понятно, квадратным корнем из любого рационального числа, из которого в самом поле рациональных чисел не извлекается квадратный корень. Так, поле составляют числа вида $a+bi$ с рациональными a, b.

§ 44. Кольцо

В различных отделах математики, а также в применениях математики к технике и естествознанию приходится весьма часто встречаться с положением, когда алгебраические операции производятся не над числами, а над объектами совсем иной природы. Большое число таких примеров можно найти в предшествующих главах книги — напомним умножение и сложение матриц, сложение векторов, операции над многочленами, операции над линейными преобразованиями. Общее определение *алгебраической операции*, которому удовлетворяют операции сложения и умножения в числовых кольцах, а также операции в указанных примерах, состоит в следующем.

Пусть дано некоторое множество M, состоящее или из чисел, или из объектов геометрической природы, вообще из некоторых вещей, которые мы будем называть *элементами* этого множества. Говорят, что *в множестве M определена алгебраическая операция*, если указан закон, по которому любой паре элементов a, b из этого множества однозначным образом ставится в соответствие некоторый третий элемент c, также принадлежащий к M. Эта операция может быть названа *сложением*, и тогда c будет называться *суммой* элементов a и b и обозначаться символом $c=a+b$; эта операция может быть названа *умножением*, т. е. c будет *произведением* элементов a и b, $c=ab$; возможно, наконец, что для операции, определенной в множестве M, будет введена новая терминология и символика.

В каждом из числовых колец определены две независимые операции — сложение и умножение. Что же касается вычитания и деления, то их нельзя считать новыми операциями, так как они являются обратными соответственно для сложения и для умножения, если мы примем следующее общее определение *обратной операции*.

Пусть в множестве M определена алгебраическая операция, например сложение. Говорят, что *для этой операции существует обратная операция* — вычитание, если для любой пары элементов a, b из M существует в M такой элемент d, притом лишь единственный, который удовлетворяет равенству $b+d=a$. Элемент d называется тогда *разностью* элементов a и b и обозначается символом $d=a-b$.

В числовых полях обратной операцией обладает, очевидно, как сложение, так и умножение (последнее, правда, ограниченно: делитель должен быть отличным от нуля). В числовых же кольцах, не являющихся полями (как, например, в кольце целых чисел), обратной операцией обладает лишь сложение.

С другой стороны, в системе всех многочленов от неизвестного x, коэффициенты которых принадлежат к фиксированному числовому полю P, также определены две операции — сложение и умножение, причем сложение обладает обратной операцией — вычитанием.

И в числовых кольцах, и в системе многочленов операции сложения и умножения обладают, как известно, следующими свойствами (a, b, c — произвольные числа из рассматриваемого числового кольца или произвольные многочлены из рассматриваемой системы):

I. Сложение коммутативно: $a+b=b+a$.

II. Сложение ассоциативно: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

III. Умножение коммутативно: $ab=ba$.

IV. Умножение ассоциативно: $a(bc)=(ab)c$.

V. Сложение и умножение связаны законом дистрибутивности:

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Мы уже подготовлены теперь к общему определению понятия кольца, одного из важнейших понятий алгебры.

Множество R называется *кольцом*, если в нем определены две операции — сложение и умножение, обе коммутативные и ассоциативные, а также связанные законом дистрибутивности, причем сложение обладает обратной операцией — вычитанием.

Таким образом, примерами колец являются числовые кольца и кольца многочленов от неизвестного x с коэффициентами из данного числового поля или даже из данного числового кольца. Укажем еще один пример, хорошо выясняющий широту понятия кольца.

Курс математического анализа начинается с определения функции действительного переменного x. Рассмотрим совокупность функций, определенных для всех действительных значений x и принимающих действительные значения, и следующим образом определим в этой совокупности алгебраические операции: *суммой* двух функций $f(x)$ и $g(x)$ будет функция, значение которой при любом $x=x_0$ равно сумме значений заданных функций, т. е. равно $f(x_0)+g(x_0)$, *произведением* этих функций — функция, значение которой при всяком $x=x_0$ равно произведению $f(x_0)\cdot g(x_0)$. Сумма и произведение существуют, очевидно, для любых двух функций из рассматриваемой совокупности. Справедливость свойств I—V проверяется без всяких затруднений — сложение и умножение функций сводятся к сложению и умножению их значений при всяком x, т. е. к операциям над действительными числами, для которых свойства I—V имеют место. Наконец, считая *разностью* функций $f(x)$ и $g(x)$ функцию, значение которой при любом $x=x_0$ равно разности $f(x_0)-g(x_0)$, мы придем к операции вычитания, обратной сложению. Этим доказано, что *совокупность функций, определенных для всех действительных x, после введения в нее описанным выше способом операций сложения и умножения превращается в кольцо.*

Другие примеры колец функций можно получить, сохраняя данные выше определения операций над функциями, но рассматривая функции, определенные, например, лишь для положительных значений переменного x, или функции, определенные для значений x из отрезка $[0, 1]$. Вообще кольцом будет система всех функций, имеющих некоторую данную область определения. Можно было бы получить также примеры колец, рассматривая не все функции, определенные в данной области, а лишь изучаемые в курсе математического анализа непрерывные функции. Можно было бы, с другой стороны, рассматривать комплексные функции комплексного переменного. Вообще, различных колец функций, как и различных числовых колец, чрезвычайно много.

Переходим к установлению некоторых простейших свойств колец, непосредственно вытекающих из определения кольца. Эти свойства для случая чисел вполне привычны, однако читателю, быть может, покажется иногда неожиданным, что они являются следствиями лишь условий I—V и существования однозначного вычитания.

Сначала несколько замечаний о значении условий I—V. Роль *законов коммутативности* не требует пояснений. Значение *законов ассоциативности* состоит в следующем: в определении алгебраической операции говорится о сумме или произведении лишь двух элементов. Если же мы попытаемся определить, например, произведение трех элементов a, b, c, то встретимся с таким затруднением: произведения au и vc, где $bc=u$, $ab=v$, могут, вообще говоря, не совпадать, т. е. $a(bc)\neq(ab)c$. Закон ассоциативности требует, чтобы эти произведения были равны одному и тому же элементу кольца: этот элемент естественно принять в качестве произведения abc, записываемого уже без всяких скобок. Больше того, *закон ассоциативности позволяет однозначным образом определить произведение (соответственно, сумму) для любого конечного числа элементов кольца*, т. е. позволяет доказать независимость произведения любых n элементов от первоначального распределения скобок.

Докажем это утверждение индукцией по числу n. Для $n=3$ оно уже доказано, поэтому полагаем $n>3$, причем считаем, что для всех чисел, меньших n, наше утверждение уже доказано. Пусть даны элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и пусть в этой системе некоторым образом распределены скобки, указывающие на порядок, в каком должно выполняться умножение. Последним шагом будет умножение произведения первых k элементов $a_1a_2\ldots a_k$ (где $1\leqslant k\leqslant n-1$) на произведение $a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n$. Так как эти произведения состоят из меньшего, чем n, числа множителей и поэтому, по предположению, однозначно определены, то нам остается доказать для любых k и l равенство

$$(a_1a_2\ldots a_k)(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n)=(a_1a_2\ldots a_l)(a_{l+1}a_{l+2}\ldots a_n).$$

Для этого достаточно рассмотреть случай $l=k+1$. В этом случае, однако, полагая

$$a_1a_2\ldots a_k=b,\quad a_{k+2}a_{k+3}\ldots a_n=c,$$

мы получаем на основании закона ассоциативности

$$b(a_{k+1}c)=(ba_{k+1})c.$$

Этим наше утверждение доказано.

Можно говорить, в частности, о произведении n равных между собою элементов, т. е. ввести понятие о *степени* a^n элемента a с целым положительным показателем n. Легко проверить, что все обычные правила оперирования с показателями остаются справедливыми в любом кольце. Закон ассоциативности сложения приводит аналогичным образом к понятию о *кратном* na элемента a с целым положительным коэффициентом n.

Закон дистрибутивности, т. е. обычное правило раскрытия скобок, является единственным требованием в определении кольца, связывающим сложение и умножение; лишь благодаря этому закону совместное изучение двух указанных операций дает больше, чем можно было бы получить при их раздельном изучении. В формулировке закона дистрибутивности участвует сумма лишь двух слагаемых. Без всякого труда доказывается, однако, справедливость равенства

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\, b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_k b$$

при любом k, а затем и общего правила умножения суммы на сумму.

Во всяком кольце выполняется закон дистрибутивности и для разности. Действительно, по определению разности элемент $a-b$ удовлетворяет равенству

$$b + (a-b) = a.$$

Умножая обе части этого равенства на c и применяя к левой части равенства закон дистрибутивности, мы получаем:

$$bc + (a-b)\, c = ac.$$

Элемент $(a-b)\, c$ является, следовательно, разностью элементов ac и bc:

$$(a-b)\, c = ac - bc.$$

Весьма важные свойства колец вытекают из существования вычитания. Если a есть произвольный элемент кольца R, то разность $a-a$ будет некоторым вполне определенным элементом кольца. Его роль аналогична роли нуля в числовых кольцах, однако по определению он может зависеть от выбора элемента a, и поэтому мы обозначим его пока через 0_a.

Докажем, что на самом деле элементы 0_a для всех a равны между собой. Действительно, если b есть произвольный другой элемент кольца R, то, прибавляя к обеим частям равенства

$$a + (b-a) = b$$

элемент 0_a и используя равенство $0_a + a = a$, мы получаем:

$$0_a + b = 0_a + a + (b-a) = a + (b-a) = b.$$

Таким образом, $0_a = b - b = 0_b$.

Мы доказали, *что всякое кольцо R обладает однозначно определенным элементом, сумма которого с любым элементом a этого кольца равна a*. Будем называть этот элемент *нулем* кольца R и обозначать символом 0, не считая серьезной опасность смешать его с числом нуль. Таким образом,

$$a+0=a \text{ для всех } a \text{ из } R.$$

Далее, *во всяком кольце для любого элемента a существует однозначно определенный противоположный элемент $-a$, удовлетворяющий равенству*

$$a+(-a)=0,$$

а именно, этим элементом будет разность $0-a$; однозначность вытекает из однозначности вычитания. Очевидно, что $-(-a)=a$. Разность $b-a$ двух любых элементов кольца можно записать теперь в виде

$$b-a=b+(-a).$$

Действительно,

$$[b+(-a)]+a=b+[(-a)+a]=b+0=b.$$

Для любого элемента a кольца и любого целого положительного числа n имеет место равенство

$$n(-a)=-(na).$$

Действительно, группировкой слагаемых получаем:

$$na+n(-a)=n[a+(-a)]=n\cdot 0=0.$$

Мы получили теперь возможность определить *отрицательные кратные* элемента кольца: если $n>0$ то равные между собой элементы $n(-a)$ и $-(na)$ будут обозначаться через $(-n)a$. Условимся, наконец, *нулевым кратным* $0\cdot a$ любого элемента a считать нуль рассматриваемого кольца.

Определение нуля дано нами лишь при помощи операции сложения и ей обратной, т. е. без использования умножения. В случае чисел, однако, число нуль и по отношению к умножению обладает одним характерным и притом очень важным свойством. Оказывается, что этим свойством обладает нуль любого кольца: *во всяком кольце произведение любого элемента на нуль равно нулю*. Доказательство непосредственно опирается на закон дистрибутивности: если a есть произвольный элемент кольца R, то, каков бы ни был вспомогательный элемент x этого кольца, мы получим:

$$a\cdot 0=a(x-x)=ax-ax=0.$$

Пользуясь этим свойством нуля, можно доказать, что *во всяком кольце для любых элементов a, b справедливо равенство*

$$(-a)b=-ab.$$

Действительно,

$$ab+(-a)b=[a+(-a)]b=0\cdot b=0.$$

Отсюда следует, что хорошо известное и все же несколько таинственное правило умножения отрицательных чисел — «минус на минус дает плюс» — также вытекает из определения кольца, т. е. *в любом кольце имеет место равенство*

$$(-a)(-b)=ab.$$

В самом деле,

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]=-(-ab)=ab.$$

Читатель без труда докажет теперь, что во всяком кольце для кратных (в том числе и отрицательных) любого элемента остаются справедливыми все правила оперирования с кратными некоторого числа.

Таким образом, алгебраические операции в произвольном кольце обладают многими привычными нам свойствами операций над числами. Не следует думать, однако, что любое свойство сложения и умножения чисел сохраняется во всяком кольце. Так, умножение чисел обладает свойством, обратным рассмотренному выше: если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю. Это свойство уже не может быть распространено на любые кольца — в некоторых кольцах можно указать такие пары отличных от нуля элементов, произведение которых равно нулю, т. е. $a\neq 0$, $b\neq 0$, но $ab=0$; элементы a, b с этим свойством называются *делителями нуля*.

Примеров колец с делителями нуля нельзя найти, понятно, среди числовых колец. Не содержат делителей нуля и кольца многочленов с числовыми коэффициентами. Многие кольца функций обладают, однако, делителями нуля. Заметим, прежде всего, что нулем во всяком кольце функций будет функция, равная нулю при всех значениях переменного x. Построим теперь следующие функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные для всех действительных значений x:

$$f(x)=0 \quad \text{при} \quad x\leqslant 0, \quad f(x)=x \quad \text{при} \quad x>0;$$
$$g(x)=x \quad \text{при} \quad x\leqslant 0, \quad g(x)=0 \quad \text{при} \quad x>0.$$

Обе эти функции отличны от нуля, так как не при всех значениях x равны нулю их значения; произведение же этих функций равно нулю.

Не все требования I — V, входящие в определение кольца, являются в одинаковой мере необходимыми. Развитие науки показывает, что в то время как свойства еложения I и II и закон дистрибутивности V имеют место во всех приложениях, включение в определение кольца свойств умножеиия III и IV часто оказывается излишне стеснительным, суживая возможную область применимости этого понятия. Так, множество квадратных матриц порядка n с действительными элементами, рассматриваемое с операциями сложения и умножения матриц, удовлетворяет всем требованиям, входящим в определение кольца, за исключением закона коммутативности умножения.

С некоммутативными умножениями приходится встречаться так часто и в таких важных случаях, что в настоящее время под термином «кольцо» понимают обычно *некоммутативное кольцо* (точнее, не обязательно коммутативное кольцо, в смысле возможной некоммутативности умножения), называя тот частный тип колец, в которых требование III выполняется, *коммутативными кольцами*.

В последнее время повышается интерес и к кольцам с неассоциативным умножением и общая теория колец уже строится сейчас как теория неассоциативных (т. е. не обязательно ассоциативных) колец. Простейшим примером таких колец является множество векторов трехмерного евклидова пространства относительно операций сложения и (известного из курса аналитической геометрии) векторного умножения векторов.

§ 45. Поле

Подобно тому как среди числовых колец были выделены и названы числовыми полями те кольца, в которых можно выполнять деление (кроме деления на нуль), естественно сделать это и в общем случае. Заметим сначала, что *ни в каком кольце невозможно деление на нуль* ввиду доказанного выше свойства нуля по отношению к умножению: разделить элемент a на нуль означает найти в кольце такой элемент x, что $0 \cdot x = a$, что при $a \neq 0$ невозможно, так как левая часть равна нулю.

Введем следующее определение:

Кольцо P называется *полем*, если оно состоит не только из одного нуля и если в нем деление выполнимо, притом однозначным образом, во всех случаях, кроме случая деления на нуль, т. е. если для любых элементов a и b из P, из которых b отлично от нуля, существует в P такой элемент q, притом лишь единственный, который удовлетворяет равенству $bq = a$. Элемент q называется *частным* элементов a и b и обозначается символом $q = \frac{a}{b}$ [1]).

Примерами полей служат, понятно, все числовые поля. Кольцо многочленов от неизвестного x с действительными коэффициентами или вообще с коэффициентами из некоторого числового поля не является полем — существующее для многочленов деление с остатком отличается, конечно, от деления «нацело», предполагающегося в определении поля. С другой стороны, легко видеть, что *совокупность всех дробно-рациональных функций с действительными коэффициентами* (см. § 25) *будет полем*, содержащим кольцо многочленов, подобно тому как поле рациональных чисел содержит кольцо целых чисел.

Среди колец функций можно указать некоторые другие примеры полей; мы не будем, однако, на них останавливаться и перейдем к примерам совсем иного рода.

---

[1]) Единственность деления в поле, как и предполагавшаяся в определении кольца единственность вычитания, в действительности без труда могут быть доказаны при помощи других требований, входящих в определение поля или, соответственно, кольца.