

ванный по правилу умножения матриц и вспоминая определенные в предыдущем параграфе степенные суммы, мы получим:

$$D = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (18)$$

где  $s_k$  есть сумма  $k$ -х степеней корней  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Пример. Найдем дискриминант кубического многочлена  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . По (18)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

Как мы знаем из предыдущего параграфа,

$$s_1 = \sigma_1 = -a,$$

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2 - 2b,$$

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -a^3 + 3ab - 3c.$$

Пользуясь формулой Ньютона, мы найдем также, ввиду  $\sigma_4 = 0$ , что

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D &= 3s_2s_4 + 2s_1s_2s_3 - s_2^3 - s_1^2s_4 - 3s_3^2 = \\ &= a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2. \end{aligned} \quad (19)$$

В частности, при  $a = 0$ , т. е. для неполного кубического многочлена, мы получаем

$$D = -4b^3 - 27c^2$$

в полном соответствии с тем, что было сказано в § 38.

### § 55\*. Второе доказательство основной теоремы алгебры комплексных чисел

Доказательство основной теоремы, приведенное в § 23, было совершенно неалгебраическим. Мы хотим изложить сейчас другое доказательство, использующее большой алгебраический аппарат — так, в нем существенно используется основная теорема о симметрических многочленах (§ 52), а также теорема о существовании поля разложения для всякого многочлена (§ 49), — в то время как неалгебраическая часть этого доказательства является минимальной и сведена к одному весьма простому утверждению.

Заметим сначала, что в § 23 доказана лемма о модуле старшего члена многочлена. Считая коэффициенты многочлена  $f(x)$  действи-

тельными и полагая  $k=1$ , мы получаем из этой леммы такое следствие:

*При действительных значениях  $x$ , достаточно больших по абсолютной величине, знак многочлена  $f(x)$  с действительными коэффициентами совпадает со знаком его старшего члена.*

Отсюда вытекает следующий результат:

*Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.*

В самом деле, пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

причем все коэффициенты действительны. Ввиду нечетности  $n$  старший член  $a_0x^n$  имеет при положительных и отрицательных значениях  $x$  разные знаки, а потому, как доказано выше, при положительных и отрицательных значениях  $x$ , достаточно больших по абсолютной величине, многочлен  $f(x)$  также будет иметь разные знаки. Существуют, следовательно, такие действительные значения  $x$ , например  $a$  и  $b$ , что

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0.$$

Из курса анализа известно, однако, что многочлен (т. е. целая рациональная функция)  $f(x)$  является функцией непрерывной, а поэтому, ввиду одного из основных свойств непрерывных функций, при некоторых действительных значениях  $x$ , заключенных между  $a$  и  $b$ ,  $f(x)$  принимает любое заданное значение, промежуточное между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Существует, в частности, такое  $\alpha$ , лежащее между  $a$  и  $b$ , что  $f(\alpha) = 0$ .

Опираясь на этот результат, мы докажем теперь следующее утверждение:

*Всякий многочлен произвольной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.*

Пусть, в самом деле, дан многочлен  $f(x)$  с действительными коэффициентами, имеющий степень  $n = 2^kq$ , где  $q$  — нечетное число. Так как случай  $k=0$  уже рассмотрен выше, мы будем полагать  $k > 0$ , т. е. считать  $n$  четным числом, и будем вести доказательство индукцией по  $k$ , предполагая, что наше утверждение уже доказано для всех многочленов с действительными коэффициентами, степень которых делится на  $2^{k-1}$ , но не делится на  $2^k$ ).

Пусть  $P$  будет полем разложения для многочлена  $f(x)$  над полем комплексных чисел (см. § 49) и пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  будут корни  $f(x)$ , содержащиеся в поле  $P$ . Выберем произвольное действительное число  $c$  и возьмем элементы поля  $P$ , имеющие вид

$$\beta_{ij} = \alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j), \quad i < j. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Эта степень может, следовательно, быть даже больше  $n$ .

Число элементов  $\beta_{ij}$  равно, очевидно,

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k q (2^k q - 1)}{2} = 2^{k-1} q (2^k q - 1) = 2^{k-1} q', \quad (2)$$

где  $q'$  есть нечетное число.

Построим теперь многочлен  $g(x)$  из кольца  $P[x]$ , имеющий свойми корнями все эти элементы  $\beta_{ij}$  и только их:

$$g(x) = \prod_{i, j, i < j} (x - \beta_{ij}).$$

Коэффициенты этого многочлена являются элементарными симметрическими многочленами от  $\beta_{ij}$ . Они будут, следовательно, ввиду (1), многочленами от  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  с действительными коэффициентами (так как число  $c$  действительное), причем даже симметрическими многочленами. В самом деле, транспозиция любых двух  $\alpha$ , например  $\alpha_k$  и  $\alpha_l$ , влечет за собой лишь перестановку в системе всех  $\beta_{ij}$ : всякое  $\beta_{kj}$ , где  $j$  отлично от  $k$  и от  $l$ , превращается в  $\beta_{lj}$  и обратно, в то время как  $\beta_{kl}$  и все  $\beta_{ij}$  при  $i$  и  $j$ , отличных от  $k$  и  $l$ , остаются на месте. Однако коэффициенты многочлена  $g(x)$  не меняются при перестановке его корней.

Отсюда следует, ввиду основной теоремы о симметрических многочленах, что коэффициенты многочлена  $g(x)$  будут многочленами (с действительными коэффициентами) от коэффициентов заданного многочлена  $f(x)$  и поэтому сами будут действительными числами. Степень этого многочлена, равная числу корней  $\beta_{ij}$ , делится, по (2), на  $2^{k-1}$ , но не делится на  $2^k$ . Поэтому, по предположению индукции, хотя бы один из корней  $\beta_{ij}$  многочлена  $g(x)$  должен быть комплексным числом.

Таким образом, при всяком выборе действительного числа  $c$  можно указать такую пару индексов  $i, j$ , где  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , что элемент  $\alpha_i \alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j)$  является комплексным числом — напомним, что поле  $P$  содержит поле комплексных чисел в качестве подполя. Понятно, что при другом выборе числа  $c$  ему будет соответствовать в указанном смысле, вообще говоря, другая пара индексов. Однако существует бесконечно много различных действительных чисел  $c$ , в то время как в нашем распоряжении находится лишь конечное число различных пар  $i, j$ . Отсюда следует, что можно выбрать такие два различных действительных числа  $c_1$  и  $c_2$ ,  $c_1 \neq c_2$ , что им соответствует одна и та же пара индексов  $i, j$ , для которых

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i \alpha_j + c_1 (\alpha_i + \alpha_j) = a, \\ \alpha_i \alpha_j + c_2 (\alpha_i + \alpha_j) = b \end{array} \right\} \quad (3)$$

являются комплексными числами.

Из равенств (3) вытекает:

$$(c_1 - c_2)(\alpha_i + \alpha_j) = a - b,$$

откуда следует:

$$\alpha_i + \alpha_j = \frac{a - b}{c_1 - c_2},$$

т. е. эта сумма оказывается комплексным числом. Отсюда и хотя бы из первого из равенств (3) следует, что произведение  $\alpha_i \alpha_j$  также будет комплексным числом. Таким образом, элементы  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  оказываются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i \alpha_j = 0$$

с комплексными коэффициентами и поэтому, как вытекает из формулы для решения квадратного уравнения с комплексными коэффициентами, выведенной в § 38, они сами должны быть комплексными числами. Мы нашли, следовательно, среди корней многочлена  $f(x)$  даже два комплексных корня и этим доказали наше утверждение.

Для полного доказательства основной теоремы остается рассмотреть случай многочлена с произвольными комплексными коэффициентами. Пусть

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

будет такой многочлен. Возьмем многочлен

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \dots + \bar{a}_n,$$

полученный из  $f(x)$  заменой всех коэффициентов сопряженными комплексными числами, и рассмотрим произведение

$$F(x) = f(x) \bar{f}(x) = b_0 x^{2n} + b_1 x^{2n-1} + \dots + b_k x^{2n-k} + \dots + b_{2n},$$

где, очевидно,

$$b_k = \sum_{i+j=k} a_i \bar{a}_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

Опираясь на известные нам из § 18 свойства сопряженных комплексных чисел, мы получаем, что

$$\bar{b}_k = \sum_{i+j=k} \bar{a}_i a_j = b_k,$$

т. е. все коэффициенты многочлена  $F(x)$  оказываются действительными.

Отсюда, как доказано выше, следует, что многочлен  $F(x)$  обладает хотя бы одним комплексным корнем  $\beta$ ,

$$F(\beta) = f(\beta) \bar{f}(\beta) = 0,$$

т. е. или  $f(\beta) = 0$ , или же  $\bar{f}(\beta) = 0$ . В первом случае теорема доказана. Если же имеет место второй случай, т. е.

$$\bar{a}_0\beta^n + \bar{a}_1\beta^{n-1} + \dots + \bar{a}_n = 0,$$

то, заменяя все входящие сюда комплексные числа им сопряженными (что, как мы знаем, не нарушает равенства), мы получим:

$$f(\bar{\beta}) = a_0\bar{\beta}^n + a_1\bar{\beta}^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

т. е.  $f(x)$  имеет своим корнем комплексное число  $\bar{\beta}$ . Доказательство основной теоремы закончено.

---