ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ПОЛЯ И МНОГОЧЛЕНЫ

§ 43. Числовые кольца и поля

В очень многих предшествующих разделах курса мы оказывались в следующем положении: излагая материал, мы допускали к рассмотрению или любые комплексные числа, или же только действительные числа, но затем должны были делать замечание, что полученные результаты остаются справедливыми, если ограничиться лишь действительными числами (или, соответственно, что они дословно переносятся на случай любых комплексных чисел). Как правило, во всех этих случаях можно было заметить, что изложенная теория полностью сохранилась бы и в том случае, если бы мы допустили к рассмотрению лишь рациональные числа. Настало время показать читателю истинные причины этого параллелизма с тем, чтобы излагать дальнейший материал в естественной для него общности, т. е. на общепринятом алгебраическом языке. С этой целью мы введем понятие поля, а также более широкое, но в нашем курсе играющее лишь служебную роль, понятие кольца.

Очевидно, что системы всех комплексных, всех действительных и всех рациональных чисел, равно как и система всех целых чисел, *обладают тем общим свойством, что в каждой из них не только сложение и умножение, но и вычитание можно выполнять, оставаясь в пределах самой этой системы.* Это свойство указанных числовых систем отличает их, например, от системы положительных целых или положительных действительных чисел.

Всякая система чисел, комплексных или, в частности, действительных, содержащая сумму, разность и произведение любых двух своих чисел, называется *числовым кольцом.* Таким образом, системы всех целых, рациональных, действительных и комплексных чисел являются числовыми кольцами. С другой стороны, никакая система положительных чисел не будет кольцом, так как если a и b — два различных положительных числа, то либо $a-b$, либо $b-a$ отрицательно. Не будет кольцом и никакая система отрицательных чисел хотя бы потому, что произведение двух отрицательных чисел положительно.

Числовые кольца далеко не исчерпываются рассмотренными выше четырьмя примерами. Сейчас будут указаны некоторые другие при-

меры, причем проверка утверждения, что рассматриваемая система чисел действительно является кольцом, каждый раз предоставляется читателю.

Четные числа составляют кольцо; вообще при любом натуральном n совокупность целых чисел, нацело делящихся на n, будет кольцом. Нечетные числа кольца не составляют, так как сумма двух нечетных чисел четна.

Кольцом будет совокупность рациональных чисел, знаменатели записей которых в виде несократимой дроби являются какими-либо степенями числа 2; к этой совокупности принадлежат, в частности, все целые числа, так как их несократимые записи имеют знаменателем число 1, т. е. два в нулевой степени. В этом примере вместо числа 2 можно взять, конечно, любое простое число p. Вообще, беря любое множество простых чисел, конечное или даже бесконечное, и рассматривая систему рациональных чисел, знаменатели несократимых записей которых могут делиться лишь на простые числа, принадлежащие к взятому множеству, мы также получим кольцо. С другой стороны, совокупность рациональных чисел, знаменатели несократимых записей которых не делятся на квадрат никакого простого числа, не будет кольцом, так как указанное свойство чисел не сохраняется при их умножении.

Переходим к примерам числовых колец, не лежащих целиком в кольце рациональных чисел. Совокупность чисел вида

$$a+b\sqrt{2}, \tag{1}$$

где a и b — любые рациональные числа, будет кольцом; к этому кольцу принадлежат, в частности, все рациональные числа (при $b=0$), а также само число $\sqrt{2}$ (при $a=0$, $b=1$). Мы получили бы также кольцо, если бы ограничились лишь числами вида (1) с целыми коэффициентами a, b. В этих примерах можно, конечно, вместо числа $\sqrt{2}$ взять $\sqrt{3}$ или $\sqrt{5}$ и т. д.

Система чисел вида

$$a+b\sqrt[3]{2} \tag{2}$$

с любыми рациональными (или лишь с любыми целыми) коэффициентами a, b не будет кольцом, так как произведение числа $\sqrt[3]{2}$ на самого себя нельзя, как легко проверить, записать в виде (2) [1]. Однако система чисел вида

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \tag{3}$$

с любыми рациональными коэффициентами a, b, c уже будет кольцом, и это же имеет место, если ограничиться случаем целых коэффициентов.

---

[1]) Действительно, пусть

$$\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2}, \tag{2'}$$

где числа a и b рациональны. Умножая обе части этого равенства на $\sqrt[3]{2}$,

Рассмотрим теперь все действительные числа, которые можно получить, применяя несколько раз операции сложения, умножения и вычитания к хорошо известному читателю числу π и каким-либо рациональным числам. Это будут числа, которые могут быть записаны в виде

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \ldots + a_n\pi^n, \tag{4}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — рациональные числа, $n \geqslant 0$. Заметим, что никакое число не может обладать двумя различными записями вида (4) — в противном случае, беря разность двух таких записей, мы получили бы, что число π удовлетворяет некоторому уравнению с рациональными коэффициентами; методами математического анализа доказывается, однако, что π не может удовлетворять на самом деле никакому уравнению с рациональными коэффициентами, т. е. является числом трансцендентным. Не используя, впрочем, этого результата, т. е. не предполагая, что запись числа в виде (4) однозначна, можно все же показать, что числа вида (4) составляют кольцо.

Кольцом будет также совокупность чисел, получающихся из числа π и рациональных чисел при помощи операций сложения, умножения, вычитания и деления, примененных несколько раз. Для доказательства нет необходимости искать для рассматриваемых чисел какую-либо специальную хорошую запись (хотя она и может быть найдена): если числа α и β получены из числа π и некоторых рациональных чисел указанными операциями, то это же верно, понятно, и для чисел $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$, а также (при $\beta \neq 0$) для числа $\frac{\alpha}{\beta}$.

Наконец, взяв совокупность комплексных чисел $a+bi$ с любыми рациональными a, b, мы получим кольцо; это же будет иметь место, если мы ограничимся целыми коэффициентами a, b.

Рассмотренные примеры не могут дать полного представления о том, сколь разнообразными бывают числовые кольца. Мы не будем пока, однако, продолжать наш список примеров и перейдем к рассмотрению одного специального и очень важного типа числовых

получим:

$$2 = a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4}.$$

Подставляя сюда выражение (2′) для $\sqrt[3]{4}$, мы после очевидных преобразований придем к равенству

$$(a+b^2)\sqrt[3]{2} = 2 - ab. \tag{2''}$$

Если $a+b^2 \neq 0$, то

$$\sqrt[3]{2} = \frac{2-ab}{a+b^2},$$

что невозможно, так как справа стоит рациональное число. Если же $a+b^2=0$, то, ввиду (2″), и $2-ab=0$. Из этих двух равенств вытекает $b^3=-2$, что снова невозможно ввиду рациональности числа b.

колец. Мы знаем, конечно, что в системах всех рациональных, всех действительных и всех комплексных чисел можно неограниченно выполнять деление (кроме деления на нуль), в то время как деление целых чисел выводит за пределы системы этих чисел. До сих пор мы не обращали серьезного внимания на это различие, в действительности же оно очень существенно и приводит к следующему определению.

Числовое кольцо называется *числовым полем*, если оно содержит частное любых двух своих чисел (делитель предполагается, конечно, отличным от нуля). Можно говорить, следовательно, о поле рациональных чисел, поле действительных чисел, полекомплексных чисел, в то время как кольцо целых чисел полем не является.

Некоторые из рассмотренных выше примеров числовых колец в действительности являются полями. Сначала заметим, что не существует числовых полей, отличных от поля рациональных чисел и целиком в нем содержащихся (систему, состоящую из одного нуля, мы не будем считать полем). Справедливо даже следующее более общее утверждение:

Поле рациональных чисел содержится целиком во всяком числовом поле.

Пусть, в самом деле, дано некоторое числовое поле, которое мы обозначим буквой P. Если a — любое число поля P, отличное от нуля, то P содержит и частное от деления числа a на самого себя, т. е. число единицу. Складывая единицу с самой собою несколько раз, мы получим, что все натуральные числа содержатся в поле P. С другой стороны, в поле P должна содержаться разность $a-a$, т. е. число нуль, а поэтому к P принадлежит и результат вычитания любого натурального числа из нуля, т. е. любое целое отрицательное число. Наконец, в поле P лежат и частные целых чисел, т. е. вообще все рациональные числа.

В поле комплексных чисел содержится много различных полей, и поле рациональных чисел будет лишь наименьшим среди них. Так, рассмотренное выше кольцо чисел вида

$$a+b\sqrt{2} \tag{5}$$

с любыми рациональными (а не только лишь с целыми) коэффициентами a, b будет полем. В самом деле рассмотрим частное двух чисел вида (5), $a+b\sqrt{2}$ и $c+d\sqrt{2}$, причем второе число считаем отличным от нуля; отлично от нуля, следовательно, и число $c-d\sqrt{2}$, и потому

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

Мы получили снова число вида (5), причем коэффициенты остаются рациональными. В этом примере число $\sqrt{2}$ можно заменить,

понятно, квадратным корнем из любого рационального числа, из которого в самом поле рациональных чисел не извлекается квадратный корень. Так, поле составляют числа вида $a+bi$ с рациональными a, b.

§ 44. Кольцо

В различных отделах математики, а также в применениях математики к технике и естествознанию приходится весьма часто встречаться с положением, когда алгебраические операции производятся не над числами, а над объектами совсем иной природы. Большое число таких примеров можно найти в предшествующих главах книги — напомним умножение и сложение матриц, сложение векторов, операции над многочленами, операции над линейными преобразованиями. Общее определение *алгебраической операции*, которому удовлетворяют операции сложения и умножения в числовых кольцах, а также операции в указанных примерах, состоит в следующем.

Пусть дано некоторое множество M, состоящее или из чисел, или из объектов геометрической природы, вообще из некоторых вещей, которые мы будем называть *элементами* этого множества. Говорят, что *в множестве M определена алгебраическая операция*, если указан закон, по которому любой паре элементов a, b из этого множества однозначным образом ставится в соответствие некоторый третий элемент c, также принадлежащий к M. Эта операция может быть названа *сложением*, и тогда c будет называться *суммой* элементов a и b и обозначаться символом $c=a+b$; эта операция может быть названа *умножением*, т. е. c будет *произведением* элементов a и b, $c=ab$; возможно, наконец, что для операции, определенной в множестве M, будет введена новая терминология и символика.

В каждом из числовых колец определены две независимые операции — сложение и умножение. Что же касается вычитания и деления, то их нельзя считать новыми операциями, так как они являются обратными соответственно для сложения и для умножения, если мы примем следующее общее определение *обратной операции*.

Пусть в множестве M определена алгебраическая операция, например сложение. Говорят, что *для этой операции существует обратная операция* — вычитание, если для любой пары элементов a, b из M существует в M такой элемент d, притом лишь единственный, который удовлетворяет равенству $b+d=a$. Элемент d называется тогда *разностью* элементов a и b и обозначается символом $d=a-b$.

В числовых полях обратной операцией обладает, очевидно, как сложение, так и умножение (последнее, правда, ограниченно: делитель должен быть отличным от нуля). В числовых же кольцах, не являющихся полями (как, например, в кольце целых чисел), обратной операцией обладает лишь сложение.