Доказанную теорему можно также, очевидно, сформулировать следующим образом:

Система элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, *рассматриваемых как элементы кольца многочленов* $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, *алгебраически независима над полем* P.

§ 53*. Дополнительные замечания о симметрических многочленах

Замечания к основной теореме. Доказательство основной теоремы о симметрических многочленах, проведенное в предшествующем параграфе, позволяет сделать несколько существенных добавлений к формулировке теоремы, которыми мы ниже воспользуемся. Прежде всего, коэффициенты того многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, который найден нами в качестве выражения для симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через элементарные симметрические многочлены, не только принадлежат к полю P, но даже *выражаются через коэффициенты многочлена* f *при помощи сложения и вычитания, т. е. принадлежат к кольцу* L, *порождаемому коэффициентами многочлена* f *внутри поля* P.

В самом деле, все коэффициенты многочлена φ_1 (см. формулу (5) предшествующего параграфа) относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть, как легко видеть, целые кратные от коэффициента a_0 при высшем члене многочлена f и поэтому принадлежат к кольцу L. Пусть уже доказано, что к L принадлежат все коэффициенты (относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$) многочленов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$. Тогда коэффициенты многочлена $f_l = f - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_l$ также будут принадлежать к L, а поэтому в L лежат и все коэффициенты многочлена φ_{l+1} относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

С другой стороны, *степень многочлена* $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *по совокупности* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *равна степени, которую имеет многочлен* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *по каждому из неизвестных* x_i. В самом деле, так как (2) из предшествующего параграфа есть высший член многочлена f, то k_1 будет степенью f относительно неизвестного x_1, а поэтому, ввиду симметричности, и относительно любого другого из неизвестных x_i. Однако степень φ_1 по совокупности σ равна, по (5) из предшествующего параграфа, числу

$$(k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) + \ldots + (k_{n-1} - k_n) + k_n = k_1.$$

Далее, так как старший член многочлена f_1 ниже старшего члена многочлена f, то степень f_1 по каждому из x_i будет не выше чем степень f по каждому из этих неизвестных. Однако многочлен φ_2 играет для f_1 такую же роль, как φ_1 для f, поэтому степень φ_2 по совокупности σ равна степени f_1 по каждому из x_i, т. е. она не больше чем k_1 и т. д. Таким образом, и степень $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ не выше чем k_1. Поскольку же никакое φ_i с $i > 1$ не может содер-

жать все $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ в тех же степенях, что и φ_1, то степень $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ в точности равна k_1. Тем самым наше утверждение доказано.

Наконец, пусть $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\ldots\sigma_n^{l_n}$ будет один из членов многочлена $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Назовем *весом* этого члена число

$$l_1 + 2l_2 + \ldots + nl_n,$$

т. е. сумму показателей, умноженных на индексы соответствующих σ_i. Это будет, иными словами, степень взятого нами члена по совокупности неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, как вытекает из доказанной в § 51 теоремы о степени произведения многочленов. Тогда справедливо следующее утверждение:

Если однородный симметрический многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет по совокупности неизвестных степень s, то все члены его выражения $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ через σ будут одного и того же веса, равного s.

Действительно, если (2) из предшествующего параграфа есть высший член однородного многочлена f, то

$$s = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Однако вес члена φ_1 равен, по (5) из предшествующего параграфа,

$$(k_1 - k_2) + 2(k_2 - k_3) + \ldots + (n-1)(k_{n-1} - k_n) + nk_n = \\ = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n,$$

т. е. также равен s. Далее, многочлен $f_1 = f - \varphi_1$ как разность двух однородных многочленов степени s сам будет однородным степени s, а поэтому и член φ_2 многочлена φ будет веса s и т. д.

Симметрические рациональные дроби. Основная теорема о симметрических многочленах может быть распространена на случай рациональных дробей. Назовем рациональную дробь $\frac{f}{g}$ от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *симметрической*, если она остается равной самой себе при любой перестановке неизвестных. Легко показать, что *это определение не зависит от того, берем ли мы дробь $\frac{f}{g}$ или равную ей дробь $\frac{f_0}{g_0}$*. Действительно, если ω есть некоторая перестановка наших неизвестных, а φ — произвольный многочлен от этих неизвестных, то условимся через φ^ω обозначать тот многочлен, в который переводится φ перестановкой ω. По предположению, при любом ω

$$\frac{f}{g} = \frac{f^\omega}{g^\omega},$$

т. е. $fg^{\omega}=gf^{\omega}$. С другой стороны, из

$$\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}$$

следует $fg_0=gf_0$, откуда $f^{\omega}g_0^{\omega}=g^{\omega}f_0^{\omega}$. Умножая обе части последнего равенства на f, мы получаем:

$$ff^{\omega}g_0^{\omega}=fg^{\omega}f_0^{\omega}=gf^{\omega}f_0^{\omega},$$

откуда после сокращения на f^{ω} следует: $fg_0^{\omega}=gf_0^{\omega}$, т. е.

$$\frac{f_0^{\omega}}{g_0^{\omega}}=\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}.$$

Справедлива следующая теорема:

Всякая симметрическая рациональная дробь от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля P представима в виде рациональной дроби от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ с коэффициентами, снова принадлежащими к P.

Действительно, пусть дана симметрическая рациональная дробь

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Предполагая ее несократимой, можно было бы доказать, что и f и g будут симметрическими многочленами. Следующий путь будет, однако, более простым. Если многочлен g не является симметрическим, то умножаем числитель и знаменатель на произведение всех $n!-1$ многочленов, получающихся из g при всевозможных нетождественных подстановках неизвестных. Легко проверить, что знаменатель будет теперь симметрическим многочленом. Ввиду симметричности всей дроби отсюда следует, что числитель теперь также будет симметрическим, а поэтому для доказательства теоремы остается выразить числитель и знаменатель через элементарные симметрические многочлены.

Степенные суммы. В приложениях часто встречаются симметрические многочлены

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k,\quad k=1, 2, \ldots,$$

т. е. суммы k-х степеней неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти многочлены, называемые *степенными суммами*, должны выражаться, по основной теореме, через элементарные симметрические многочлены. Разыскание этих выражений является, однако, при больших k весьма затруднительным, и поэтому представляет интерес та связь между многочленами $s_1, s_2, \ldots$ и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, которая будет сейчас установлена.

Прежде всего $s_1=\sigma_1$. Далее, если $k\leqslant n$, то легко проверить справедливость равенств

$$\left.\begin{array}{l} s_{k-1}\sigma_1=s_k+S\left(x_1^{k-1}x_2\right)^1,), \\ s_{k-2}\sigma_2=S\left(x_1^{k-1}x_2\right)+S\left(x_1^{k-2}x_2x_3\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{k-i}\sigma_i=S\left(x_1^{k-i+1}x_2\dots x_i\right)+S\left(x_1^{k-i}x_2\dots x_ix_{i+1}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2\leqslant i\leqslant k-2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_1\sigma_{k-1}=S\left(x_1^2x_2\dots x_{k-1}\right)+k\sigma_k. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Беря альтернированную сумму этих равенств (т. е. сумму с чередующимися знаками), а затем перенося все члены в одну часть равенства, мы получим следующую формулу:

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\dots+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^k k\sigma_k=0 \quad (2)$$
$$(k\leqslant n).$$

Если же $k>n$, то система равенств (1) примет вид

$$\begin{array}{l} s_{k-1}\sigma_1=s_k+S\left(x_1^{k-1}x_2\right), \\ s_{k-2}\sigma_2=S\left(x_1^{k-1}x_2\right)+S\left(x_1^{k-2}x_2x_3\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{k-i}\sigma_i=S\left(x_1^{k-i+1}x_2\dots x_i\right)+S\left(x_1^{k-i}x_2\dots x_ix_{i+1}\right), \qquad 2\leqslant i\leqslant n-1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{k-n}\sigma_n=S\left(x_1^{k-n+1}x_2\dots x_n\right), \end{array}$$

откуда вытекает формула

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\dots+(-1)^n s_{k-n}\sigma_n=0 \qquad (k>n). \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) называются *формулами Ньютона*. Они связывают степенные суммы с элементарными симметрическими многочленами и позволяют последовательно находить выражения для s_1, s_2, s_3, ... через $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Так, мы знаем, что $s_1=\sigma_1$, что вытекает и из формулы (2). Если, далее, $k=2\leqslant n$, то, по (2), $s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0$, откуда

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2.$$

Далее, при $k=3\leqslant n$ будет $s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2-3\sigma_3=0$, откуда, используя найденные уже выражения для s_1 и s_2, получаем:

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,$$

---

[1]) См. (11) предшествующего параграфа.

что нам уже известно (см. (12) из предшествующего параграфа). Если же $k=3$, но $n=2$, то, по (3), $s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2=0$, откуда $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$. Пользуясь формулами Ньютона, можно получить общую формулу, выражающую s_k через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Эта формула, впрочем, весьма громоздка и мы не будем ее приводить.

Если основное поле P имеет характеристику 0 и поэтому деление на любое натуральное число n имеет смысл[1]), то формула (2) дает возможность последовательно выразить элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ через первые n степенных сумм $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Так, $\sigma_1=s_1$, а поэтому

$$\sigma_2=\frac{1}{2}(s_1\sigma_1-s_2)=\frac{1}{2}(s_1^2-s_2),$$

$$\sigma_3=\frac{1}{3}(s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2)=\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)$$

и т. д. Отсюда и из основной теоремы вытекает следующий результат:

Всякий симметрический многочлен от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P характеристики нуль представим в виде многочлена от степенных сумм $s_1, s_2, \ldots, s_n$ с коэффициентами, принадлежащими к полю P.

Многочлены, симметрические по двум системам неизвестных. В следующем параграфе, а также в § 58 будет использовано одно обобщение понятия симметрического многочлена. Пусть даны две системы неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_r$, причем их объединение

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad y_1, y_2, \ldots, y_r \tag{4}$$

алгебраически независимо над полем P. Многочлен над полем P $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r)$ называется *симметрическим по двум системам неизвестных*, если он не меняется при любых перестановках неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ между собой и неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_r$ между собой. Если для элементарных симметрических многочленов от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы сохраним обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, а элементарные симметрические многочлены от $y_1, y_2, \ldots, y_r$ обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$, то основная теорема обобщается следующим образом.

Всякий многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r)$ над полем P, симметрический по системам неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_r$, представим в виде многочлена (с коэффициентами из P) от элементарных симметрических многочленов по этим двум системам неизвестных:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_r)=\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r).$$

---

[1]) В поле характеристики p выражение $\frac{a}{p}$ не имеет смысла при $a\neq 0$, так как в этом поле при любом x будет $px=0$.

В самом деле, многочлен f можно рассматривать как многочлен $\bar{f}(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ с коэффициентами, являющимися многочленами от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Так как f не меняется при перестановках неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то коэффициенты многочлена $\bar{f}$ будут симметрическими многочленами от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и поэтому, по основной теореме, представимы в виде многочленов (с коэффициентами из P) от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. С другой стороны, многочлен $\bar{f}(y_1, y_2, \ldots, y_r)$, рассматриваемый над полем $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, будет симметрическим относительно $y_1, y_2, \ldots, y_r$ и поэтому представим в виде многочлена $\bar{\varphi}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$. Коэффициенты многочлена $\bar{\varphi}$ будут, как показано в начале настоящего параграфа, выражаться через коэффициенты многочлена $\bar{f}$ при помощи сложения и вычитания, а поэтому они также будут многочленами от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Это приводит, очевидно, к искомому выражению для f через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$.

Пример. Многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1x_2x_3 - x_1x_2y_1 - x_1x_2y_2 - x_1x_3y_1 - \\ - x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 - x_2x_3y_2 + x_1y_1y_2 + x_2y_1y_2 + x_3y_1y_2$$

симметричен как по неизвестным x_1, x_2, x_3, так и по неизвестным y_1, y_2, но не будет симметрическим по всей совокупности пяти неизвестных, как обнаруживается хотя бы при транспозиции неизвестных x_1 и y_1. Найдем выражение для f через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2$:

$$f = x_1x_2x_3 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,y_1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,y_2 + \\ + (x_1 + x_2 + x_3)\,y_1y_2 = \sigma_3 - \sigma_2y_1 - \sigma_2y_2 + \sigma_1y_1y_2 = \sigma_3 - \sigma_2\tau_1 + \sigma_1\tau_2.$$

Доказанная сейчас теорема распространяется, понятно, также на случай трех и большего числа систем неизвестных.

Для многочленов, симметрических по двум системам неизвестных, справедлива также теорема единственности представления через элементарные симметрические многочлены. Иными словами, справедлива следующая теорема:

Объединенная система

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$$

элементарных симметрических многочленов от заданных систем неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_r$ алгебраически независима над полем P.

Пусть, в самом деле, существует многочлен

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$$

над полем P, равный нулю, хотя не все его коэффициенты нули. Этот многочлен можно рассматривать как многочлен $\psi(\tau_1\, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ с коэффициентами, являющимися многочленами от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

Можно считать, следовательно, что ψ — многочлен от $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ над полем рациональных дробей

$$Q = P(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Система $y_1, y_2, \ldots, y_r$ остается алгебраически независимой над полем Q: если бы для этой системы существовала алгебраическая зависимость с коэффициентами из Q, то, освобождаясь от знаменателей, мы получили бы алгебраическую зависимость в системе (4) против предположения. Опираясь на теорему единственности из предыдущего параграфа, мы получаем теперь, что система $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ также должна быть алгебраически независимой над полем Q, а поэтому все коэффициенты многочлена ψ равны нулю. Эти коэффициенты являются, однако, многочленами от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, а поэтому, снова на основании теоремы единственности для случая одной системы неизвестных (на этот раз системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$), все коэффициенты этих последних многочленов сами равны нулю. Этим доказано, что в противоречие с предположением все коэффициенты многочлена φ должны быть равными нулю.

§ 54*. Результант. Исключение неизвестного. Дискриминант

Если дан многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из кольца $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, то его *решением* называется такая система значений для неизвестных

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_n = \alpha_n,$$

взятых в поле P или в некотором расширении $\bar{P}$ этого поля, которая обращает многочлен f в нуль:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Всякий многочлен f, степень которого больше нуля, обладает решениями: если неизвестное x_1 входит в запись этого многочлена, то в качестве $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можно взять по существу произвольные элементы из поля P, лишь бы степень многочлена $f(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ оставалась строго положительной, а затем, используя теорему о существовании корня (§ 49), взять такое расширение $\bar{P}$ поля P, в котором многочлен $f(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ от одного неизвестного x_1 обладает корнем α_1. Мы видим вместе с тем, что свойство многочлена степени n от одного неизвестного обладать во всяком поле не более чем n корнями для многочленов от нескольких неизвестных перестает быть справедливым.

Если дано несколько многочленов от n неизвестных, то можно поставить вопрос о разыскании решений, общих для всех этих многочленов, т. е. решений той системы уравнений, которая получается в результате приравнивания заданных многочленов нулю. Частный случай этой задачи, а именно случай систем линейных уравнений,