касательной в одной из границ этого отрезка. Условие, наложенное на выбор точки  $a_0$ , очень существенно: рис. 15 показывает, что без соблюдения этого условия точка пересечения касательной с осью  $x$  может вовсе не давать приближения к исковому корню.

Выведем формулу, по которой разыскивается число  $d$ . Как известно, уравнение касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $(a_0, f(a_0))$  может быть записано в виде

$$y - f(a_0) = f'(a_0)(x - a_0).$$

Подставляя сюда координаты  $(d, 0)$  точки пересечения касательной с осью  $x$ , получим:

$$-f(a_0) = f'(a_0)(d - a_0),$$

откуда

$$d = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}. \quad (2)$$

Если читатель соединит на рис. 11—14 точки  $A$  и  $B$  хордами, то обнаружит, что методы линейной интерполяции и Ньютона

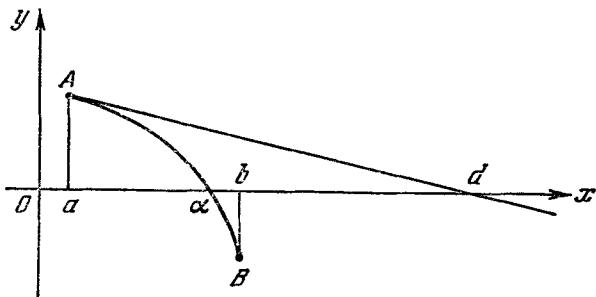


Рис. 15.

во всех случаях дают приближение к истинному значению корня  $\alpha$  с разных сторон. Целесообразно поэтому, если отрезок  $(a, b)$  уже таков, как это требуется в методе Ньютона, комбинировать эти два метода. Мы получим этим путем много более тесные границы  $c$  и  $d$  для корня  $\alpha$ .

Если они еще не дают требуемой точности приближения, то к этим пределам следует еще раз применить указанные оба метода (см. рис. 16) и т. д., причем можно доказать, что этот процесс действительно позволяет вычислить корень  $\alpha$  с любой точностью.

Применим эти методы к рассматривавшемуся в предшествующих параграфах многочлену

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3.$$

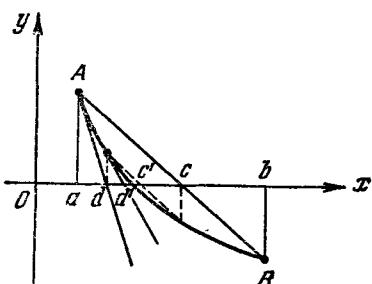


Рис. 16.

Мы знаем, что этот многочлен обладает простым корнем  $a_1$ , заключенным в границах  $1 < a_1 < 2$ . Можно сказать заранее, что эти границы слишком широки для того, чтобы методы линейной интерполяции и Ньютона, примененные лишь по одному разу, могли дать хороший результат. Применим их, однако, чтобы иметь один пример, не требующий сложных вычислений.

Как мы видели в предшествующем параграфе, при  $x=1$  производные  $h'(x)$ ,  $h''(x), \dots, h^V(x)$  получают положительные значения. Отсюда следует, на основании результатов § 39, что значение  $x=1$  служит для  $h'(x)$ , а также и для  $h''(x)$  верхней границей положительных корней. Отрезок  $(1, 2)$  не содержит, следовательно, корней этих производных, а поэтому к нему можно применить метод Ньютона. Кроме того,  $h''(x)$  всюду в этом отрезке положительна, а так как

$$h(1) = -4, \quad h(2) = 39,$$

то нужно принять  $a_0 = 2$ . Учитывая, что  $h'(2) = 109$ , мы по формуле (2) получаем:

$$d = 2 - \frac{39}{109} = \frac{179}{109} = 1,64\dots$$

С другой стороны, формула (1) дает:

$$c = \frac{2(-4) - 1 \cdot 39}{-4 - 39} = \frac{47}{43} = 1,09\dots$$

и, следовательно, корень  $a_1$  заключен в границах

$$1,09 < a_1 < 1,65.$$

Мы получили слишком незначительное сужение границ для того, чтобы признать этот результат удовлетворительным. Конечно, к вновь полученным границам можно было бы еще раз применить наши методы. Целесообразно, однако, с самого начала найти для  $a_1$  достаточно тесные границы, например с точностью до 0,1 или даже 0,01, и лишь затем применять эти методы. Это сразу сделает, понятно, все вычисления весьма громоздкими, но при решении конкретных задач, требующих достаточно точного знания корней многочлена, на это приходится идти.

Вернемся к нашему многочлену  $h(x)$  и его корню  $a_1$ , причем заметим, что все значения многочленов, приводимые ниже, вычисляются методом Горнера. Так как

$$h(1,3) = -0,13987, \quad h(1,31) = 0,0662923851,$$

то

$$1,3 < a_1 < 1,31,$$

т. е. мы нашли значение корня  $a_1$  с точностью до 0,01. Применим теперь к этим новым границам метод линейной интерполяции:

$$c = \frac{1,31 \cdot (-0,13987) - 1,3 \cdot 0,0662923851}{-0,13987 - 0,0662923851} = \frac{0,26940980063}{0,2061623851} = 1,30678\dots$$

Применим к этим же границам метод Ньютона, причем следует положить  $a_0 = 1,31$ . Так как

$$h'(1,31) = 20,92822405,$$

то

$$d = 1,31 - \frac{0,0662923851}{20,92822405} = \frac{27,3496811204}{20,92822405} = 1,30683\dots$$

Таким образом,

$$1,30678 < a_1 < 1,30684,$$

и поэтому, полагая  $a_1 = 1,30681$ , мы сделаем ошибку, меньшую чем 0,00003.

Мы не показали до сих пор, что изложенные выше методы на самом деле позволяют вычислить корень с любой точностью, т. е. не доказали сходимости этих методов. Докажем это хотя бы для метода Ньютона.

Пусть, как и выше, простой корень  $\alpha$  многочлена  $f(x)$  содержится в отрезке  $(a, b)$ , выбранном так, как это необходимо для применения метода Ньютона. Отсюда следует, в частности, существование таких положительных чисел  $A$  и  $B$ , что всюду на отрезке  $(a, b)$

$$|f'(x)| > A, \quad |f''(x)| < B. \quad (3)$$

Введем обозначение

$$C = \frac{B}{2A}$$

и положим, что

$$C(b-a) < 1. \quad (4)$$

Для выполнения этого неравенства придется, возможно, заменить границы  $(a, b)$  корня  $\alpha$  более узкими границами; это не отразится, однако, на справедливости неравенств (3). Пусть  $a_0$  будет та из границ  $a, b$ , в которой следует применять метод Ньютона. На основании формулы (2) мы последовательно получим в качестве приближенных значений корня  $\alpha$  числа  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ , лежащие в отрезке  $(a, b)$  и связанные между собой равенствами

$$a_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Пусть

$$\alpha = a_k + h_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Тогда

$$0 = f(\alpha) = f(a_k) + h_k f'(a_k) + \frac{h_k^2}{2} f''(a_k + \theta h_k),$$

где  $0 < \theta < 1$ . Так как  $f'(a_k) \neq 0$  ввиду условия, наложенного на отрезок  $(a, b)$ , то, учитывая (5) и (6), получим:

$$-\frac{h_k^2}{2} \frac{f''(a_k + \theta h_k)}{f'(a_k)} = h_k + \frac{f(a_k)}{f'(a_k)} = \alpha - \left( a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)} \right) = \alpha - a_{k+1} = h_{k+1}.$$

Отсюда

$$|h_{k+1}| = h_k^2 \left| \frac{f''(a_k + \theta h_k)}{2f'(a_k)} \right| < h_k^2 \frac{B}{2A} = Ch_k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$|h_{k+1}| < Ch_k^2 < C^3 h_{k-1}^4 < C^7 h_{k-2}^8 < \dots < C^{2^{k+1}-1} h_0^{2^{k+1}}$$

или, так как  $|h_0| = |\alpha - a_0| < b - a$ ,

$$|h_{k+1}| < C^{-1} [C(b-a)]^{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Отсюда, ввиду условия (4), следует, что разность  $h_k$  между корнем  $a$  и его приближенным значением  $a_k$ , полученным последовательным применением метода Ньютона, стремится к нулю при возрастании  $k$ , что и требовалось доказать.

Отметим, что формула (7) дает оценку погрешности для  $(k+1)$ -го шага, что существенно, если метод Ньютона применяется один, а не в комбинации с методом линейной интерполяции.

В курсах теории приближенных вычислений читатель может познакомиться со способами более рационального расположения вычислений в изложенных выше методах, облегчающими их применение. В этих же курсах можно найти изложение многих других методов приближенного вычисления корней. Среди них наиболее совершенным является *метод Лобачевского* (иногда ошибочно называемый методом Греффе). Этот метод позволяет находить приближенные значения всех корней сразу, в том числе и комплексных, причем не требует предварительного отделения корней; он связан, однако, с весьма громоздкими вычислениями. В основе этого метода лежит излагаемая ниже, в гл. 11, теория симметрических многочленов.

---