все еще не разлагается на линейные множители, то снова расширяем поле, создавая корень еще для одного из оставшихся нелинейных неприводимых множителей. После конечного числа шагов мы придем, очевидно, к полю разложения для $f(x)$.

Понятно, что $f(x)$ может обладать многими различными полями разложения. Можно было бы доказать, что все минимальные поля, содержащие поле P и n корней многочлена $f(x)$ (где n — степень этого многочлена), изоморфны между собой. Мы не будем, однако, использовать этого утверждения и поэтому не приводим его доказательства.

Кратные корни. В предшествующем параграфе было доказано, что многочлен $f(x)$ над полем P характеристики 0 тогда и только тогда не имеет кратных множителей, если он взаимно прост со своей производной, а также было отмечено, что отсутствие у $f(x)$ кратных множителей над P влечет за собой отсутствие таких множителей над любым расширением $\overline{P}$ поля P. Применяя это к случаю когда $\overline{P}$ есть некоторое поле разложения для $f(x)$, и вспоминая определение кратного корня, мы приходим к следующему результату:

Если многочлен $f(x)$ над полем P характеристики 0 не имеет кратных корней в данном поле разложения, то он взаимно прост со своей производной $f'(x)$. Обратно, если $f(x)$ взаимно прост со своей производной, то он не имеет кратных корней ни в каком из своих полей разложения.

Отсюда, в частности, вытекает, что *многочлен $f(x)$, неприводимый над полем P характеристики 0, не может иметь кратных корней ни в каком расширении этого поля.* Для полей конечной характеристики это утверждение перестает быть справедливым — обстоятельство, играющее заметную роль в общей теории полей.

В заключение заметим, что *для случая произвольного поля сохраняются и формулы Вьета* (см. § 24); при этом корни многочлена берутся в некотором поле разложения этого многочлена.

§ 50*. Поле рациональных дробей

Теория рациональных дробей, изложенная в § 25, *полностью сохраняется и в случае произвольного основного поля.* Однако при переходе от поля действительных чисел к произвольному полю P взгляд на выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$ как на функции переменного x должен быть отброшен, так как он, как мы знаем, неприменим уже к многочленам. Перед нами стоит задача определить, какой смысл нужно придать этим выражениям в том случае, когда коэффициенты принадлежат к произвольному полю P. Точнее, мы хотим построить поле, в котором содержалось бы кольцо многочленов $P[x]$, причем так, чтобы операции сложения и умножения, определенные в этом новом поле, в применении к многочленам совпадали бы

с операциями в кольце $P[x]$; короче, кольцо $P[x]$ должно быть подкольцом этого нового поля. С другой стороны, всякий элемент этого нового поля должен представляться (в смысле деления, определенного в этом поле) в виде частного двух многочленов. Такое поле для всякого P может быть построено, как будет сейчас показано; его обозначают $P(x)$ (неизвестное заключено в круглые скобки!) и называют *полем рациональных дробей* над полем P.

Предположим сначала, что кольцо $P[x]$ уже является подкольцом некоторого поля Q. Если $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные многочлены из $P[x]$, причем $g(x) \neq 0$, то в поле Q существует однозначно определенный элемент, равный частному от деления $f(x)$ на $g(x)$. Обозначая этот элемент, как обычно в случае поля, через $\frac{f(x)}{g(x)}$, мы на основании определения частного можем написать равенство

$$f(x) = g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{1}$$

где произведение нужно понимать в смысле умножения в поле Q. Может случиться, что некоторые частные $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ являются одним и тем же элементом поля Q; условием для этого является обычное условие равенства дробей:

Тогда и только тогда $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *если* $f(x)\psi(x) = \varphi(x)g(x)$.

Действительно, если $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \alpha$, то, по (1),

$$f(x) = g(x)\alpha, \quad \varphi(x) = \psi(x)\alpha,$$

откуда

$$f(x)\psi(x) = g(x)\psi(x)\alpha = g(x)\varphi(x).$$

Обратно, если $f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x) = u(x)$ в смысле умножения в кольце $P[x]$, то, переходя к полю Q, мы получаем равенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{g(x)\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Легко видеть, далее, что сумма и произведение любых элементов из Q, являющихся частными многочленов из $P[x]$, снова могут быть представлены в виде таких частных, причем справедливы обычные правила сложения и умножения дробей:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)\psi(x) + g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}, \tag{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)\cdot\varphi(x)}{g(x)\cdot\psi(x)}. \tag{3}$$

Действительно, умножая обе части каждого из этих равенств на произведение $g(x)\psi(x)$ и применяя (1), мы получим равенства, справедливые в кольце $P[x]$. Справедливость равенств (2) и (3)

следует теперь из того, что, благодаря отсутствию делителей нуля в поле Q, обе части каждого из полученных равенств можно сократить на отличный от нуля элемент $g(x)\psi(x)$, не нарушая равенств.

Эти предварительные замечания подсказывают нам тот путь, по которому мы должны пойти при построении поля $P(x)$. Пусть даны произвольное поле P и над ним кольцо многочленов $P[x]$. Всякой упорядоченной паре многочленов $f(x)$, $g(x)$, где $g(x) \neq 0$, мы ставим в соответствие символ $\frac{f(x)}{g(x)}$, называемый *рациональной дробью с числителем $f(x)$ и знаменателем $g(x)$*. Подчеркиваем, что это просто символ, соответствующий данной паре многочленов, так как деление многочленов в самом кольце $P[x]$, вообще говоря, невыполнимо, а ни в каком поле кольцо $P[x]$ пока еще не содержится; если даже $g(x)$ является делителем для $f(x)$, новый символ $\frac{f(x)}{g(x)}$ следует пока отличать от многочлена, получающегося в качестве частного при делении $f(x)$ на $g(x)$.

Назовем теперь рациональные дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *равными*:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{4}$$

если в кольце $P[x]$ имеет место равенство $f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x)$. Очевидно, что всякая дробь равна самой себе, а также, что если одна дробь равна другой, то и вторая равна первой. Докажем транзитивность этого понятия равенства. Пусть даны равенства (4) и

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}. \tag{5}$$

Из равносильных им равенств в кольце $P[x]$

$$f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x), \qquad \varphi(x)v(x) = \psi(x)u(x)$$

вытекает

$$f(x)v(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x)v(x) = g(x)u(x)\psi(x)$$

и поэтому, после сокращения на не равный нулю (как знаменатель одной из дробей) многочлен $\psi(x)$, получаем:

$$f(x)v(x) = g(x)u(x),$$

откуда, по определению равенства дробей,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)},$$

что и требовалось доказать.

Объединим теперь в один класс все дроби, равные некоторой данной, и поэтому, в силу транзитивности равенства, равные между собой. Если в одном классе имеется хотя бы одна дробь, не

содержащаяся в другом классе, то, как следует из транзитивности равенства, эти два класса не имеют ни одного общего элемента.

Таким образом, совокупность всех рациональных дробей, написанных при помощи многочленов из кольца $P[x]$, распадается на непересекающиеся классы равных между собой дробей. Мы хотим теперь так определить алгебраические операции в этом множестве классов равных дробей, чтобы оно оказалось полем. Для этого мы будем определять операции над рациональными дробями и каждый раз проверять, что замена слагаемых (или множителей) равными им дробями заменяет сумму (или произведение) также равной дробью. Это позволит говорить о сумме и произведении классов равных дробей.

Предварительно сделаем следующее замечание, которое дальше будет неоднократно применяться: *рациональная дробь превращается в равную дробь, если ее числитель и знаменатель умножаются на один и тот же многочлен, отличный от нуля, или же сокращаются на любой общий множитель.* Действительно,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)\,h(x)}{g(x)\,h(x)},$$

так как в кольце $P[x]$

$$f(x)\,[g(x)\,h(x)]=g(x)\,[f(x)\,h(x)].$$

Сложение рациональных дробей мы определяем по формуле (2); так как из $g(x)\neq 0$ и $\psi(x)\neq 0$ следует $g(x)\,\psi(x)\neq 0$, то правая часть этой формулы действительно будет рациональной дробью. Если дано, далее, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_0(x)}{g_0(x)}, \qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},$$

т. е.

$$f(x)\,g_0(x)=g(x)\,f_0(x), \qquad \varphi(x)\,\psi_0(x)=\psi(x)\,\varphi_0(x), \tag{6}$$

то, умножая обе части первого из равенств (6) на $\psi(x)\,\psi_0(x)$, обе части второго равенства — на $g(x)\,g_0(x)$, а затем складывая эти равенства почленно, мы получим:

$$[f(x)\,\psi(x)+g(x)\,\varphi(x)]\,g_0(x)\,\psi_0(x)=$$
$$=[f_0(x)\,\psi_0(x)+g_0(x)\,\varphi_0(x)]\,g(x)\,\psi(x),$$

что равносильно равенству

$$\frac{f(x)\,\psi(x)+g(x)\,\varphi(x)}{g(x)\,\psi(x)}=\frac{f_0(x)\,\psi_0(x)+g_0(x)\,\varphi_0(x)}{g_0(x)\,\psi_0(x)}.$$

Таким образом, если даны два класса равных между собой дробей, то суммы любой дроби из одного класса с любой дробью из другого класса все между собой равны, т. е. лежат в некотором вполне определенном третьем классе. Этот класс называется *суммой* заданных двух классов.

Коммутативность этого сложения непосредственно вытекает из (2), а ассоциативность доказывается следующим образом:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]+\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}=$$
$$=\frac{f(x)\psi(x)v(x)+g(x)\varphi(x)v(x)+g(x)\psi(x)u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=$$
$$=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)v(x)+\psi(x)u(x)}{\psi(x)v(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}\right].$$

Из определения равенства дробей без труда следует, что все дроби вида $\frac{0}{g(x)}$, т. е. дроби с равным нулю числителем, равны между собой и что они составляют полный класс равных дробей. Этот класс мы назовем *нулевым* и докажем, что он играет в нашем сложении роль нуля. Действительно, если дана произвольная дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, то

$$\frac{0}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{0\cdot\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Из равенства

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)}{g(x)}=\frac{0}{g^2(x)},$$

правая часть которого принадлежит к нулевому классу, следует теперь, что класс дробей, равных дроби $\frac{-f(x)}{g(x)}$, будет *противоположным* для класса дробей, равных дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$. Отсюда, как мы знаем, следует выполнимость однозначного *вычитания*.

Умножение рациональных дробей мы определим по формуле (3), причем, ввиду $g(x)\psi(x)\neq 0$, правая часть этой формулы действительно будет рациональной дробью. Если, далее,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_0(x)}{g_0(x)},\qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},$$

т. е.

$$f(x)g_0(x)=g(x)f_0(x),\qquad \varphi(x)\psi_0(x)=\psi(x)\varphi_0(x),$$

то, перемножая эти последние равенства почленно, мы получим:

$$f(x)g_0(x)\varphi(x)\psi_0(x)=g(x)f_0(x)\psi(x)\varphi_0(x),$$

что равносильно равенству

$$\frac{f(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{f_0(x)\varphi_0(x)}{g_0(x)\psi_0(x)}.$$

Таким образом, по аналогии с данным выше определением суммы классов, можно говорить о *произведении* классов равных между собой дробей.

Коммутативность и ассоциативность этого умножения непосредственно следуют из (3), а справедливость закона дистрибутивности доказывается следующим образом:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}=$$

$$=\frac{[f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)]\,u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)u(x)+g(x)\varphi(x)u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)\psi(x)u(x)v(x)+g(x)\varphi(x)u(x)v(x)}{g(x)\psi(x)v^2(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}+\frac{\varphi(x)u(x)}{\psi(x)v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Легко видеть, что дроби вида $\frac{f(x)}{f(x)}$, т. е. дроби, числитель которых равен знаменателю, все равны между собой и составляют отдельный класс. Этот класс называется *единичным* и играет в нашем умножении роль единицы:

$$\frac{f(x)}{f(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\varphi(x)}{f(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Если, наконец, дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ не принадлежит к нулевому классу, т. е. $f(x)\neq 0$, то существует дробь $\frac{g(x)}{f(x)}$. Так как

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{f(x)g(x)}{g(x)f(x)},$$

а правая часть этого равенства принадлежит к единичному классу, то класс дробей, равных дроби $\frac{g(x)}{f(x)}$, будет *обратным* для класса дробей, равных дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$. Отсюда следует выполнимость однозначного *деления*.

Таким образом, *классы равных между собой рациональных дробей с коэффициентами из поля P составляют при нашем определении операций коммутативное поле*. Это поле и будет искомым полем $P(x)$. Мы должны еще, впрочем, доказать, что в построенном нами поле содержится подкольцо, изоморфное кольцу $P[x]$, и что всякий элемент поля представим в виде частного двух элементов из этого подкольца.

Если мы произвольному многочлену $f(x)$ из кольца $P[x]$ поставим в соответствие класс рациональных дробей, равных дроби $\frac{f(x)}{1}$ (среди всех дробей содержатся, понятно, и дроби, знаменатель которых равен единице), то получим взаимно однозначное отображение

кольца $P[x]$ внутрь построенного нами поля. Действительно, из равенства

$$\frac{f(x)}{1}=\frac{\varphi(x)}{1}$$

следовало бы $f(x)\cdot 1=1\cdot\varphi(x)$, т. е. $f(x)=\varphi(x)$. Это отображение будет даже изоморфным, как показывают равенства

$$\frac{f(x)}{1}+\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 1}{1^2}=\frac{f(x)+g(x)}{1},$$

$$\frac{f(x)}{1}\cdot\frac{g(x)}{1}=\frac{f(x)\cdot g(x)}{1}.$$

Таким образом, *классы дробей, равных дробям вида* $\frac{f(x)}{1}$, *составляют в нашем поле подкольцо, изоморфное кольцу* $P[x]$. Дробь $\frac{f(x)}{1}$ можно поэтому обозначить просто $f(x)$. Так как, наконец, при $g(x)\neq 0$ класс дробей, равных дроби $\frac{1}{g(x)}$, является обратным для класса дробей, равных дроби $\frac{g(x)}{1}$, то из равенства

$$\frac{f(x)}{1}\cdot\frac{1}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

следует, что *все элементы нашего поля можно считать* (в смысле операций, определенных в этом поле) *частными многочленов из кольца* $P[x]$.

Мы построили над произвольным полем P поле рациональных дробей $P(x)$. Этим же методом, беря вместо кольца многочленов кольцо целых чисел, можно построить поле рациональных чисел. Объединяя эти два случая и используя такой же метод, можно было бы доказать теорему, что вообще всякое коммутативное кольцо без делителей нуля является подкольцом некоторого поля.